Б.П.吉米多维奇

数学分析习题经典解析

费定晖　编演　郭大钧　主审



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

责任编辑　宋　涛
封面设计　李玉颖



Б.П.
吉米多维奇
数学分析习题经典解析

费定晖 编演 郭大钧 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

吉米多维奇数学分析习题经典解析/费定晖编演.—济南：山东科学技术出版社,2013
ISBN 978 - 7 - 5331 - 7069 - 1

Ⅰ.①吉...　Ⅱ.①费...　Ⅲ.①数学分析—高等学校—题解　Ⅳ.①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 242061 号

吉米多维奇数学分析习题经典解析

费定晖　编演

出版者： **山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)82098088
网址：www.lkj.com.cn
电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发行者： **山东科学技术出版社**
地址：济南市玉函路 16 号
邮编：250002　电话：(0531)82098071

印刷者： **山东人民印刷厂**
地址：莱芜市嬴牟西大街28号
邮编：271100　电话：（0634）6276022

开本：787mm×1092mm 1/16
印张：27.5
版次：2013年12月第1版第1次印刷

ISBN　978 - 7 - 5331 - 7069 - 1
定价：　48.00 元

前言 QIANYAN

由费定晖、周学圣编演，郭大钧、邵品琮主审的图书《Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解》(以下简称为《题解》)，全书共六册，自 1979 年经由山东科学技术出版社出版发行以来，历经 34 个春秋，先后共有 4 个版本 30 余次印刷，一直畅销不衰，深得读者厚爱。对此我们倍感欣慰，这将鞭策我们为读者作出更多奉献。

这次受山东科学技术出版社的再次约请，由我负责，在《题解》一书的基础上，从各章节中挑选出较为经典的习题，除了原解答外，有些题还给出了分析提示或思路，从而组成一本新书《Б. П. 吉米多维奇数学分析习题经典解析》(以下简称为《经典解析》)，全书共一册出版。

对于《经典解析》一书，我有以下几点考虑：

第一，考虑到不同层次的读者的不同要求，各类型的习题由浅入深，由易到难。有些题在它的后面还加上**注**，例如，143 题证明施托尔茨定理及 144 题的**注**，又如 3793 题的**注**，等等，对于一定层次的读者，这些所加的**注**要仔细阅读，予以密切关注。如果你认真做了，收获将会倍增。

第二，对不同类型的习题，根据难易程度的不同，对《经典解析》一书中的部分习题，在原题解的前面，分别给出**提示**，或给出**解题思路**，或给出**证明思路**，例如 52 题、452 题、150 题，等等，目的是帮助读者怎样分析问题，怎样下手解决问题，为他们在学习过程中提供一个良师益友。

第三，根据国家相关标准，规范了有关术语和数学式子的表达，并对全书使用的外国人名，按照现在的标准或通用译法重新翻译人名，以求统一标准和适应时代发展需要。

第四，根据当前的语言习惯，对《经典解析》一书的文字作了较多的润色，使其表述更加准确，语言更加简洁、凝练和流畅。

第五，全书所选习题的总题量控制在原习题集 4462 题的四分之一左右，其中证明题的量占到近三成。这样，可使读者在一定量的时间内既能保证数学分析基本功的训练，又能提高学习质量和数学素养。

我们殷切期望使用本书的读者，懂得只有通过个人的独立思考，加上勤学苦练才能取得成功。我们编写本书，希望能帮助读者更好地掌握数学分析的基本知识、基础理论和基本技能的训练，巩固和加深对该课程基本内容的理解。

本书特请山东大学郭大钧教授担任主审，他对全书作了重要、仔细的审校，其中有的习题的较好解法或证明思路，均出自他的亲笔，这对于提高全书的质量极为重要，特致衷心的感谢。

这次本书能顺利地在较短的时间内出版发行，有赖于山东科学技术出版社领导的大力支持，该社责任编辑宋涛同志、邱蕾同志作了大量深入细致的编辑和版面设计等工作，付出了艰辛努力，对此我们深表谢意。同时感谢山东大学、华东交通大学等学校对本书出版的支持。感谢社会各界同仁对本书的支持。

面对如此庞大、丰富多彩、极其经典的图书，限于本人水平，《经典解析》一书中难免有错误和不当之处，敬请各位专家、同仁和广大读者批评指正，不胜感激，并在重印中更正。

费定晖

2013 年 6 月于华东交通大学

目录 MULU

第一章　分析引论

§1.　实　数

1° **数学归纳法**　为了证明某定理对任意的正整数 n 为真，只需证明下面两点即可：(1)这定理对$n=1$为真，(2)设这定理对任何的一个正整数 n 为真，则它对下一个正整数 $n+1$ 也为真.

2° **分割**　若分有理数为 A 和 B 两类，使其满足下列条件：(1)两类均非空集，(2)每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，(3)属于 A 类(**下类**)的任一数小于属于 B 类(**上类**)的任何数，则这样的一个分类法称为**分割**.(ⅰ)若或是下类 A 有最大的数，或是上类 B 有最小的数，则分割 A/B 确定一个有理数.(ⅱ)若 A 类无最大数，而 B 类亦无最小数，则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3° **绝对值**(或模)　若 x 为实数，则用下列条件所确定的非负数$|x|$，称为 x 的绝对值(模)：

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y，以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4° **上确界和下确界**　设 $X=\{x\}$ 为实数的有界集合，若：

(1)每一个 $x\in X$** 满足不等式 $x\geqslant m$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x'\in X$，使 $x'<m+\varepsilon$，则数 $m=\inf\{x\}$ 称为集合 X 的*下确界*.

同样，若：

(1)每一个 $x\in X$ 满足不等式 $x\leqslant M$；

(2)对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $x''\in X$，使 $x''>M-\varepsilon$，则数 $M=\sup\{x\}$ 称为集合 X 的*上确界*.

若集合 X 下方无界，则通常说 $\inf\{x\}=-\infty$；

若集合 X 上方无界，则认为 $\sup\{x\}=+\infty$.

5° **绝对误差和相对误差**　设 a $(a\neq 0)$是被测量的精确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为被测量的*绝对误差*，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测量的*相对误差*.

若数 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有效数字所对应的位数的单位的一半，则说 x 有 *n 位精确的数字*.

利用数学归纳法求证下列等式对任何正整数 n 皆成立：

【5】　设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及 $a^{[0]}=1$，求证：

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个元素的组合数，由此推出牛顿二项式公式.

---

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数.

** 符号 $x\in X$ 表示 x 属于集合 X.

证 当 $n=1$ 时，由于 $[a+b]^{[1]}=a+b$ 及 $\sum\limits_{m=0}^{1} C_1^m a^{[1-m]} b^{[m]}=a+b$，所以等式成立.

设 $n=k$ 时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}\\
&=(a+b-kh)\{C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0 a^{[k]} b^{[0]}+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1 a^{[k-1]} b^{[1]}+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^k a^{[0]} b^{[k]}\\
&=C_k^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_k^0 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k]} b^{[1]}+C_k^1 a^{[k-1]} b^{[2]}+\cdots+C_k^k a^{[1]} b^{[k]}+C_k^k a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0 a^{[k+1]} b^{[0]}+C_{k+1}^1 a^{[k]} b^{[1]}+\cdots+C_{k+1}^k a^{[1]} b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1} a^{[0]} b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},
\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}$ 可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k+1-m]} b^{[m]},$$

即对于 $n=k+1$ 时，等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}. \tag{3}$$

在式子 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 中，令 $h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式 $(a+b)^n=\sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$.

【6】 证明伯努利不等式：

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n=1$ 时，此式取等号.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，由于 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 大于 -1，所以，$1+x_i>0$. 因而，有

$$\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\
&\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\
&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).
\end{aligned}$$

由于 $x_ix_j\geqslant 0$，所以，

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

【8】 证明不等式：$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n>1)$.

提示 注意不等式$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots)$.

证 当 $n=2$ 时，因为$\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即 $k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k$，则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于
$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2 \quad (k=1,2,\cdots),$$

从而有
$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立.

于是，对于任何正整数 n，有 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

【10】 证明不等式：$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证 当 $n=1$ 时，因为$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$.

则对于 $n=k+1$ 时，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$，即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$，而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是，最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 于是，由数学归纳法，本题证毕.

【11】 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割，其中 B 类包含所有满足 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数. 求证：在 A 类中无最大数，而在 B 类中无最小数.

证 设 $a\in A$. 若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>a(a'>0)$ 且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若 $a^2=c$，设 $a=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互素的正整数，则$\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数，而 p^2 与 q^2 也是互素的，故必 $q=1$，从而 $c=p^2$，此与假定矛盾，故必 $a^2<c$. 下面我们证明，存在正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$ 也属于 A.

上述不等式相当于：$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c$， $\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2$，若 n 满足不等式$\frac{2a+1}{n}<c-a^2$，则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此，只要取 $n>\frac{2a+1}{c-a^2}$，而这是恒为可能的. 因此，不论 a 为 A 类内怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中无最小数. 实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$.

【13】 作出适当的分割，然后证明等式：(1)$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$.

证 (1)作确定$\sqrt{2}$的分割 A/B：一切有理数 $a\leqslant 0$ 以及满足 $a^2<2$ 的正有理数 a 都归于 A 类，一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入 B 类. 又作确定$\sqrt{8}$的分割 A'/B'：一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足 $a'^2<8$ 的正有理数 a' 归入 A'类，一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b' 归入 B'类. 我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式：

$$a+a'<c<b+b' \quad (\text{对任何 } a\in A, b\in B, a'\in A', b'\in B')$$

的唯一实数 c 就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$. 因此，如果我们能证明恒有$(a+a')^2<18$(当 $a+a'>0$ 时)，$(b+b')^2>18$，则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$. 于是得知 $\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$.

若 $a+a'>0$，则 a 与 a' 中至少有一个为正，从而由 $a^2a'^2<16$ 知 $aa'<4$，

$$(a+a')^2=a^2+a'^2+2aa'<2+8+8=18;$$

同样，因 $b^2>2, b'^2>8, b>0, b'>0$，故 $b^2b'^2>16, bb'>4$，

$$(b+b')^2=b^2+b'^2+2bb'>2+8+8=18.$$

于是证毕.

【15】 求证：任何非空且下方有界的数集有下确界，而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性，只证本题的后半部分，分两种情形：

(1)A 中有最大数$\bar{a}$，此时，设 $a\in A$，则有 $a\leqslant\bar{a}$，说明 $\bar{a}$ 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a}\in A$，故对 A 的任何上界 M，均有 $\bar{a}\leqslant M$，故 $\bar{a}$ 为 A 的上确界.

(2)A 中无最大数. 此时，作分割 A_1/B_1：取集 A 的一切上界归入 B_1 类，而其余的数归入 A_1 类. 这样，A 中一切数全部落在 A_1 内，A_1 及 A 均非空，且 A_1 中的数小于 B_1 中的数，这确实是一个实数分割，易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数，即 β 是 A 的最小上界，从而 β 是 A 的上确界.

【18】 设$\{-x\}$为数的集合，这些数是与 $x\in\{x\}$ 符号相反的数. 证明等式：

(1)$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

证 (1)设 $\inf\{-x\}=m'$，则有：

(ⅰ)当$-x\in\{-x\}$时，$-x\geqslant m'$； (ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有$-x'\in\{-x\}$，使$-x'<m'+\varepsilon$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x\in\{x\}$时，$x\leqslant -m'$； (ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'\in\{x\}$，使 $x'>-m'-\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数$-m'=\sup\{x\}$，即 $m'=-\sup\{x\}$，所以，$\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$.

【19】 设$\{x+y\}$为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x\in\{x\}$ 及 $y\in\{y\}$. 证明等式：

(1)$\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

证 (1)设 $\inf\{x\}=m_1$，$\inf\{y\}=m_2$，则有：

(ⅰ)当 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$时，$x\geqslant m_1$，$y\geqslant m_2$；

(ⅱ)对于任何的正数 ε，存在有数 $x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$，使 $x'<m_1+\frac{\varepsilon}{2}$， $y'<m_2+\frac{\varepsilon}{2}$.

由(ⅰ)及(ⅱ)推得：

(ⅲ)当 $x+y\in\{x+y\}$时(其中 $x\in\{x\}$，$y\in\{y\}$)，$x+y\geqslant m_1+m_2$；

(ⅳ)对于任何的正数 ε，存在有 $x'+y'\in\{x+y\}$ (其中$x'\in\{x\}$，$y'\in\{y\}$)，使 $x'+y'<(m_1+m_2)+\varepsilon$.

由(ⅲ)及(ⅳ)知数 $m_1+m_2=\inf\{x+y\}$，即 $\inf\{x+y\}=\inf\{x\}+\inf\{y\}$.

解不等式：

【26】 $|x+2|+|x-2|\leqslant 12$.

提示 令 $x-2=t$，易得 $-8\leqslant t\leqslant 4$，从而有 $|x|\leqslant 6$.

解 令 $x-2=t$，则得 $|t+4|+|t|\leqslant 12$ 或 $|t+4|\leqslant 12-|t|$.

两边平方，即有 $t^2+8t+16\leqslant 144-24|t|+t^2$，或 $3|t|\leqslant 16-t$.

将上式两端再平方，化简整理得 $t^2+4t-32\leqslant 0$，于是，有 $-8\leqslant t\leqslant 4$. 从而得 $-8\leqslant x-2\leqslant 4$，即

$$-6\leqslant x\leqslant 6 \quad 或 \quad |x|\leqslant 6.$$

【29】 $|x(1-x)|<0.05$.

解 由 $|x-x^2|<\frac{1}{20}$ 得 $x^2-x+\frac{1}{20}>0$ 或 $x^2-x-\frac{1}{20}<0$，解之得

$$\begin{cases}\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}\\ \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x \quad 或 \quad x<\frac{5-\sqrt{20}}{10},\end{cases}$$

即
$$\frac{5-\sqrt{30}}{10}<x<\frac{5-\sqrt{20}}{10} \quad 或 \quad \frac{5+\sqrt{20}}{10}<x<\frac{5+\sqrt{30}}{10}.$$

【40】 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差，$\delta(x,y)$ 为数 xy 的相对误差. 求证：

$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

提示 由绝对误差与相对误差的定义，命题即获证.

证 设 $x=a+\Delta_x$，$y=b+\Delta_y$，其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值，Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差，则有

$$xy-ab=b\Delta_x+a\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

于是，

$$\Delta=|xy-ab|\leqslant|b|\cdot\Delta_x+|a|\cdot\Delta_y+\Delta_x\cdot\Delta_y.$$

最后得

$$\delta(xy)=\frac{\Delta}{|ab|}\leqslant\frac{\Delta_x}{|a|}+\frac{\Delta_y}{|b|}+\frac{\Delta_x}{|a|}\cdot\frac{\Delta_y}{|b|},$$

此即
$$\delta(xy)\leqslant\delta(x)+\delta(y)+\delta(x)\delta(y).$$

§2. 数列理论

1° **数列极限的概念** 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 有极限 a（或者说，收敛于 a），亦即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

特别地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则称 x_n 为无穷小量.

没有极限的数列，称为发散的.

2° **极限存在的准则**

(1) 若 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) **柯西准则** 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的充分必要条件是：对于任何的 $\varepsilon>0$，存在数 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，$|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$.

3° **关于数列极限的基本定理** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，则有：

(1) 若 $x_n\leqslant y_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n$； (4)若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

4° **数 e** 数列

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,2,\cdots)$$

具有有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.7182818284\cdots$$

5° **无穷极限** 符号

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty$$

表示：对于任何的 $E>0$，存在数 $N=N(E)$，使当 $n>N$ 时，$|x_n|>E$.

6° **聚点** 若已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$有子数列

$$x_{p_1},x_{p_2},\cdots,x_{p_n},\cdots \quad (1\leqslant p_1<p_2<\cdots)$$

满足

$$\lim_{n\to\infty}x_{p_n}=\xi,$$

则称数 ξ（或符号∞）为已知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$的聚点（聚点也称为极限点）.

一切有界的数列至少有一个有限的聚点（波尔查诺——魏尔斯特拉斯原理）. 若这个聚点是唯一的，则它即为已知数列的有限极限.

数列 x_n 的最小聚点（有限的或无穷的）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 称为此数列的下极限，而它的最大聚点 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 称为此数列的上极限.

等式 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 为数列 x_n 的（有限或无穷）极限存在的充分必要条件.

【44】 求证：$x_n=n^{(-1)^n}(n=1,2,\cdots)$无界，但当 $n\to\infty$时，它并不成为无穷大.

提示 只要注意到当 k 为正整数时，有 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k,\\ \dfrac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

命题即获证.

证 因为 $x_n=n^{(-1)^n}=\begin{cases}2k, & n=2k, k\text{ 为正整数},\\ \dfrac{1}{2k-1}, & n=2k-1,\end{cases}$

所以，$x_{2k}\to\infty$，$x_{2k-1}\to 0\ (k\to\infty)$. 由于 $x_{2k}\to\infty$，故 x_n 无界；但因 $x_{2k-1}\to 0$，故 x_n 并不趋于无穷大.

设 n 遍历正整数列，求下列各式之值：

【48】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 因为 $\sin n!$有界：$|\sin n!|\leqslant 1$ 及 $\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0$.

【52】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$.

提示 分别令 $n=2k$ 及 $n=2k+1$（k 为正整数），易知极限不存在.

解 当 $n=2k$ 时（k 为正整数），

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k}-\frac{2}{2k}+\frac{3}{2k}-\cdots-\frac{2k}{2k}=\frac{-k}{2k}=-\frac{1}{2};$$

当 $n=2k+1$，

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}=\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{2k+1}+\frac{3}{2k+1}-\cdots+\frac{2k+1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2};$$

由于取不同方式时，所得的极限值不同，所以，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right]$不存在.

【53】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right]=\frac{1}{3}$.

【54】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

提示 令 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$，先证 $\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}=8f(2n)-4f(n)$.
利用53题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}$，由53题即得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}[8f(2n)-4f(n)]=\frac{4}{3}.$$

【55】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

提示 令 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$ 及 $g(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，
易证 $f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}$. 利用58题的结果即获解.

解 设 $f(n)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$，$g(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$，
则有 $2f(n+1)-g(n)=f(n)+1$，又由 $2f(n+1)-f(n)=f(n)+\frac{2n+1}{2^n}=g(n)+1$，故

$$f(n)=g(n)+1-\frac{2n+1}{2^n}.$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}[g(n)+1]=3$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$ *)，故得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)=3$.

*） 参看58题.

证明下列等式：

【58】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

提示 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$ $(n>2)$.

证 因为 $2^n=(1+1)^n=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1>\frac{n(n-1)}{2}$ $(n>2)$，

故 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n-1}$；又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

【60】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$.

提示 $a^n>\frac{n^2(a-1)^2}{4}$ $(n>2)$. 分别就 $k\leqslant 0$，$k=1$ 及 $k>0$ 三种情形加以证明.

证 令 $a=1+\lambda$ $(\lambda>0)$，
则

$$a^n=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2+\cdots+\lambda^n>\frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n>2).$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，此时，$a^n>\frac{n^2}{4}\lambda^2=\frac{n^2(a-1)^2}{4}$.

(1)当 $k\leqslant 0$ 时,这时显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a^n\cdot n^{-k}}=0$.

(2)当 $k=1$ 时,$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{a^n}<\frac{4n}{n^2(a-1)^2}$,而$\frac{4n}{n^2(a-1)^2}\to 0$, 所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$;

(3)当 $k>0$ 时,$\frac{n^k}{a^n}=\left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right]^k$,而 $a^{\frac{1}{k}}>1$,于是由(2)知,$\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\to 0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

总之,当 $a>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

【61】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

提示 令 k 代表任一大于 $2|a|$ 的正整数,则当 $n>k$ 时,有 $0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|<\frac{(2|a|)^k}{2^n}$.

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的正整数,则当 $n>k$ 时,有

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\right)\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n}\right)<|a|^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2|a|)^k}{2^n}=0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

【62】 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,若 $|q|<1$.

提示 分别就 $0<q<1$,$-1<q<0$ 及 $q=0$ 三种情形加以证明.

证 (1)当 $0<q<1$ 时,可令 $q=\frac{1}{a}$,其中 $a>1$,所以, 当 $n\to\infty$时,$nq^n=\frac{n}{a^n}\to 0$ *);

(2)当 $-1<q<0$ 时,可令 $q=-q'$,其中 $0<q'<1$,所以,当 $n\to\infty$时,$nq^n=(-1)^n nq'^n\to 0$;

(3)当 $q=0$ 时,$nq^n=0$.

总之,当 $|q|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【63】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$.

提示 分别就 $a=1$,$a>1$ 及 $0<a<1$ 三种情形加以证明.

证 (1)当 $a=1$ 时,等式显然成立;

(2)当 $a>1$ 时,因为$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon(n>1,\varepsilon>0)$,则当 n 充分大后,可使 $1+n\varepsilon>a$,即$(1+\varepsilon)^n>a$.事实上,只要取 $N=\left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,就可保证这点.所以,$1<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$,于是,当 $n>N$ 时,$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|<\varepsilon$,此即$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$;

(3)当 $0<a<1$ 时,则令 $a=\frac{1}{a'}$,其中 $a'>1$.于是,当 $n\to\infty$时,$\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a'}}\to 1$.

总之,当 $a>0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

【68】 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

提示 利用 10 题的结果及夹逼准则.

证 因为 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *),又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0$.

*) 利用 10 题的结果.

【69】 证明:数列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$(n=1,2,\cdots)$是单调增加的,且上方有界.而数列 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$(n=1,2,\cdots)$是单调减少的,且下方有界.由此推出这些数列有公共的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

证明思路 首先,将 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 展开,可得

$$x_n=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

当 n 增加时,上式的项数增多,而且每个括弧内的数值也增大,故知数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.由上式,利用$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$ $(k>2)$,可得 $x_n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3$,即数列 x_n 上方有界.

其次,由

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即易推出 $y_{n-1}>y_n$,故知数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 单调减少.又显然可知 $y_n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1+\frac{n}{n}=2$,即数列 y_n 下方有界.

证 $$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^k\frac{1}{n^k}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$
$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正,当 n 增加时,不但对应的项数增多,而且每一个括弧内的数值也增大,所以,数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 单调增加.

又当 $k>2$ 时,$\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<1$,$\frac{1}{k!}<\frac{1}{2^{k-1}}$,所以,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3,$$

此即数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 上方有界.

由此,我们知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在,以 e 表之.

其次,由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\frac{n}{n^2-1}>1+\frac{1}{n},$$

即$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\frac{n+1}{n}$,也即$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$,所以,$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,此即 $y_{n-1}>y_n$,因而,数列 $y_n(n=1,2,\cdots,)$ 单调减少.又因

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+n\cdot\frac{1}{n}=2,$$

所以,数列 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 下方有界.

由此,我们知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在,且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{e}.$$

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

【71】 设 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列,而 $q_n(n=1,2,\cdots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列($p_n,q_n\notin[-1,0]$).求证:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

证明思路 首先，令 $k_n=[p_n]$，利用 69 题的结果可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\mathrm{e}$.

又由 $\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1}$，可证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$.

其次，令 $q_n=-p_n$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}$.

证 令 $k_n=[p_n]$，即 k_n 表 p_n 的整数部分，则 $k_n\leqslant p_n<k_n+1$.

由于 $p_n\to+\infty$，故 $k_n\to+\infty$，从而，显然 $\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\to\mathrm{e}$.（参看 69 题题解）. 由于

$$\frac{1}{k_n}\geqslant\frac{1}{p_n}>\frac{1}{k_n+1},\quad \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}>\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}>\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1}=\mathrm{e}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$.

其次，若 $q_n\to-\infty$，令 $q_n=-p_n$，其中 $p_n\to+\infty$. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{p_n-1}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)=\mathrm{e},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}$.

【74】 证明不等式：$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证明思路 由 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\frac{n}{2}$，两边取对数，并就 k 从 1 到 $n-1$ 相加，得

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},\quad 从而可得\ n!\leqslant2\left(\frac{n}{2}\right)^n<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

再令 $x_n=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，可得 $\frac{x_n}{x_{n-1}}<n$. 注意到 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$，即知 $x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$.

证 由 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\frac{n}{2}$，则 $\frac{1}{2}[\ln k+\ln(n-k)]\leqslant\ln\frac{n}{2}$，从而，

$$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k\leqslant(n-1)\ln\frac{n}{2},\ (n-1)!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}.$$

两边同乘以 $\frac{n}{2}$，得 $\frac{1}{2}n!\leqslant\left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是 $n!\leqslant2\left(\frac{n}{2}\right)^n<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$，即 $n!<\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证 $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$. 设 $x_n=\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}\mathrm{e}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{\mathrm{e}}<n.$$

所以（注意到 $x_1=\frac{1}{\mathrm{e}}<1$），$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}<n!$. 从而，证得 $\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$.

【75】 证明不等式：(1) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，其中 n 为任意的正整数.

证 (1)因为 $1<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，两边取对数，得 $0<n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$，故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$；

又因为 $\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数，得 $1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$，故 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}$.

因而 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

【76】 求证：$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\ (a>0)$，式中 $\ln a$ 是取 $e=2.718\cdots$ 作底时，数 a 的对数.

证 先设 $a>1$. 令 $b_n=a^{\frac{1}{n}}-1$，则 $b_n>0$，且 $\frac{\ln a}{n}=\ln(1+b_n)$，故

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\,\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}.$$

由于 $b_n\to0$，故存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，$0<b_n<1$. 于是，对每个 $n>N$，存在唯一正整数 k_n，使 $\frac{1}{k_n+1}\leqslant b_n<\frac{1}{k_n}$. 由于 $b_n\to0$，故 $k_n\to+\infty$. 由 75 题(1)知

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

故
$$\frac{1}{k_n+2}<\ln\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)\leqslant\ln(1+b_n)<\ln\left(1+\frac{1}{k_n}\right)<\frac{1}{k_n}.$$

从而，
$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}=1+\frac{2}{k_n},$$

由于 $k_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，故 $\frac{b_n}{\ln(1+b_n)}\to1\ (n\to\infty)$，由此得

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a.$$

现设 $0<a<1$. 则 $\frac{1}{a}>1$. 于是，由上结果可知

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\left[(-a^{\frac{1}{n}})\cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=-\ln\frac{1}{a}=\ln a.$$

当 $a=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a$ 显然成立，故此式对任何 $a>0$ 成立. 证毕.

利用关于单调有界数列极限存在的定理，证明以下各数列的收敛性：

【79】 $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

证 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)<x_n$，所以，数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的.

又因 $0<x_n<1$，所以，数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

利用柯西准则，证明以下各数列的收敛性：

【83】 $x_n=\frac{\sin1}{2}+\frac{\sin2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$.

证 $|x_m-x_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin m}{2^m}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{m-n-1}}\right)<\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}\quad(m>n).$

任给 $\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln2}\right]$，则当 $m>n>N$ 时，必有 $\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，从而 $|x_m-x_n|<\varepsilon$，所以，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【86】 对于数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，若存在数 c，使得

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|<c\quad(n=2,3,\cdots),$$

则称数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 有**有界变差**.

证明：凡有有界变差的数列是收敛的. 举出一个收敛数列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|\ (n=2,3,\cdots)$，则数列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界，所以，它是收敛的.

根据柯西收敛准则，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在数 N，使当 $m>n>N$ 时，$|y_m-y_n|<\varepsilon$，即

$$|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon.$$

而对于数列$\{x_n\}$有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&=|x_m-x_{m-1}+x_{m-1}-x_{m-2}+\cdots+x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon,\end{aligned}$$

所以，数列$\{x_n\}$是收敛的.

数列：$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},(-1)\frac{1}{n},\cdots$，它是以零为极限的收敛数列.但它不是有有界变差的.事实上，

$$\begin{aligned}&|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|\\&>|x_2-x_1|+|x_4-x_3|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|\\&=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

而数列$\omega_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$是发散的*)，又是递增的，故$\omega_n\to+\infty$.于是，

$$|x_2-x_1|+|x_3-x_2|+\cdots+|x_{2n}-x_{2n-1}|$$

不是有界的，因而，收敛数列$\{x_n\}$：$1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots$无有界变差.

*) 详见88题的证明.

【88】 利用柯西准则，证明：数列$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$的发散性.

提示 取$m=2n$.

证 取$m=2n$，则

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2},$$

所以，数列$\{x_n\}$发散.

【89】 证明：若数列$x_n(n=1,2,\cdots)$收敛，则它的任何子数列x_{p_n}也收敛，且有同一极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$.

今因正整数列$\{p_k\}$以$+\infty$为其极限，所以，对于N，存在正整数k_0，使当$k>k_0$时，$p_k>N$，此时$|x_{p_k}-a|<\varepsilon(k>k_0)$，所以，子数列$\left\{x_{p_k}\right\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【90】 证明：若单调数列的某一子数列收敛，则此单调数列本身是收敛的.

证 不失一般性，假设数列$\{x_n\}$单调增加，其一子数列$\left\{x_{p_n}\right\}$收敛于a.则对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数N，使当$k>N$时，$|x_{p_k}-a|<\varepsilon$，令$N'=p_{N+1}$.设$n>N'$，由于$p_1<p_2<p_3<\cdots\to+\infty$，故必有$p_k(k>N)$使$p_k\leqslant n<p_{k+1}$.由上知

$$|x_{p_k}-a|<\varepsilon,\quad |x_{p_{k+1}}-a|<\varepsilon.$$

而$x_{p_k}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{k+1}}$（因$x_n$递增），故必$|x_n-a|<\varepsilon$.由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即$\{x_n\}$是收敛的.

【91】 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

提示 利用极限定义及$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$.

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$.

又因$\big||x_n|-|a|\big|\leqslant|x_n-a|$，故当$n>N$时，$\big||x_n|-|a|\big|<\varepsilon$，于是，$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$.

【92】 设$x_n\to a$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$是什么？

解 按题意，应设$x_n\neq0(n=1,2,\cdots)$.

若 $a\neq 0$，则显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\frac{a}{a}=1$.

若 $a=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在，例如，若 $\{x_n\}$ 为：

$$1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots$$

则 $x_n\to 0$，但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}}\to 1$，$\frac{x_{2m+1}}{x_{2m}}\to\frac{1}{2}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在．下面我们证明，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，设为 b，则必有 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

用反证法．若 $|b|>1$．取 r，使 $|b|>r>1$．利用 91 题结果，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}=|b|$．于是，存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|}>r$．从而，当 $n>N$ 时，

$$|x_n|=|x_N|\cdot\left|\frac{x_{N+1}}{x_N}\right|\cdot\left|\frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\right|\cdots\left|\frac{x_n}{x_{n-1}}\right|>|x_N|\cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，此与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾，故必有 $-1\leqslant b\leqslant 1$.

总结起来，若 $a\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1$；若 $a=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在，当存在时，它必属于 $[-1,1]$.

求以下各数列的聚点：

【121】 试举出以已知数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 作为聚点的数列的例子．

解 数列

$$a_1-\frac{1}{2},\ a_2-\frac{1}{2},\ \cdots,\ a_p-\frac{1}{2},\ a_1-\frac{1}{3},\ a_2-\frac{1}{3},\ \cdots,\ a_p-\frac{1}{3},\ \cdots,\ a_1-\frac{1}{n},\ a_2-\frac{1}{n},\ \cdots,a_p-\frac{1}{n},\ \cdots$$

显然以 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为聚点．

【122】 试举出数列的例子，对此数列而言，已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的所有各项皆为其聚点，所举数列还必有怎样的聚点？

解 例如，数列

$$a_1+\frac{1}{2},\ a_2+\frac{1}{2},\ a_1+\frac{1}{3},\ a_2+\frac{1}{3},\ a_3+\frac{1}{3},a_1+\frac{1}{4},\ a_2+\frac{1}{4},\ a_3+\frac{1}{4},\ a_4+\frac{1}{4},\ \cdots,$$
$$a_1+\frac{1}{n},\ a_2+\frac{1}{n},\ a_3+\frac{1}{n},\ \cdots,\ a_n+\frac{1}{n},\ \cdots$$

就以 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$ 为其聚点．

此外，很明显，若 $\{x_n\}$ 为一数列，使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点，则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点．

【123】 举出数列的例子：

(2)有唯一有限的聚点，但不收敛；

(4)以每一实数作为聚点．

解 (2)数列：

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -2,\ \frac{1}{3},\ -3,\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ -n,\ \cdots$$

有唯一有限的聚点 0，但此数列却不收敛．

(4)我们按下述"对角线法则"来构造一个数列，使每一元素后面跟一个对应的负数，排列顺次如图 123.

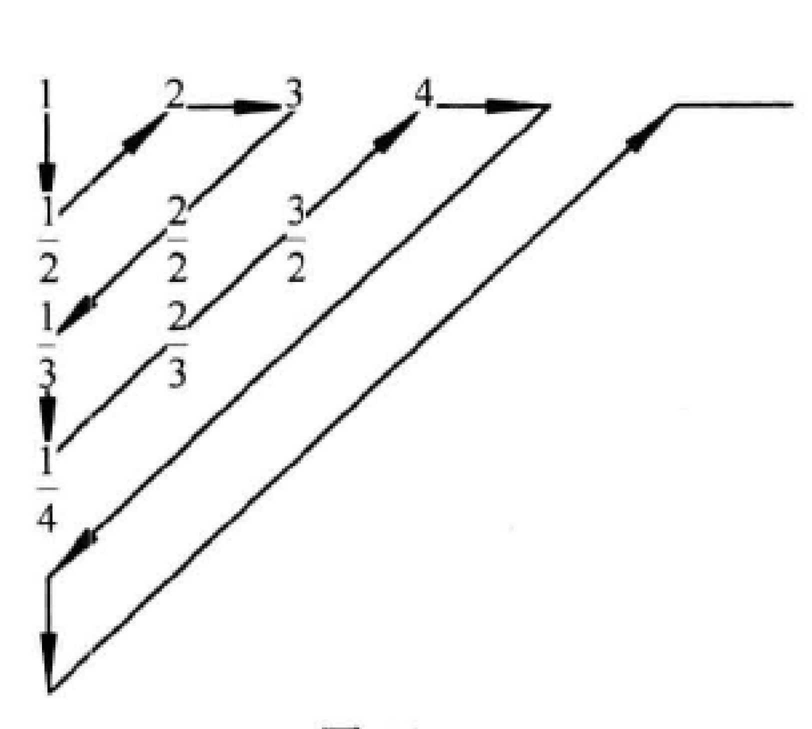


图 123

$x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=\frac{1}{2}$，$x_4=-\frac{1}{2}$，$x_5=2$，$x_6=-2$，

$x_7=3$，$x_8=-3$，$x_9=\frac{2}{2}$，$x_{10}=-\frac{2}{2}$，$x_{11}=\frac{1}{3}$，$x_{12}=-\frac{1}{3}$，

$\cdots$.

此数列以每一实数作为其聚点，即聚点的集合为$(-\infty,+\infty)$.

【125】 证明：从有界的数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$中，永远可选出收敛的子数列 $x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$.

证明思路 可设 $a\leqslant x_n\leqslant b$. 将区间$[a,b]$二等分，其中必至少有一个子区间包含$\{x_n\}$的无限多项，记为$[a_1,b_1]$. 再将区间$[a_1,b_1]$二等分，又可得区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，它包含$\{x_n\}$的无穷多项，依次类推，得

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

每一$[a_n,b_n]$均包含$\{x_n\}$的无限多项，且 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to0\ (n\to\infty)$，由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$.

按下法选$\{x_n\}$的一个子序列$\left\{x_{p_n}\right\}$：先在包含于$[a_1,b_1]$内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1}. 然后，在包含于$[a_2,b_2]$内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2}，余类推，可得$\{x_n\}$的一个子序列$\left\{x_{p_k}\right\}$，满足

$$a_k\leqslant x_{p_k}\leqslant b_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此可得$\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=c$. 即$\{x_{p_k}\}$为$\{x_n\}$的一个收敛子数列.

证 因为数列$\{x_n\}$有界，故可设一切项满足不等式

$$a\leqslant x_n\leqslant b,$$

其中 a,b 为有限的实数，将区间$[a,b]$二等分之，得区间$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，其中必至少有一个包含所给数列的无限多项，将它记为$[a_1,b_1]$（若两者均含无穷多项，则任取其一作为$[a_1,b_1]$）. 再将区间$[a_1,b_1]$等分之，又可得区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，它包含所给数列的无限多项. 依次类推，于是得一串区间：

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中每一$[a_n,b_n]$都包含所给数列$\{x_n\}$中的无限多项，且有

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to0\quad(n\to\infty),$$

因此，根据区间套定理诸$[a_n,b_n]$具有唯一的公共点 c，且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=c.$$

现按下法选出$\{x_n\}$的一个子数列$\left\{x_{p_k}\right\}$：在包含于$[a_1,b_1]$内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1}. 然后，在包含于$[a_2,b_2]$内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2}，然后，又在包含于$[a_3,b_3]$内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3}. 余类推（这是可能的，因为每个$[a_k,b_k]$中都包含有 x_n 无穷多项）. 于是，我们得出$\{x_n\}$的一个子数列$\left\{x_{p_k}\right\}$，满足

$$a_k\leqslant x_{p_k}\leqslant b_k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此，知$|x_{p_k}-c|\leqslant b_k-a_k(k=1,2,\cdots)$，故$\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=c$. 从而，$\{x_{p_k}\}$是$\{x_n\}$的一个收敛子数列.

证毕.

【126】 证明：若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$无界，则存在子数列 $x_{p_n}(n=1,2,\cdots)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}x_{p_n}=\infty$.

证 因 $x_n(n=1,2,\cdots)$无界，故存在某项 x_{p_1} 满足$|x_{p_1}|>1$. 由于数列 $x_n(n=p_1+1,p_1+2,\cdots)$也无界，故又存在某项 $x_{p_2}(p_2>p_1)$，使$|x_{p_2}|>2$；又由于数列 $x_n(n=p_2+1,p_2+2,\cdots)$无界，故又存在某项 x_{p_3} $(p_3>p_2)$，使$|x_{p_3}|>3$. 余类推. 于是，我们得$\{x_n\}$的一个子数列$\left\{x_{p_k}\right\}$，满足

$$|x_{p_k}|>k\quad(k=1,2,\cdots).$$

由此可知$\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=\infty$. 证毕.

【131】 证明：

(1) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$； (2) $\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

证明思路 (1)先证右端不等式. 存在$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k}\to\alpha=\varliminf_{n\to\infty} x_n$. 对于数列$\{y_{n_k}\}$，必有子数列$y_{n_{k_i}}$使$y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$，故$\alpha+\beta$为$\{x_n+y_n\}$的一个聚点. 由此有$\alpha+\beta\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)$及$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

再证左端不等式. 存在$\{x_n+y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$使$x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta',$$

故$\alpha'-\beta'$为$\{y_n\}$的一个聚点. 由此有

$$\alpha'-\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty} y_n \quad 及 \quad \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\varliminf_{n\to\infty} y_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n.$$

(2)同(1)的思路.

证 (1)先证右端不等式. 根据定义，存在$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$使$x_{n_k}\to\alpha=\varliminf_{n\to\infty} x_n$. 对于数列$\{y_{n_k}\}$，必有子数列$y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k}$. 显然$\varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to\alpha+\beta$，故$\alpha+\beta$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点. 由此可知

$$\alpha+\beta\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n).$$

故得

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

再证左端的不等式，根据定义，存在$\{x_n+y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$使$x_{n_k}+y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于数列$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}$，显然$\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to\alpha'-\beta'.$$

故$\alpha'-\beta'$是$\{y_n\}$的一个聚点. 从而，$\alpha'-\beta'\geqslant\varliminf_{n\to\infty} y_n$，由此可知$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\alpha'\geqslant\beta'+\varliminf_{n\to\infty} y_n\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n$.

(2)先证右端不等式. 根据定义，存在$\{x_n+y_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}+y_{n_k}\}$，使$x_{n_k}+y_{n_k}\to r=\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)$. 对于数列$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$x_{n_{k_i}}\to\tau=\varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k}$. 显然$\varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}})-x_{n_{k_i}}\to r-\tau,$$

故$r-\tau$是$\{y_n\}$的一个聚点. 从而，$r-\tau\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 由此可知$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=r\leqslant\tau+\varlimsup_{n\to\infty} y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

再证左端的不等式. 根据定义，存在$\{y_n\}$的一个子数列$\{y_{n_k}\}$，使$y_{n_k}\to r'=\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 对于数列$\{x_{n_k}\}$，存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$使$x_{n_{k_i}}\to\tau'=\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}$. 显然$\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n$. 由于

$$x_{n_{k_i}}+y_{n_{k_i}}\to r'+\tau',$$

故$r'+\tau'$是$\{x_n+y_n\}$的一个聚点. 从而，

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'.$$

由此可知$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant r'+\tau'\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 证毕.

以下举严格不等号成立的例子. 例如，令

$\{x_n\}$为:1,0,1,0,1,0,…　$\{y_n\}$为:0,2,0,2,0,2,….

则有不等式

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n=0<\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=1<\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n=2.$$

而对于数列

$\{x_n\}$为：0, 2, 0, 2, 0, 2, …　$\{y_n\}$为：1, 0, 1, 0, 1, 0, …,

则有$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n=1<\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=2<\varlimsup_{n\to\infty} x_n+\varlimsup_{n\to\infty} y_n=3.$

【132】 设 $x_n\geqslant 0$ 和 $y_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$. 证明:

(1) $\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n$, 　及

(2) $\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty} y_n$.

举出在这些关系式中严格不等号成立的例子.

证 (1)先证右端的不等式.根据定义,存在$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$,使$x_{n_k}\to\alpha=\varliminf_{n\to\infty} x_n\geqslant 0$;对于数列$\{y_{n_k}\}$,存在子数列$\{y_{n_{k_i}}\}$,使$y_{n_{k_i}}\to\beta=\varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k}\geqslant 0$. 显然$\varlimsup_{k\to\infty} y_{n_k}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty} y_n$. 由于$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\alpha\beta$,故$\alpha\beta$是数列$\{x_ny_n\}$的一个聚点.因此,

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta,$$

由此,再注意到$\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0$,即得知

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant\alpha\beta\leqslant\alpha(\varlimsup_{n\to\infty} y_n)=(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty} y_n).$$

再证左端的不等式.若$\varliminf_{n\to\infty} x_n=0$,则此不等式显然成立,故设$\varliminf_{n\to\infty} x_n=\beta^*>0$. 于是,存在正整数$N_0$,使当$n>N_0$时,$x_n>0$. 根据定义,存在$\{x_n\,y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\,y_{n_k}\}$,使

$$x_{n_k}\,y_{n_k}\to\alpha'=\varliminf_{n\to\infty}(x_n\,y_n)\geqslant 0.$$

对于数列$\{x_{n_k}\}$,存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\beta'=\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

注意到$\beta'=\varliminf_{k\to\infty} x_{n_k}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} x_n=\beta^*>0$以及$x_n>0(n>N_0)$,知

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}\,y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\alpha'}{\beta'},$$

故$\frac{\alpha'}{\beta'}$是$\{y_n\}$的一个聚点.从而,

$$\frac{\alpha'}{\beta'}\geqslant\varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

由此可知$\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\alpha'\geqslant\beta'(\varliminf_{n\to\infty} y_n)\geqslant(\varliminf_{n\to\infty} x_n)\cdot(\varliminf_{n\to\infty} y_n)$.

(2)先证右端不等式,可设$\{y_n\}$有界(若$\{y_n\}$无界,则$\varlimsup_{n\to\infty} y_n=+\infty$,从而此不等式显然成立).根据定义,存在$\{x_n\,y_n\}$的子数列$\{x_{n_k}y_{n_k}\}$,使

$$x_{n_k}y_{n_k}\to\bar{\alpha}=\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\geqslant 0.$$

对于$\{x_{n_k}\}$,存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\bar{\beta}=\varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k}\geqslant 0.$$

若$\bar{\beta}=0$,则由于$\{y_n\}$有界,知$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to 0$,从而$\bar{\alpha}=0$,此时所要证的不等式显然成立,故下设$\bar{\beta}>0$. 于是,当$i$充分大时$(i>i_0)$,$x_{n_{k_i}}>0$,故得

$$y_{n_{k_i}}=(x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}})\cdot\frac{1}{x_{n_{k_i}}}\to\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}.$$

因此,$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$是$\{y_n\}$的一个聚点,从而,$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;由此可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=\bar{\alpha}\leqslant\bar{\beta}(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)\leqslant(\varlimsup_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义,存在$\{y_n\}$的一子数列$\{y_{n_k}\}$,使$y_{n_k}\to r=\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\geqslant0$,对于$\{x_{n_k}\}$,存在子数列$\{x_{n_{k_i}}\}$,使

$$x_{n_{k_i}}\to\tau=\varliminf_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant0.$$

显然$\varliminf\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant0$. 由于

$$x_{n_{k_i}}y_{n_{k_i}}\to\tau r,$$

故τr是$\{x_ny_n\}$的一个聚点. 从而,

$$\tau r\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n),$$

由此可知$(\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n)\leqslant\tau r\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)$. 证毕.

下面举严格不等号成立的例子. 例如,令

$$\{x_n\}为:\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots\qquad\{y_n\}为:2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots$$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varliminf_{n\to\infty}y_n)=\frac{1}{8}<\varliminf_{n\to\infty}(x_ny_n)=\frac{1}{2}<(\varliminf_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)=1.$$

再令

$$\{x_n\}为:2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},2,\frac{1}{4},\cdots\qquad\{y_n\}为:\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$$

则有不等式

$$(\varliminf_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)=\frac{1}{2}<\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=1<(\varlimsup_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)=4.$$

【133】 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则对于任何数列$y_n(n=1,2,\cdots)$,有:

(1)$\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$;

(2)$\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n\quad(x_n\geqslant0)$.

证 (1)由于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$,从而,利用131题的结果可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n=\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n),$$

故得

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n.$$

(2)分三种情形:(ⅰ)设$y_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$. 则利用132题的结果可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)\leqslant(\varlimsup_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)=(\varliminf_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n),$$

故得

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_ny_n)=(\lim_{n\to\infty}x_n)\cdot(\varlimsup_{n\to\infty}y_n).$$

(ⅱ)设$y_n\leqslant0(n=1,2,\cdots)$. 则$-y_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$,于是,仍利用132题的结果可知

$$\varliminf_{n\to\infty}(-x_ny_n)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(-y_n)\cdot\varlimsup_{n\to\infty}x_n=\varliminf_{n\to\infty}(-y_n)\cdot\lim_{n\to\infty}x_n=\varliminf_{n\to\infty}(-y_n)\cdot\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant\varliminf_{n\to\infty}(-x_ny_n),$$

故得

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义，显然有等式

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-x_ny_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n),\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

由此可知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

（ⅲ）设$\{y_n\}$中有无穷多项是非负的，设这些项构成的子数列为$\{y_{n_k}\}$（$y_{n_k}\geqslant 0$，$k=1,2,\cdots$）（如果$\{y_n\}$中只有有限项是非负的，则从某一项开始有$y_n<0$，这时应用（ⅱ）的结果即知所要证的等式成立）. 于是，注意到$x_n\geqslant 0$，显然有（利用（ⅰ）已证的结果）

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim_{k\to\infty}}(x_{n_k}y_{n_k})=\lim_{k\to\infty}x_{n_k}\cdot\overline{\lim_{k\to\infty}}y_{n_k}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n$$

证毕.

【134】 证明：若对于某非负*）数列x_n（$x_n\geqslant 0$，$n=1,2,\cdots$），无论数列y_n（$n=1,2,\cdots$）怎样选取，以下两个等式中至少有一个成立：

(1)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，　(2)$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$，

则数列x_n是收敛的.

证 取$\{x_n\}$的子数列$\{x_{n_k}\}$，使$x_{n_k}\to\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$. 取

$$y_n=\begin{cases}-x_n, & n\neq n_k,\\ A, & n=n_k,\end{cases}\quad (k=1,2,\cdots),$$

其中A为任取的正常数，对此$\{y_n\}$若(1)成立，则由（注意到$x_n\geqslant 0$）

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=(\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n)+A,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=A,$$

知$(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n)+A=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n)+A$，由此可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，故$\{x_n\}$收敛.

若(2)成立，则由（同样，注意到$x_n\geqslant 0$）

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=A\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

知$A\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=A\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，由此可知$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$，故$\{x_n\}$也是收敛的. 证毕.

*） 作者注：原著中将$x_n\geqslant 0$的假定加在条件(2)后，似不妥，因为数列x_n应该是预先给定的.

【136】 证明：若数列x_n（$n=1,2,\cdots$）有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，则此数列的聚点充满于下极限和上极限

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\quad 和\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

之间，即间隔$[l,L]$中的任意一个数都是该数列的聚点.

证 根据定义，l与L都是$\{x_n\}$的聚点，故我们只要证明l与L之间的任何数a（$l<a<L$）都是$\{x_n\}$的聚点. 先证：对于任意给定的$\varepsilon>0$及任意给定的正整数N，必有正整数$n^*>N$存在，使$|x_{n^*}-a|<\varepsilon$.

由假定，必有正整数N'存在，使当$n>N'$时，恒有$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$. 令$N_0=\max\{N,N'\}$，则于数列$x_n$（$n=N_0+1,N_0+2,\cdots$）中必至少有两项$x_{n'}$和$x_{n''}$存在，使$x_{n'}<a$，$x_{n''}>a$（因为否则的话，例如，无小于$a$的项，则必$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\geqslant a$，此与$l<a$矛盾），不妨设$n'<n''$，令满足$n'\leqslant n\leqslant n''$且使$x_n<a$的正整数$n$中之最大者为$n^*$. 显然$n^*\leqslant n''-1$，且$x_{n^*}<a$，$x_{n^*+1}>a$. 故$n^*>N$，$n^*>N'$并且

$$|x_{n^*}-a|<x_{n^*+1}-x_{n^*}<\varepsilon.$$

现取$\varepsilon_1=1$，$N_1=1$，则存在x_{n_1}（$n_1>1$）使$\left|x_{n_1}-a\right|<1$；再取$\varepsilon_2=\frac{1}{2}$，$N_2=n_1$，则存在$x_{n_2}$（$n_2>n_1$）使$|x_{n_2}-a|<\frac{1}{2}$；又取$\varepsilon_3=\frac{1}{3}$，$N_3=n_2$，则存在$x_{n_3}$（$n_3>n_2$）使$|x_{n_3}-a|<\frac{1}{3}$；这样一直继续下去，则得$\{x_n\}$的一个子数列$\{x_{n_k}\}$，满足

$$|x_{n_k}-a|<\frac{1}{k}\quad(k=1,2,\cdots),$$

故 $x_{n_k}\to a$,即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点,证毕.

【138】 证明:若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 收敛,则算术平均值数列 $\zeta_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$ 也收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

逆命题不成立,举例说明.

证明思路 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$. 令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$,则

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

取 $N'>N$,使当 $n>N'$ 时,恒有 $\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon$, $\frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}$,可证 $\left|\frac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$. 反之不然,例如,$x_n=(-1)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

证 令 $s_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$,则

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}\left(1-\frac{N}{n}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,设收敛于 a,则对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$,即 x_{N+1},x_{N+2},…均$\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$. 由此推得 $\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}$ 也含在$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$之内,即

$$\frac{x_{N+1}+x_{N+2}+\cdots+x_n}{n-N}=a+\alpha,$$

式中 $|\alpha|<\varepsilon$.

这样,$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+(a+\alpha)\left(1-\frac{N}{n}\right)$. 由此得

$$\left|\frac{s_n}{n}-a\right|\leqslant\frac{|s_N|}{n}+|\alpha|+(|a|+|\alpha|)\frac{N}{n}.$$

今取 $N'>N$,使当 $n>N'$ 时,恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\varepsilon,\quad\frac{N}{n}<\frac{\varepsilon}{|a|+\varepsilon}.$$

于是,当 $n>N'$ 时,恒有 $\left|\frac{s_n}{n}-a\right|<3\varepsilon$.

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=a$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

反之不然,例如,数列 $x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$是发散的,但是数列

$$\zeta_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ -\frac{1}{n}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

却是收敛的.

【139】 证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

提示 同 138 题的思路.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,故对于任给的 $M>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,$x_n>3M$,此时,仿 138 题的证明,有

$$\frac{s_n}{n}=\frac{s_N}{n}+\frac{s_n-s_N}{n-N}(1-\frac{N}{n})>\frac{s_N}{n}+3M(1-\frac{N}{n}).$$

又因$\frac{s_N}{n}\to 0$，$1-\frac{N}{n}\to 1(n\to\infty)$，故可取正整数 $N'>N$，使当$n>N'$时，恒有

$$\frac{|s_N|}{n}<\frac{M}{2},\quad 1-\frac{N}{n}>\frac{1}{2}.$$

于是，当 $n>N'$ 时恒有$\frac{s_n}{n}>M$. 由此可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$.

【140】 证明：若数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$收敛且 $x_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证明思路 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 及 $x_n>0$，故 $a\geqslant 0$. 当 $a>0$ 时，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$，利用 138 题的结果. 当 $a=0$ 时，则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$，利用 139 题的结果.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，故 $a\geqslant 0$. 先设$a>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln a$，于是，利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln a.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)}=e^{\ln a}=a=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

若 $a=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(-\ln x_n)=+\infty$. 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)=+\infty,$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1-\ln x_2-\cdots-\ln x_n)}=0=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证毕.

【141】 证明：若 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

证明思路 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$，则 $y_n>0$. 且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，设为 a. 注意到 $x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}$，并利用 63 题及 140 题的结果.

证 令 $y_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}(n=1,2,\cdots)$，则 $y_n>0$. 由假定$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在，设为 a. 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n\to\infty}(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}=a.$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1}\,\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1}\left[(y_1y_2\cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}=1^{*)}\cdot a=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

*) 利用 63 题的结果.

【143】 证明施托尔茨定理：若

(1)$y_{n+1}>y_n\quad(n=1,2,\cdots)$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

证明思路 设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 则对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2})$内，注意到$y_{m+1}>y_m(m=1,2,\cdots)$，得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

$$\vdots$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n),$$

相加，即得$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 再注意到

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_n})\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right).$$

取$N'>N$，使当$n>N'$时，恒有$\frac{|x_{N+1}-ay_{N+1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2}$，则可知当$n>N'$时，恒有$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$.

证 假定$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$. 由此，并注意到$y_n\to+\infty$，可知对于任给的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使当$n>N$时，恒有

$$\left|\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(\text{且 } y_n>0).$$

于是，分数（当$n>N$时）

$$\frac{x_{N+2}-x_{N+1}}{y_{N+2}-y_{N+1}},\frac{x_{N+3}-x_{N+2}}{y_{N+3}-y_{N+2}},\cdots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

都包含在$(a-\frac{\varepsilon}{2},a+\frac{\varepsilon}{2})$之内，因为$y_{n+1}>y_n$，所以，这些分数的分母都是正数，于是，得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1})<x_{N+2}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2}-y_{N+1}),$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2})<x_{N+3}-x_{N+2}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3}-y_{N+2}),$$

$$\vdots$$

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n)<x_{n+1}-x_n<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_n),$$

相加之，得

$$(a-\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1})<x_{n+1}-x_{N+1}<(a+\frac{\varepsilon}{2})(y_{n+1}-y_{N+1}),$$

即$a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}<a+\frac{\varepsilon}{2}$，所以，当$n>N$时，恒有$\left|\frac{x_{n+1}-x_{N+1}}{y_{n+1}-y_{N+1}}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 另外，我们有（当$n>N$时）

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}+(1-\frac{y_{N+1}}{y_n})\left(\frac{x_n-x_{N+1}}{y_n-y_{N+1}}-a\right),$$

故$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\leqslant\left|\frac{x_{N+1}-ay_{N+1}}{y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}$.

现取正整数$N'>N$，使当$n>N'$时，恒有

$$\frac{|x_{N+1}-ay_{N+1}|}{y_n}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是，当$n>N'$时，恒有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon.$$

由此可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. 证毕.

注 本题中，若将条件(3)换为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty$ (或$-\infty$)，则结论仍成立：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

详见Г. M. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章§2.

【144】 求：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}$ $(a>1)$.

提示 利用143题的结果.

解 (1)设 $x_n=n^2$，$y_n=a^n(a>1)$. 则 $y_{n+1}>y_n$，$y_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^2-n^2}{a^{n+1}-a^n}=\frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n=2n+1$，$y'_n=a^n$，则 $y'_{n+1}>y'_n$，$y'_n\to+\infty$，且有

$$\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\frac{2}{a^n(a-1)}\to0,$$

因而利用143题的结果得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{a^n}=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=0$.

继续利用143题的结果，得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0$.

注 143题的结果属于O. Stolz，当 $y_n=n$ 时，早已被A. L. Cauchy所证明，此结果常用于确定“$\frac{\infty}{\infty}$”型的不定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限，144题即是一例. 应用此结果，也可证明138题及139题的结果(此结果属于柯西Cauchy). 事实上，令

$$x'_n=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad y'_n=n,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_n}{y'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x'_{n+1}-x'_n}{y'_{n+1}-y'_n}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

【146】 证明：数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$收敛.

因此有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

式中 $C=0.577216\cdots$称为欧拉常数，且当 $n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to0$.

证明思路 利用75题(1)的结果：$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$，故 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$. 分别令 $n=1,2,\cdots,n$，将 n 个不等式相加，得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 又 $x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0$. 且 $x_n-x_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}>0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 C，其中 C 的近似值为 0.577216，即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n(\varepsilon_n\to0)$.

证 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ *)，故 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，令 $n=1,2,3,\cdots,n$，得出

$$\ln2-\ln1<1,\quad \ln3-\ln2<\frac{1}{2},\quad \ln4-\ln3<\frac{1}{3},\quad\cdots\quad \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n},$$

相加之，得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. 于是，

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)>\frac{1}{n+1}>0,$$

即 $\{x_n\}$ 是一个有下界的数列. 其次,

$$x_n-x_{n+1}=-\frac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1},$$

因为 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{**)}$,所以,$x_n-x_{n+1}>0$,这就是说,$\{x_n\}$ 又是一个单调下降的数列. 因而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,用 C 表示之,即

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$.

*)及 **)利用 75 题(1)的结果.

【150】 证明:由下列各式

$$x_1=a,\quad y_1=b,\quad x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 $y_n(n=1,2,\cdots)$ 有公共的极限

$$\mu(a,b)=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n \quad (\text{数 } a \text{ 和 } b \text{ 的算术几何平均值}).$$

证明思路 分两种情形:

(1) a 与 b 中至少有一个为零,例如,设 $a=0$. 则有 $x_n=0$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{2}=\cdots=\frac{b}{2^{n-1}}$.

(2) 设 $a\neq0$, $b\neq0$,则必有 $a>0$, $b>0$,不妨假定 $a\leqslant b$. 应用数学归纳法可得 $a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b$.

证 分两种情形:

(1) a 与 b 中至少有一个为零,例如,设 $a=0$. 则显然有 $x_n=0$ $(n=1,2,\cdots)$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{2}$,从而,递推得

$$y_n=\frac{b}{2^{n-1}}\quad (n=1,2,\cdots).$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

(2) 设 $a\neq0$, $b\neq0$,这时,必须 $a>0$, $b>0$. 否则,若 $ab<0$,则 $x_2=\sqrt{ab}$ 没有意义;若 $a<0$, $b<0$,则 $x_2=\sqrt{ab}>0$, $y_2=\frac{a+b}{2}<0$,从而 $x_3=\sqrt{x_2y_2}$ 没有意义. 因此,必须 $a>0$, $b>0$. 不妨假定 $a\leqslant b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项,并且都界于原来两数之间,故有

$$a\leqslant x_2\leqslant y_2\leqslant b,\quad \text{由此又有}\quad a\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant y_3\leqslant y_2\leqslant b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant y_n\leqslant b\quad (n=2,3,\cdots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列,$\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列,因此它们的极限都存在. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\beta$. 在等式 $y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$ 两端取极限,得 $\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}$,故 $\alpha=\beta$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证毕.

§3. 函数的概念

1° **函数的概念** 若对于集合 $X=\{x\}$ 中的每一个 x，有一个确定的实数 $y\in Y=\{y\}$ 与之对应，则变量 y 称为变量 x 在所给变化域 X 上的*单值函数*，并记为 $y=f(x)$.

集合 X 称为函数 $f(x)$ 的*定义域或存在域*；Y 称为这个函数的*值域*，在最简单的情形下，集合 X 或为开区间 (a,b)：$a<x<b$，或为半开区间 $(a,b]$：$a<x\leqslant b$ 或 $[a,b)$：$a\leqslant x<b$，或为闭区间（线段）$[a,b]$：$a\leqslant x\leqslant b$，其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$（在这种情形下，没有等号）.

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y=f(x)$ 与之对应，则 y 称为 x 的*多值函数*.

2° **反函数** 若把 x 了解为满足方程

$$f(x)=y$$

（式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一个固定数值）的任何数值，则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x=f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的*反函数*，这个函数一般说来是多值函数. 若函数 $y=f(x)$ 是严格单调的，即当 $x_2>x_1$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2)<f(x_1)$]，则反函数 $x=f^{-1}(y)$ 为单值而且严格单调的函数.

求下列函数的存在域：

【157】 $y=\log\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ 时，y 值确定，即只要

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi\quad(k=0,1,2,\cdots)\quad 及\quad -(2k+2)\pi<\frac{\pi}{x}<-(2k+1)\pi.$$

所以，存在域为满足不等式 $\dfrac{1}{2k+1}<x<\dfrac{1}{2k}$，$(k=0,1,2,\cdots)$ 及 $-\dfrac{1}{2k+1}<x<-\dfrac{1}{2k+2}$ 的数 x 的集合.

求下列函数的存在域和函数值域：

【167】 $y=\lg(1-2\cos x)$.

提示 由 $1-2\cos x>0$ 易得存在域 A. 注意，由 $\max\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=3$，$\inf\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=0$，即可求得函数值域.

解 当 $1-2\cos x>0$ 时，y 值确定. 解之，得存在域为满足不等式

$$2k\pi+\frac{\pi}{3}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{3}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

的数 x 的集合 A. 因为 $\max\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=1-(-2)=3$，$\inf\limits_{x\in A}(1-2\cos x)=0$，

所以，函数值域为满足不等式 $-\infty<y\leqslant\lg3$ 的数 y 的集合.

【173】 在等腰梯形 $ABCD$ 中（图 173－1），底 $AD=a$，$BC=b$ $(a>b)$，高 $HB=h$，引直线 $MN\parallel BH$，MN 与顶点 A 相距 $AM=x$，把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表示为变量 x 的函数. 作函数 $S=S(x)$ 的图像.

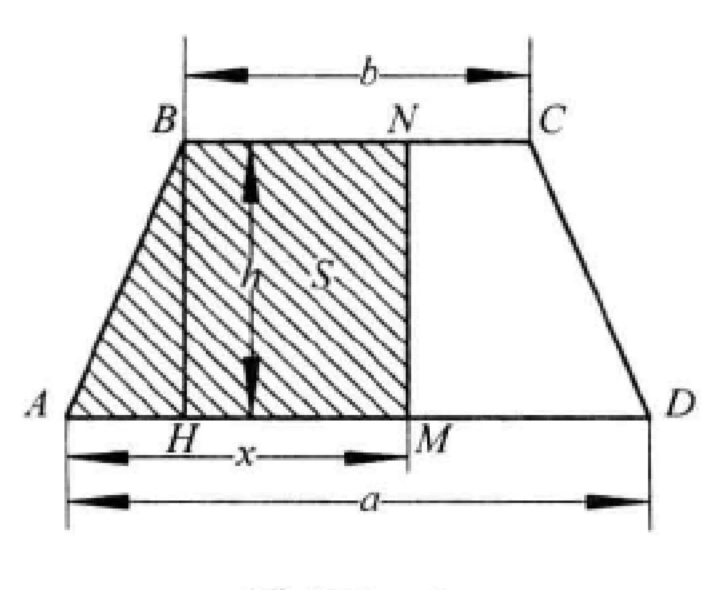


图 173－1

提示 分三种情况求解：

(1) $0\leqslant x\leqslant\dfrac{a-b}{2}$； (2) $\dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2}$； (3) $\dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$.

解 $AH=\dfrac{1}{2}(a-b)$，分三种情况讨论：

(1)当 $0\leqslant x\leqslant\frac{a-b}{2}$ 时,即 MN 线在$\triangle ABH$ 内,此时$\frac{MN}{h}=\frac{x}{\frac{a-b}{2}}$, $MN=\frac{2hx}{a-b}$.

于是,$S=\frac{1}{2}MN\cdot x=\frac{hx^2}{a-b}$,如图 173－2 中弧$\widehat{OA}$(系抛物线段).

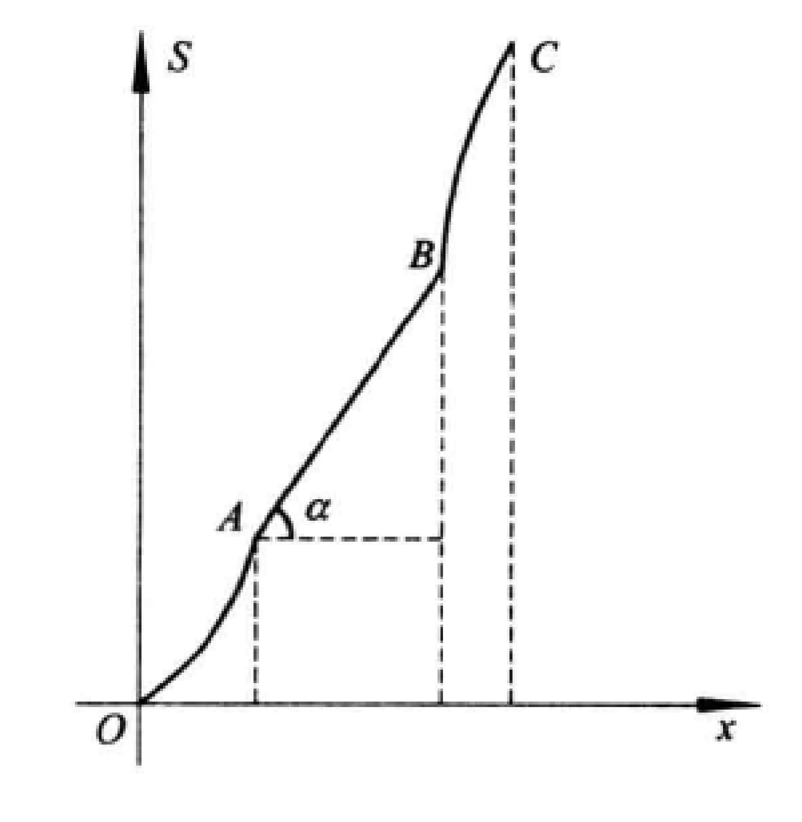


图 173－2

(2)当$\frac{a-b}{2}<x<\frac{a-b}{2}+b=\frac{a+b}{2}$时,面积

$$S=\frac{a-b}{2}\cdot\frac{h}{2}+h\left(x-\frac{a-b}{2}\right)=h\left(x-\frac{a-b}{4}\right),$$

如图 173－2 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB.

(3)当$\frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a$ 时,面积

$$S=\frac{h(a+b)}{2}-\frac{h}{a-b}\cdot(a-x)^2=h\left[\frac{a+b}{2}-\frac{(a-x)^2}{a-b}\right],$$

如图 173－2 中抛物线段$\widehat{BC}$.

图 173－2 中各点的位置如下:

$$A\left(\frac{a-b}{2},\frac{h(a-b)}{4}\right),\quad B\left(\frac{a+b}{2},\frac{h(a+3b)}{4}\right),\quad C\left(a,\frac{h(a+b)}{2}\right),$$

又 $\tan\alpha=h$.

【223】 设 $\varphi(x)$,$\psi(x)$及 $f(x)$为单调增函数.证明:若

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),\tag{1}$$

则

$$\varphi[\varphi(x)]\leqslant f[f(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].\tag{2}$$

提示 利用函数单调性的定义.

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点,则

$$\varphi(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant\psi(x_0).$$

由(1)以及函数 $f(x)$的单调增加性知

$$f[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)],\quad \varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[\varphi(x_0)];$$

从而,$\varphi[\varphi(x_0)]\leqslant f[f(x_0)]$.同理,可证 $f[f(x_0)]\leqslant\psi[\psi(x_0)]$,由 x_0 的任意性,于是,(2)式得证.

求反函数 $x=\varphi(y)$和它的存在域,若:

【229】 $y=\text{th}x$,式中 $\text{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{(e^x)^2-1}{(e^x)^2+1}$,即 $e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}$,两端再取对数,并注意到$\frac{1+y}{1-y}>0$ 即$-1<y<1$,于是,

$$x=\text{arth}y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y},\quad -1<y<1.$$

【233】 若存在数 $T>0$(函数的周期——在广义的意义上)使定义于集合 E 的函数 $f(x)$满足等式

$$f(x\pm T)=f(x)\quad(x\in E),$$

则函数 $f(x)$称为**周期函数**.

说明下列函数中哪些是周期函数,并求它们的最小周期:

(1)$f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;　　(2)$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

(3)$f(x)=2\tan\frac{x}{2}-3\tan\frac{x}{3}$;　　(4)$f(x)=\sin^2 x$;

(5)$f(x)=\sin x^2$;　　(6)$f(x)=\sqrt{\tan x}$;

(7) $f(x)=\tan\sqrt{x}$；　　　　(8) $f(x)=\sin x+\sin(x\sqrt{2})$.

提示　(5)用反证法. 设 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$.

解　对于(1)，由于

$$f\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)+B\sin\lambda\left(x+\frac{2\pi}{\lambda}\right)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x=f(x),$$

故为周期函数，最小周期为 $T=\frac{2\pi}{\lambda}$ $(\lambda>0)$. 同理可证：(2)、(3)、(4)和(6)也是周期函数，最小周期分别为 2π、6π、π 和 π. 对于(5)，若周期为 a，即 $\sin(x+a)^2=\sin x^2$. 令 $x=0$ 即得 $a=\pm\sqrt{m\pi}$（m 为某正整数），代入，又令 $x=\sqrt{2m\pi}$，易得 $\sin(2\sqrt{2}m\pi)=0$. 但 $2\sqrt{2}m$ 显然不是整数，得到矛盾. 于是，$\sin x^2$ 不是周期函数，同理，(7)和(8)也不是周期函数.

【234】　证明：对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证　设 l 为任一有理数，则当 x 为有理数时，$x+l$ 也为有理数. 若 x 为无理数，则 $x+l$ 也为无理数，所以，

$$\chi(x+l)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

即 $\chi(x+l)=\chi(x)$，l 为周期.

【236】　证明：若函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 满足等式 $f(x+T)=kf(x)$，式中 k 和 T 为正的常数，则 $f(x)=a^x\varphi(x)$，式中 a 为常数，而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数.

提示　利用周期函数的定义.

证　由假定 $k>0$，$T>0$，令 $a=k^{\frac{1}{T}}>0$，则 $a^T=k$. 于是有 $f(x+T)=a^Tf(x)$.

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下：$\varphi(x)=a^{-x}f(x)$. 易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上，

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=a^{-x}a^{-T}a^Tf(x)=a^{-x}f(x)=\varphi(x).$$

于是，$f(x)=a^x\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§4.　函数的图像表示法

1° 要作函数 $y=f(x)$ 的图像可按以下方式进行：(1)确定函数的存在域 $X=\{x\}$；(2)从 X 中选出充分密集的自变量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与相应函数值组成对应数值表

$$y_i=f(x_i)\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

(3)在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 并用线把它们连接起来，连线时应考虑中间各点的位置对曲线形状的影响.

2° 为了得到函数的正确图像，应当研究这个函数的一般性质.

首先必须：(1)解方程 $f(x)=0$，求出函数图像与 Ox 轴的交点（函数的零点）；(2)确定函数为正或为负时自变量的变化域；(3)若有可能，说明函数单调（增或减）区间；(4)研究当自变量无限趋于函数存在域边界点时函数的情况.

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质，如幂函数、指数函数、三角函数等.

利用这些性质，不用作大量的计算工作，立即可以画出许多函数的草图，其他的图像有时就是这些最简单图像的组合（和或乘积等等）.

作出下列高于二次的有理函数的图像：

【247】　$y=x^2-x^4$.

解 $y=x^2(1-x)(1+x)=\frac{1}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$.

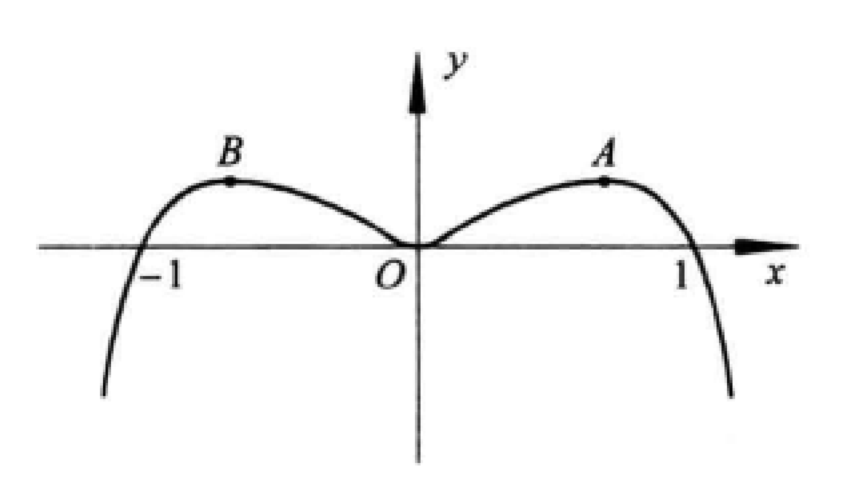


图 247

图像关于 Oy 轴对称，与两坐标轴的交点为$(-1, 0)$，$(1, 0)$，$(0, 0)$，且在$(0, 0)$点与 Ox 轴相切.

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$时，$y=\frac{1}{4}$，此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$及 $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{4}\right)$均为图像上的最高点.

当 $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$时，曲线上升；当$\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$时，曲线下降. 如图 247 所示.

作出下列分式线性函数的图像(双曲线)：

【251】 把分式线性函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0).$$

化为以下形式 $y=y_0+\frac{m}{x-x_0}$. 再作它的图像. 研究例子 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$.

解 $y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\frac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0}$，其中 $x_0=-\frac{d}{c}$，$y_0=\frac{a}{c}$，$m=\frac{bc-ad}{c^2}$，如图 251－1 所示.

对于 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$，有 $x_0=y_0=\frac{3}{2}$，如图 251－2 所示.

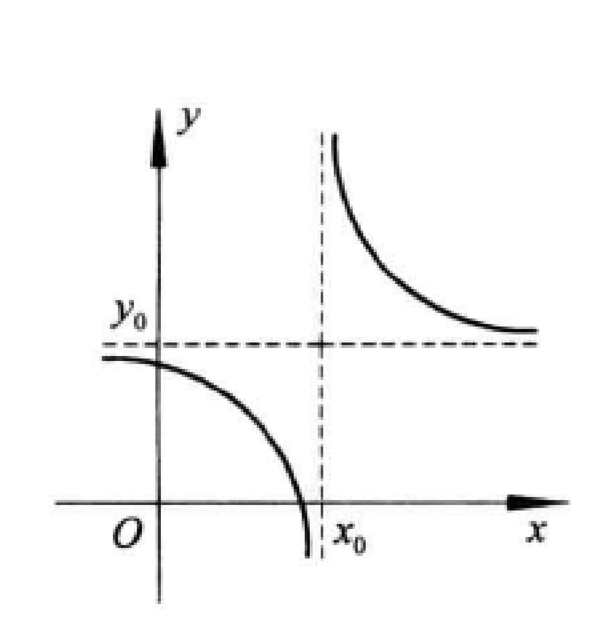


图 251－1

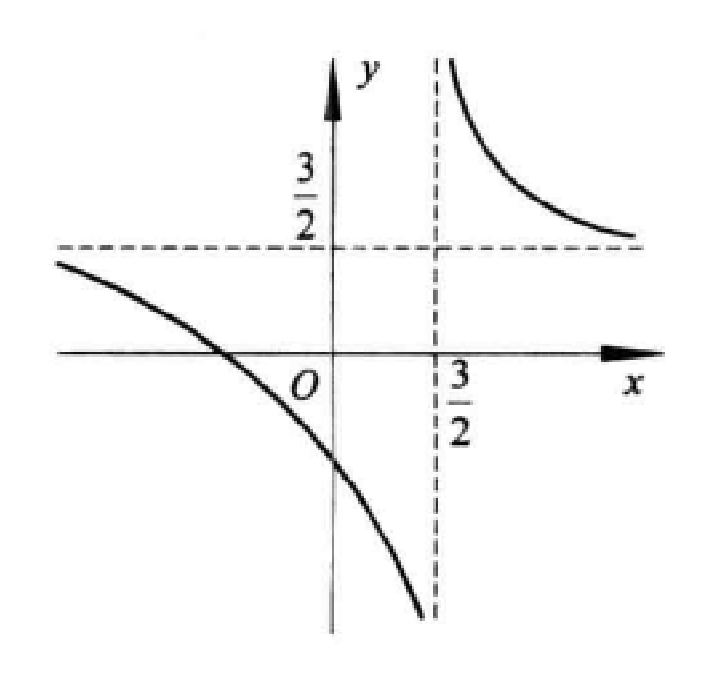


图 251－2

作出下列有理分式函数的图像：

【260】 $y=\frac{1}{1+x}-\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}$.

解 将 $y=\frac{1}{1+x}$，$y=-\frac{2}{x}$及 $y=\frac{1}{1-x}$的图像叠加即得，渐近线：$x=-1$，$x=0$，$x=1$ 及 $y=0$，如图 260 所示.

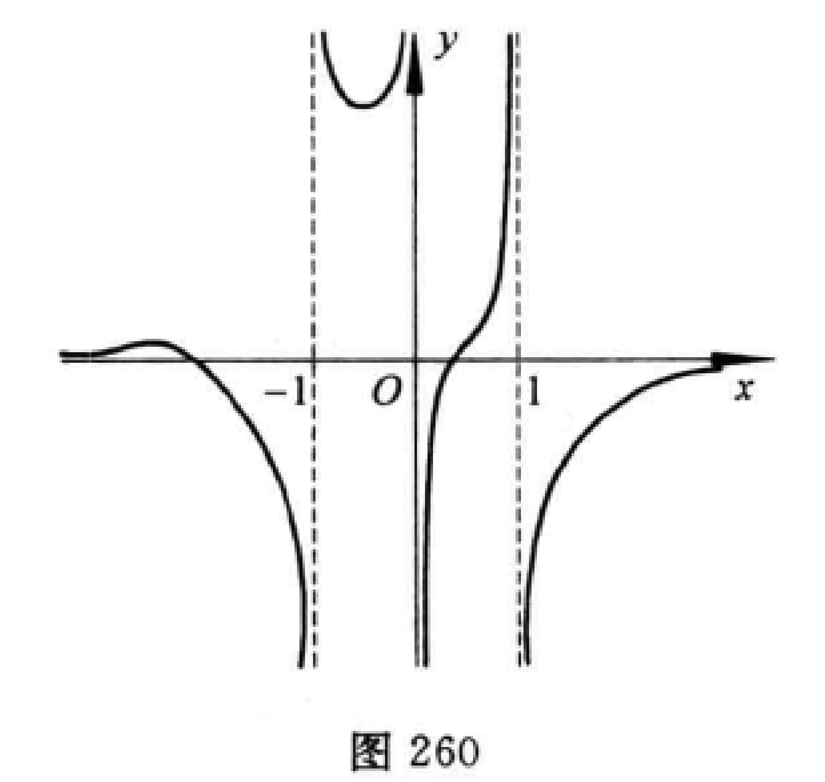


图 260

【263】 把函数 $y=\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\quad(a_1\neq 0)$

化为以下形式 $y=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$，

然后作出它的草图. 研究例子 $y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$.

解 $y=\frac{a}{a_1}x+\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}+\frac{\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)}{x-\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$

$=kx+m+\frac{n}{x-x_0}$

其中 $k=\frac{a}{a_1}$，$m=\frac{a_1b-ab_1}{a_1^2}$，$x_0=-\frac{b_1}{a_1}$，$n=\frac{c}{a_1}-\frac{b_1}{a_1^3}(a_1b-ab_1)$.

如图 263－1 中黑粗线所示.

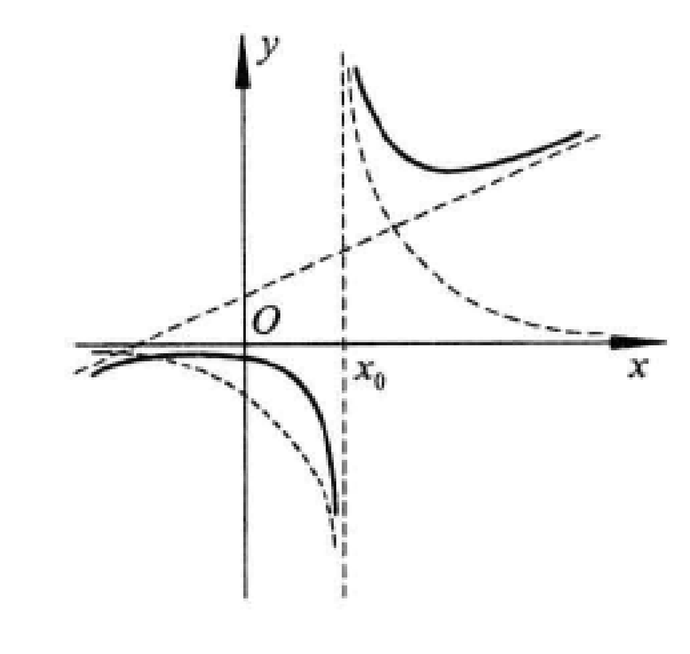


图 263－1

对于

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}=x-5+\frac{8}{x+1},$$

如图 263－2 中黑粗线所示.

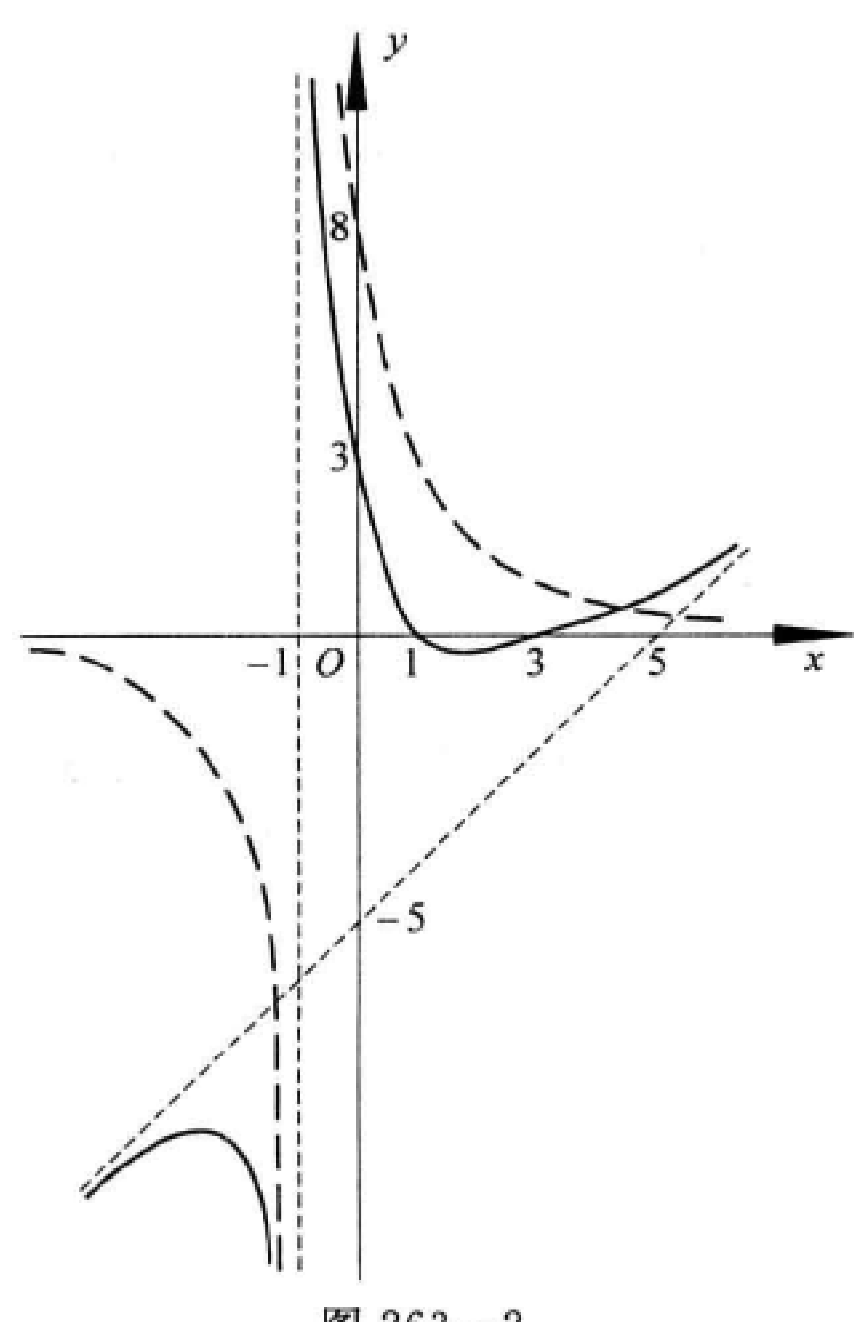


图 263－2

作出下列无理函数的图像：

【270】 $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

提示 注意 $x=-1+\frac{2}{1+y^2}$，渐近线为 $x=-1$. 利用图像相加法即得所需图像($-1<x\leqslant1$).

解 $y^2=\frac{1-x}{1+x}$，$x=-1+\frac{2}{1+y^2}$，

将 $x=-1$ 及 $x=\frac{2}{1+y^2}$ 的图像叠加即得，如图 270 所示($-1<x\leqslant1$).

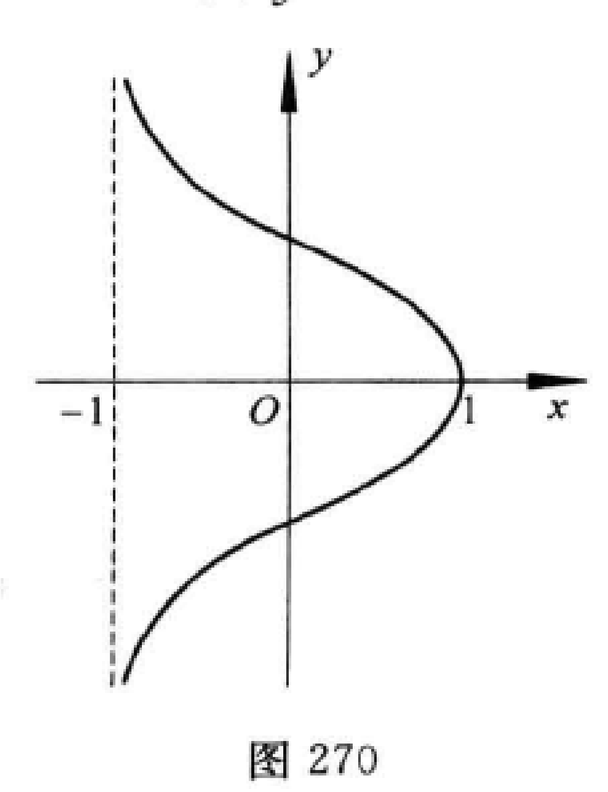


图 270

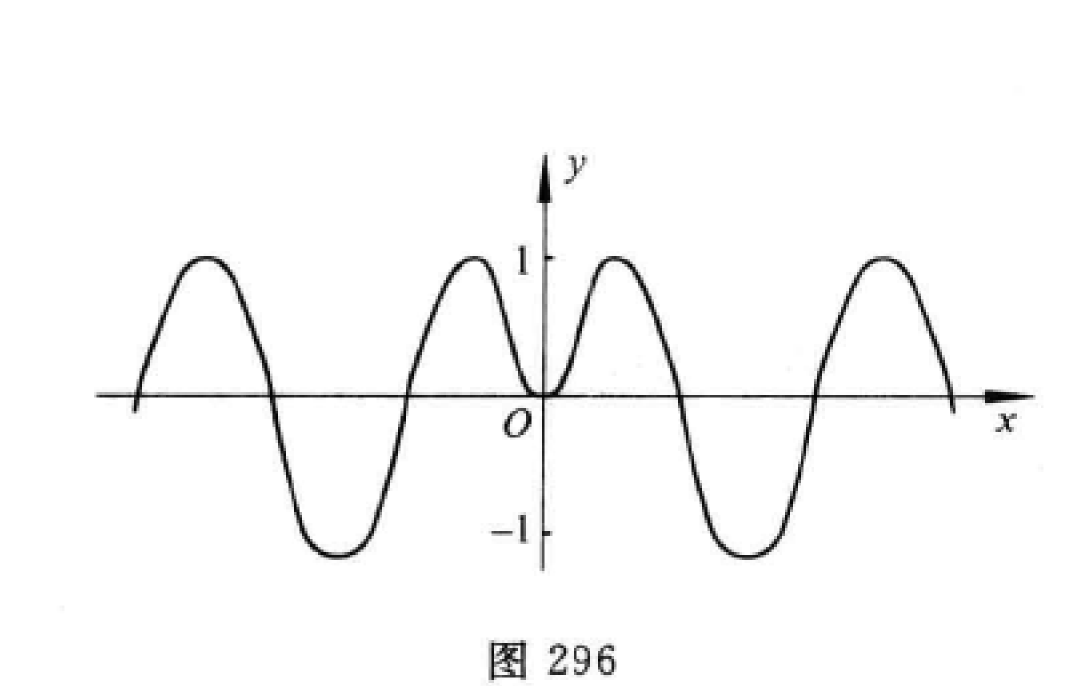


图 296

作出下列三角函数的图像：

【296】 $y=\sin x\sin 3x$.

解 $y=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)$. 图像关于 Oy 轴对称. 周期为 π. 将 $y=\frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y=-\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图像叠加即得. 如图 296 所示.

作出下列函数的图像：

【298】 $y=\sin x^2$.

解题思路 图像关于 Oy 轴对称. $f(\sqrt{n\pi})=0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$. 由于 $\sin x^2<x^2$，故曲线位于抛物线 $y=x^2$ 的下方.

解 图像关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi})=f(\sqrt{2\pi})=\cdots=f(\sqrt{n\pi})=0.$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0$，所以，曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的数列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2<x^2$，我们知道这条曲线位于抛物线 $y=x^2$ 的下方. 如图 298 所示.

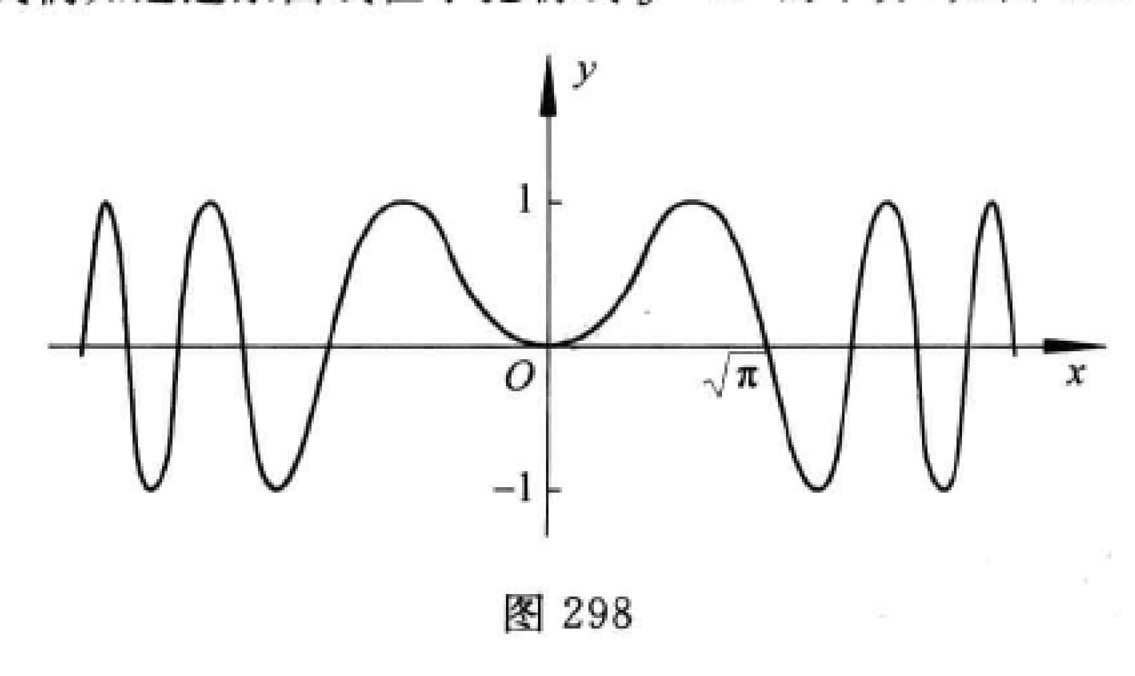


图 298

【299】 $y=\sin\dfrac{1}{x}$.

解题思路 $-1\leqslant y\leqslant 1$. $y=0$ 为渐近线. 图像关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于原点 O.

解 $-1\leqslant y\leqslant 1$. $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$，$y=0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\dfrac{2}{\pi}$ 时，则 $\dfrac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\dfrac{\pi}{2}$，而 y 由 0 增到 1；但当 x 由 $\dfrac{2}{\pi}$ 减小到 $\dfrac{2}{3\pi}$，则 $\dfrac{1}{x}$ 由 $\dfrac{\pi}{2}$ 增大到 $\dfrac{3\pi}{2}$，而 y 由 1 减小到 -1. 当 $x=\dfrac{1}{\pi}$ 时，$y=0$ 等. 因为 y 是奇函数，故图像关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时，函数在 -1 与 1 之间摆动，并且凝聚于 O 点，而在点 $x=0$ 处，函数 y 没有定义. 如图 299 所示.

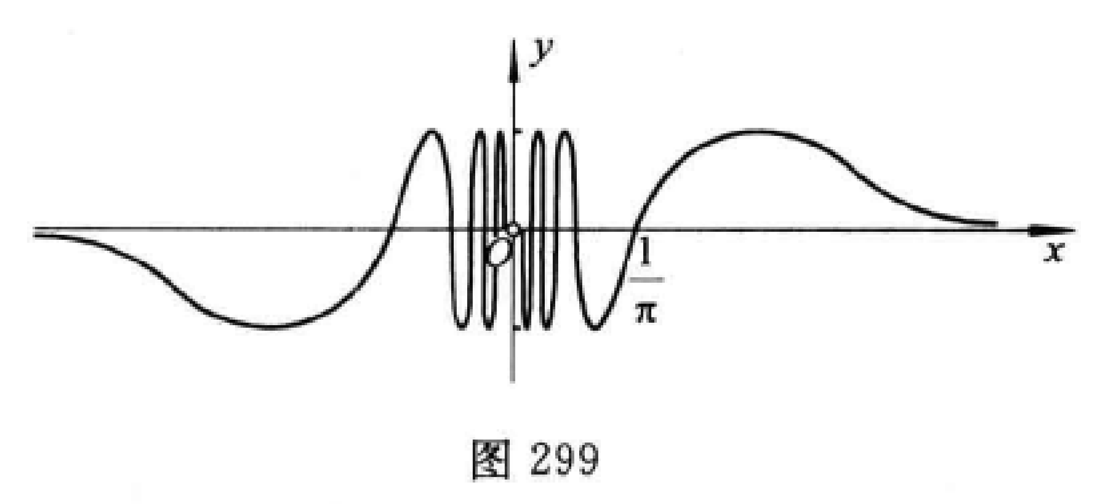


图 299

【301】 $y=\tan\dfrac{\pi}{x}$.

解 当 $x=\dfrac{1}{k}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$y=0$.

当 $x\to\dfrac{2}{2k+1}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，$y\to\infty$.

当 $x>2$ 时，$y>0$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to 0$.

因为 y 为奇函数，故图像关于原点对称.

当 $x\to 0$ 时，图像凝聚于 O 点，而在点 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ 及 0 处，函数 y 是没有定义的.

如图 301 所示.

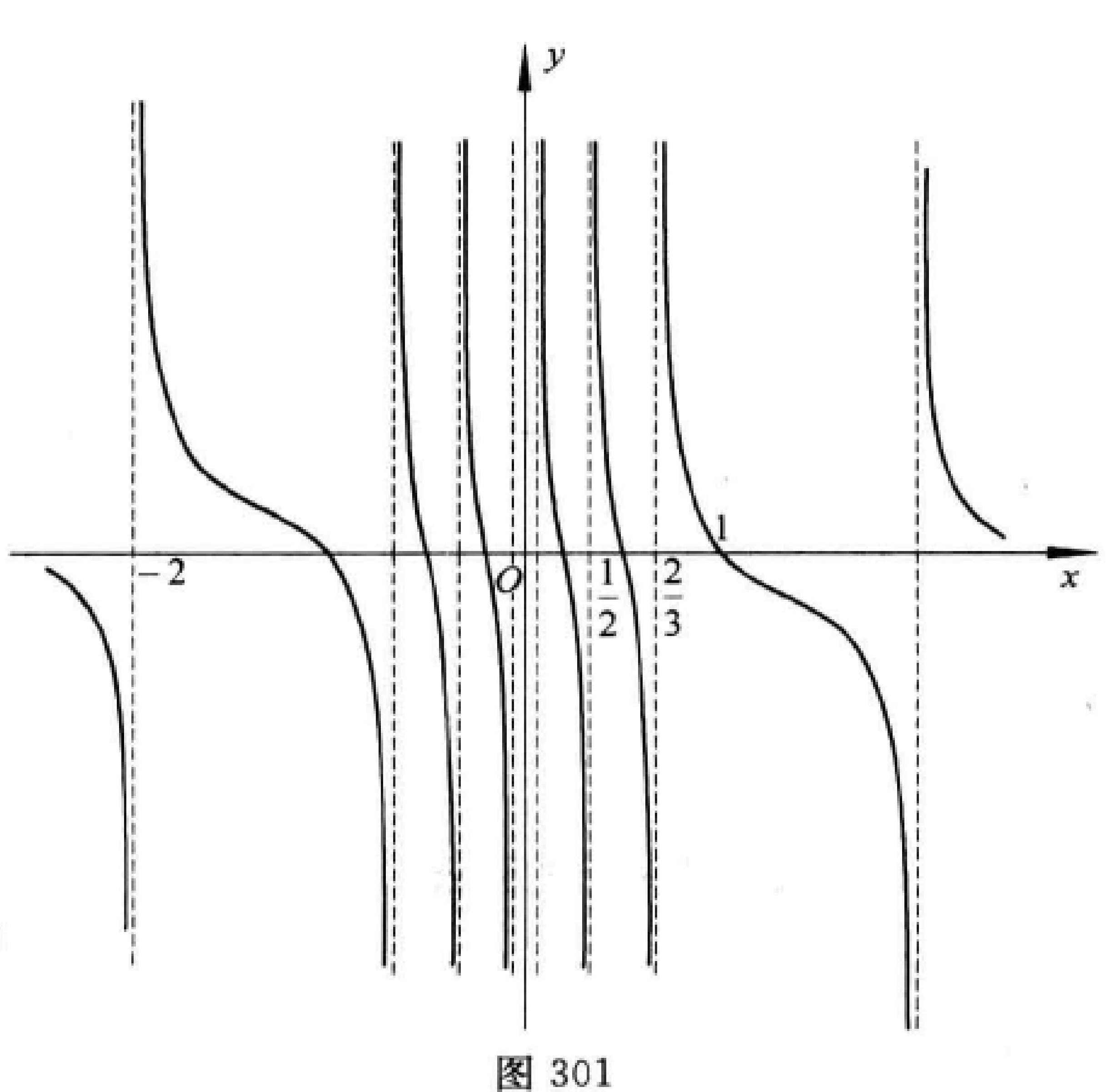


图 301

【302】 $y=x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

解 先作 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像. 因为 y 为偶函数，故图像关于 Oy 轴对称.

当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=\pm x$. 当 $x=\frac{1}{k\pi}$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$.

当 $x>\frac{2}{\pi}$时，y 单调增加，且有

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1^{*)}.$$

如图 302—1 所示(在点 $x=0$ 处无定义).

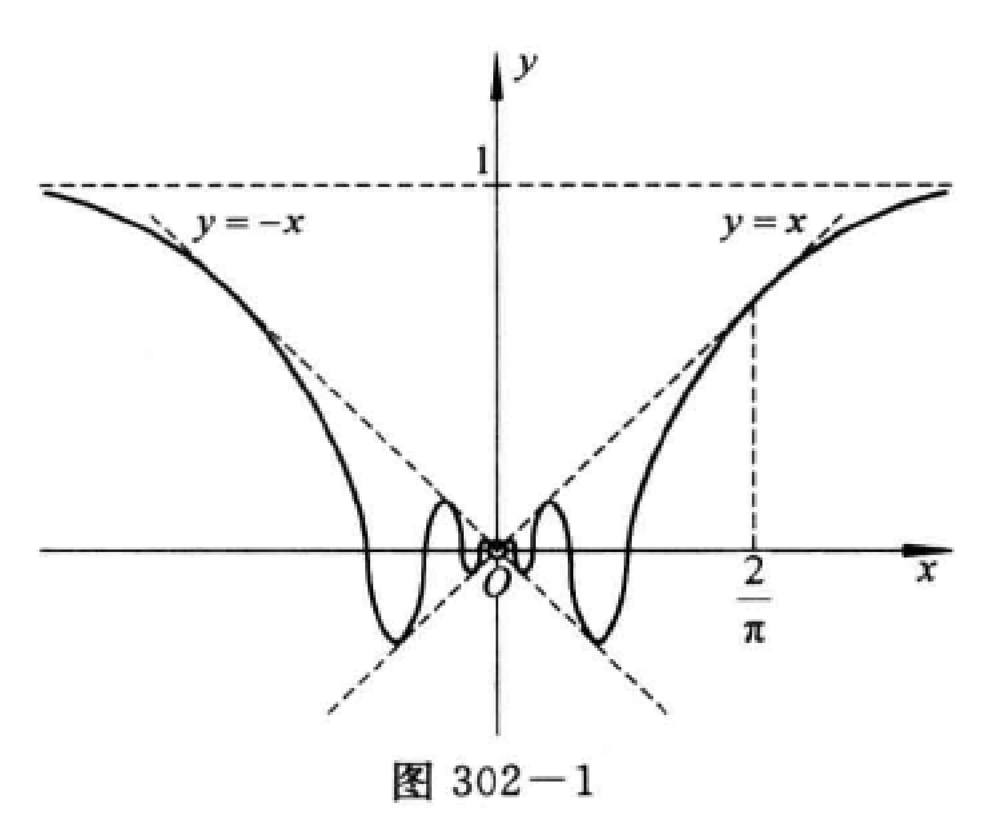


图 302—1

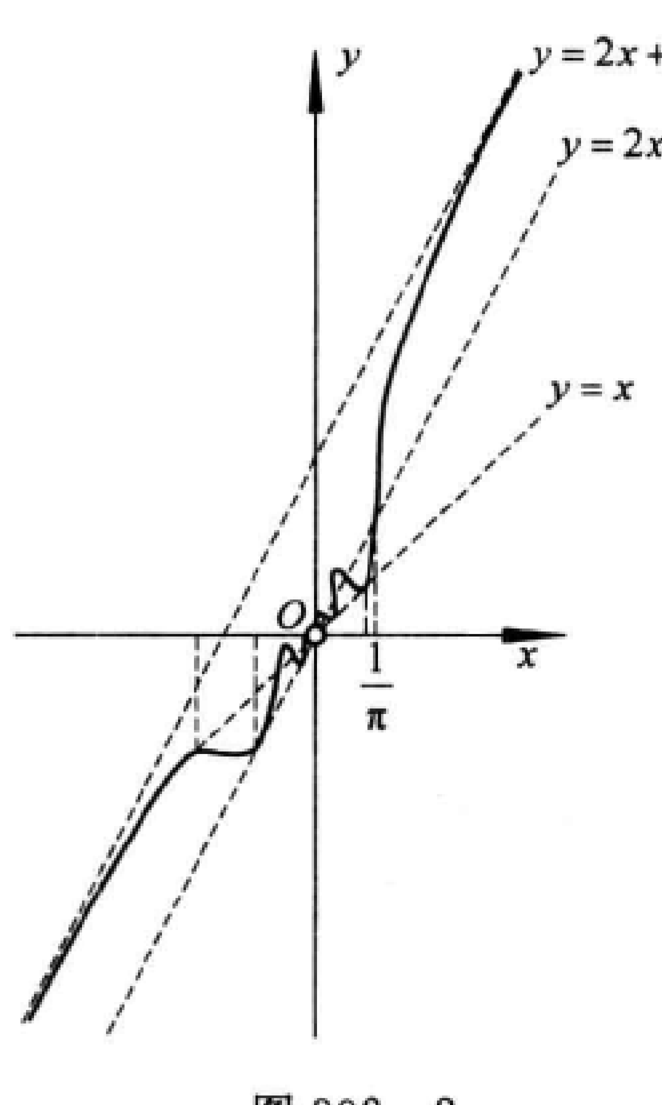


图 302—2

其次，再将函数 $y=2x$ 及 $y=x\sin\frac{1}{x}$的图像"叠加"，即得

$$y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$$

的图像，如图 302—2 所示.

*) 此结果参看本章 §5.

【305】 $y=e^{x}\cos x$.

解 由于$-e^{x}\leqslant y\leqslant e^{x}$，故图像在 $y=e^{x}$ 及 $y=e^{-x}$之间.

当 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，$y=0$. 且 $\lim\limits_{x\to-\infty}y=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\cos x$ 却不存在.

如图 305 所示.

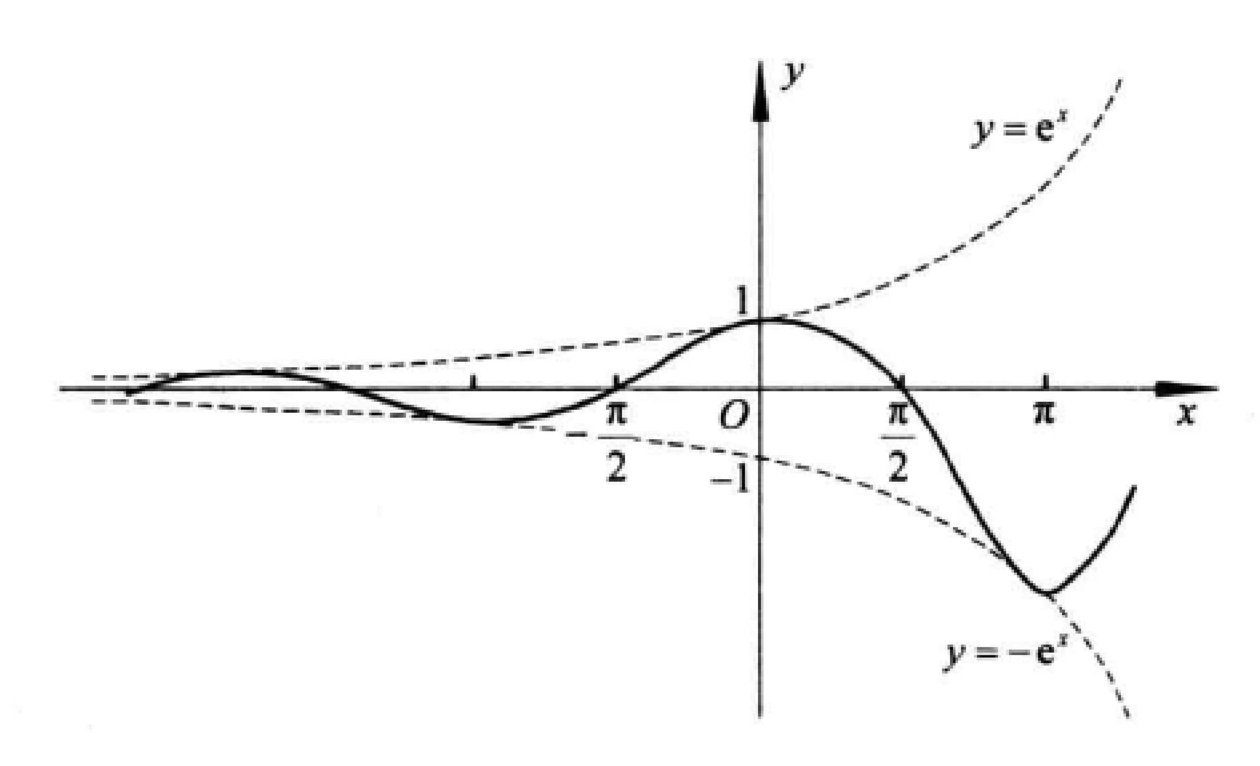


图 305

作出下列反三角函数的图像：

【319】 $y=\arcsin(\cos x)$.

提示 注意，当$(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

解 $\sin y=\cos x$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

因此，当 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$ 时，$y=\frac{\pi}{2}+x$；

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$y=\frac{\pi}{2}-x$；

一般地，当 $(2k-1)\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi$ 时，

$$y=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots);$$

而当 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$ 时，$y=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$.

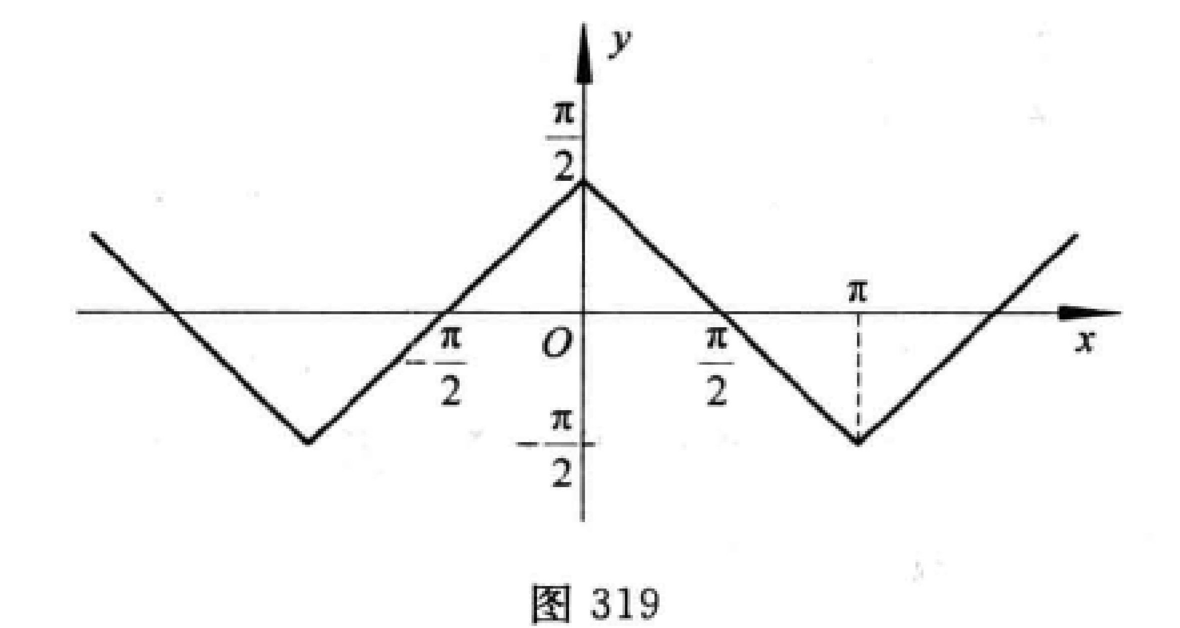


图 319

如图 319 所示.

【326】 已知函数 $y=f(x)$ 的图像，作下列各函数的图像：

(1) $y=f(x-x_0)$；　(2) $y=y_0+f(x-x_0)$；　(3) $y=f(2x)$.

解 (1)函数 $y=f(x-x_0)$ 的图像可由 $y=f(x)$ 的图像平移距离 $|x_0|$ 得出.

当 $x_0>0$ 时，向右平移；当 $x_0<0$ 时，向左平移.

如图 326－1 所示.

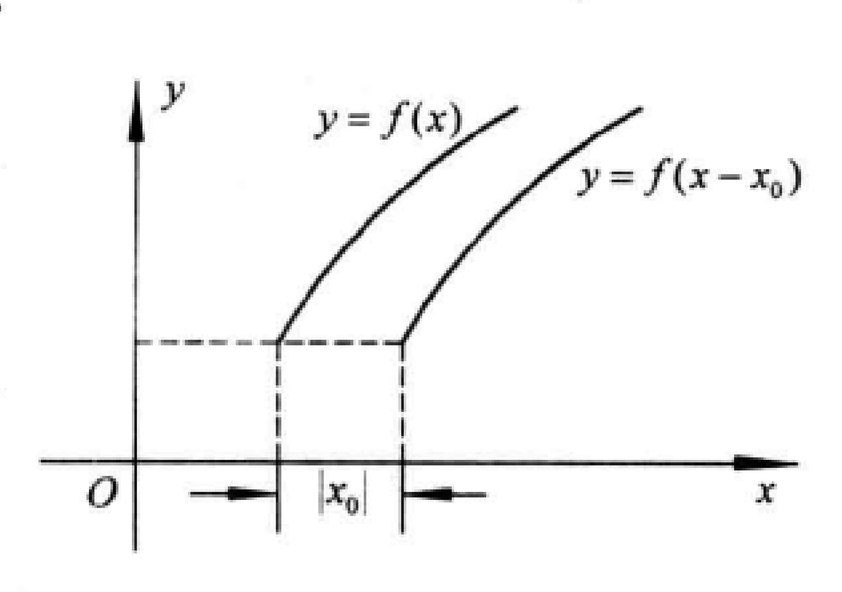


图 326－1

(2)函数 $y=y_0+f(x-x_0)$ 的图像可由 $y=f(x)$ 的图像先平移距离 $|x_0|$，再上下平移距离 $|y_0|$ 得出，其中当 $y_0>0$ 时，向上平移；当 $y_0<0$ 时，向下平移.

事实上，只要先将坐标原点平移到点 (x_0,y_0). 坐标轴的方向均不变，再在新坐标系中作 $y'=f(x')$ 的图像，其中

$$y'=y-y_0,\ x'=x-x_0.$$

如图 326－2 所示.

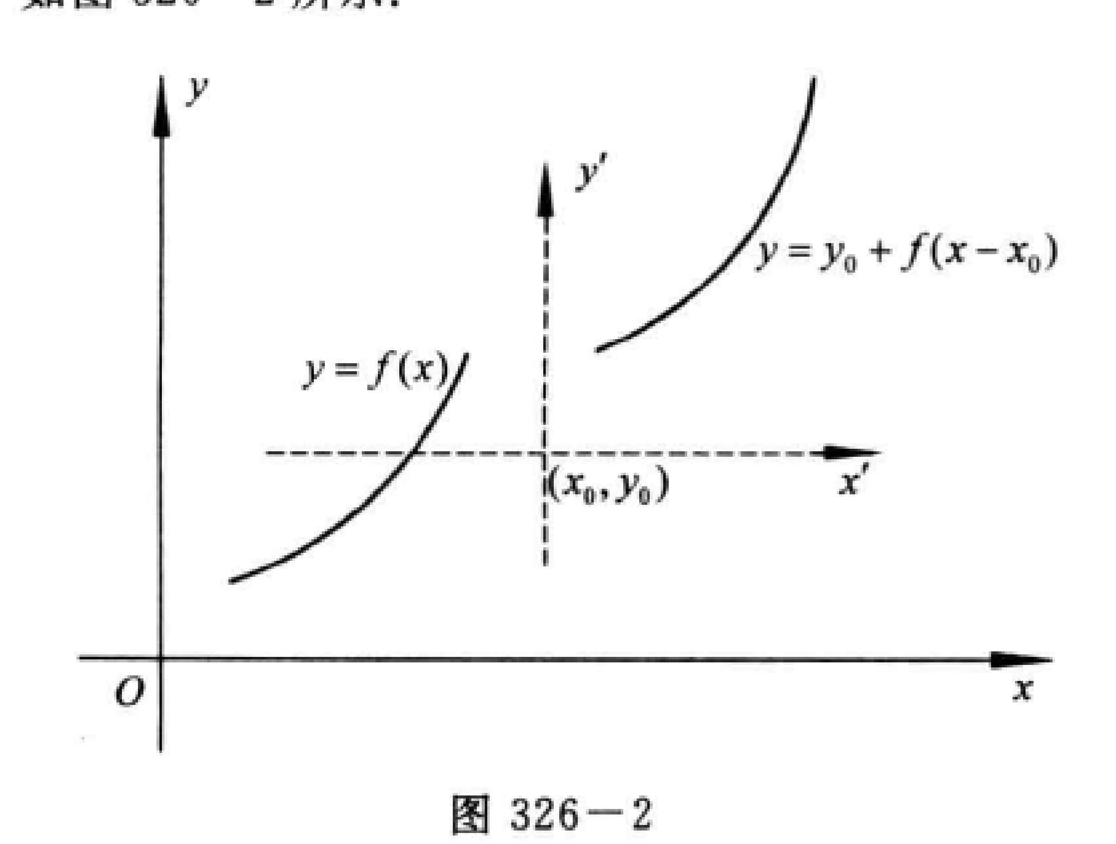


图 326－2

图 326－3

(3)函数 $y=f(2x)$ 的图像可由 $y=f(x)$ 的图像沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

如图 326－3 所示.

【330】 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像，作下列各函数的图像：

(3) $y=f[g(x)]$.

解 (3)如图 330 所示. 设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引铅直线. 它和 $y=g(x)$ 的图像相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). $PQ=g(x)$. 过 Q 点引水平线，它与 $y=x$ 交于 R 点，过 R

作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$ 分别交于 T 点及 S 点，则 $OT=TR=PQ=g(x)$，因而 $TS=f[g(x)]$. 最后，把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点，此即函数 $y=f[g(x)]$ 图像上的一点. 至于该图像上的其他点，同法求得.

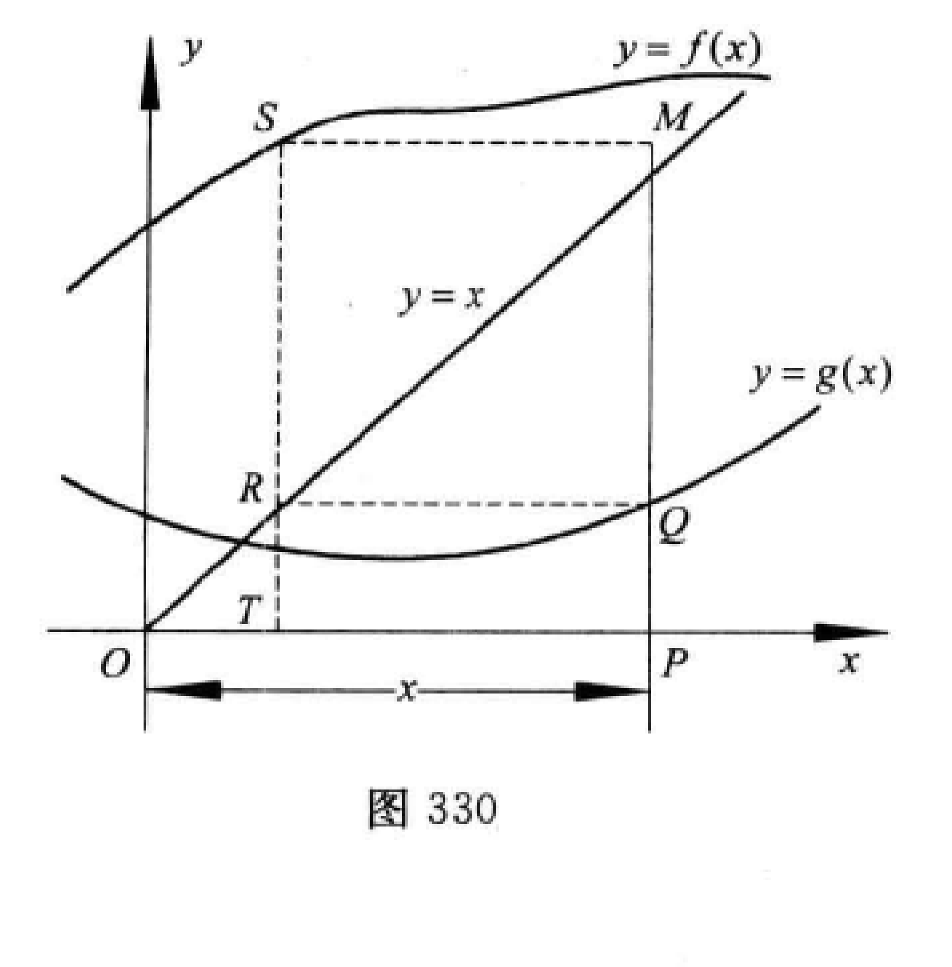


图 330

但要注意，函数 $y=f[g(x)]$ 的存在域是满足不等式

$$a\leqslant g(x)\leqslant b$$

的数 x 的集合，式中 $[a,b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图像的乘法，作出下列函数的图像：

【350】 作函数 $y=x+\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$ 的图像.

解 当 $2k<x<2k+1$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\sin\pi x>0,\ \mathrm{sgn}(\sin\pi x)=1,$$


因而，$y=x+\sqrt{x}$.

而当 $2k+1<x<2k+2$ 时，$y=x-\sqrt{x}$. 图 350—1 中系函数 $y=\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$ 的图像（黑粗线所示）. 其中在 $y=x$ 上的一支系 $y=\sqrt{x}+x$ 的一段.

至于函数 $y=x+\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$ 的图像如图 350—2 所示.

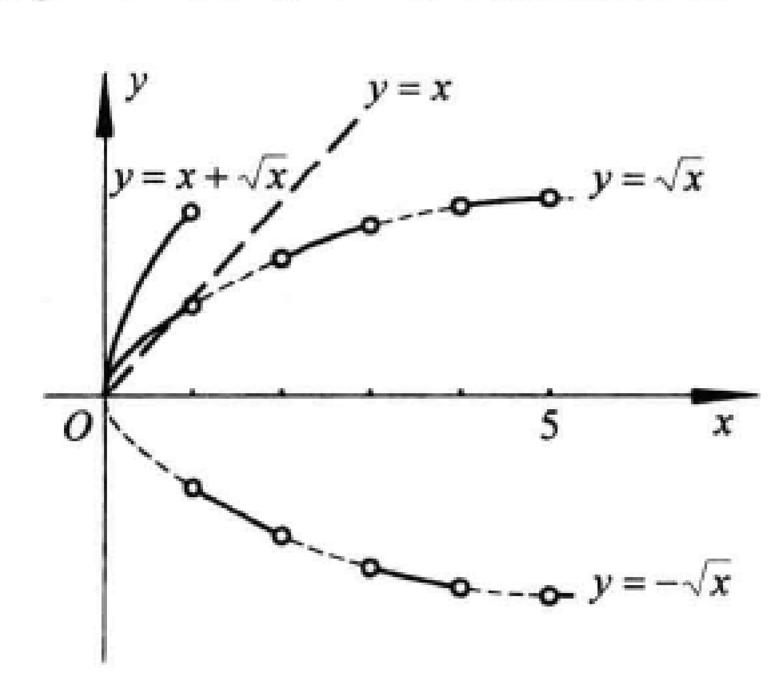


图 350—1

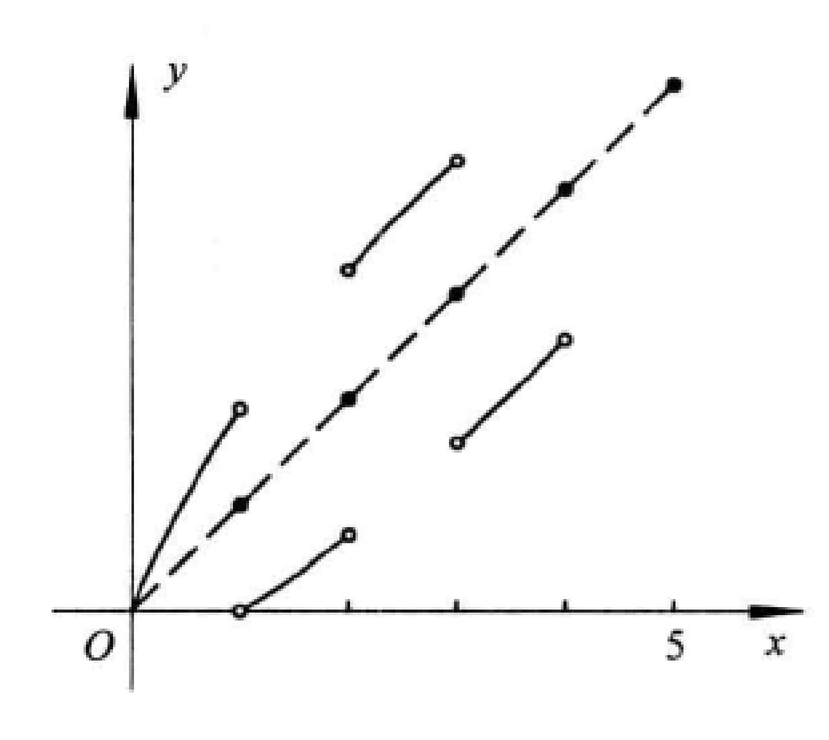


图 350—2

【358】 设 $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ 及 $\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$

作函数：(2) $y=\varphi[\psi(x)]$ 的图像.

提示 (2) 图像关于 Oy 轴对称. 分别就 $0\leqslant x<1$，$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 及 $x>2$ 加以讨论.

解 (2) $\varphi[\psi(x)]=\varphi[\psi(-x)]$，故图像关于 Oy 轴对称.

当 $0\leqslant x<1$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $1<2-x^2\leqslant 2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $-1\leqslant 2-x^2\leqslant 1$，所以，$\varphi[\psi(x)]=1$.

当 $\sqrt{3}<x\leqslant 2$ 时，$\psi(x)=2-x^2$，由于 $-2\leqslant 2-x^2<-1$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

当 $x>2$ 时，$\psi(x)=2$，所以，$\varphi[\psi(x)]=0$.

如图 358 所示.

图 358

【363】 证明：若函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于竖直方向上的两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证明思路 设 $x\in R$，则有 $f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$，在前一等式中将 x 换成 $x+(b-a)$，可得 $f(b-x)=f(2a-b-x)$. 再依次将 $b-x$ 换成 x 及 x 换成 $2(b-a)+x$，即知周期 $T=2(b-a)$.

证 设 x 为任一实数，则按假设有

$$f(a+x)=f(a-x) \quad 及 \quad f(b+x)=f(b-x).$$

在 $f(a+x)=f(a-x)$ 中将 x 换成 $x+(b-a)$，则得

$$f(x+b)=f(a-x-b+a)=f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b)=f(b-x)$，所以，

$$f(b-x)=f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x，则得 $f(x)=f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$，即得

$$f(x+2(b-a))=f(x),$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 周期的周期函数. 如图 363 所示.

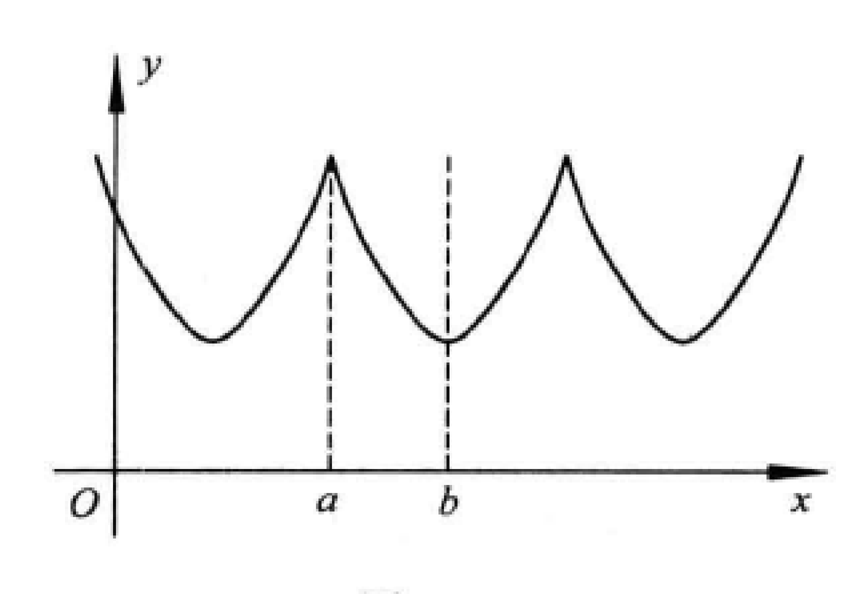


图 363

【364】 证明：若函数 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于两点 $A(a,y_0)$ 和 $B(b,y_1)(b>a)$ 对称，则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是，若 $y_0=y_1$，则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证明思路 设 $x\in R$，则有 $f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x)$，$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x)$. 在前一等式中，将 x 换成 $x+(b-a)$，可得 $f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x)$. 再依次将 $b-x$ 换成 x 及 x 换成 $2(b-a)+x$，又可得 $f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x]$.

令 $f(x)=-\dfrac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x)$，可证 $\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]$.

证 设 x 是任一实数，按假设有：

$$f(a+x)-y_0=y_0-f(a-x), \tag{1}$$

$$f(b+x)-y_1=y_1-f(b-x). \tag{2}$$

在(1)中，将 x 换成 $x+(b-a)$ 则得

$$f(b+x)-y_0=y_0-f(2a-b-x). \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1-f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2(y_1-y_0)+f(2a-b-x). \tag{4}$$

在(4)中，将 $b-x$ 换成 x，则得

$$f(x)=2(y_1-y_0)+f(2a-2b+x). \tag{5}$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$，则得

$$f(x)=2(y_0-y_1)+f[2(b-a)+x]. \tag{6}$$

令

$$f(x)=-\frac{y_0-y_1}{b-a}x+\varphi(x). \tag{7}$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上，由(7)式我们有

$$f[x+2(b-a)]=-\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)]+\varphi[x+2(b-a)],$$

$$f(x)-f[x+2(b-a)]=2(y_0-y_1)+\varphi(x)-\varphi[x+2(b-a)].$$

因此，由(6)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \tag{8}$$

由(7)式和(8)式可知，$f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$，则由(7)式和(8)式可知，$f(x)$ 是一个周期函数.

§5. 函数的极限

1° **函数的有界性** 设存在某两数 m 和 M，使得当 $x\in(a,b)$时，

$$m<f(x)<M,$$

则称函数 $f(x)$在这区间(a,b)上为有界的.

数 $m_0=\inf\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$称为函数 $f(x)$在这区间(a,b)上的下确界，而数 $M_0=\sup\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$称为函数 $f(x)$在这区间(a,b)上的上确界.

差 M_0-m_0 称为函数在区间(a,b)上的振幅.

2° **函数在某一点的极限** 设函数 $f(x)$定义在集合 $X=\{x\}$上，且该集合以 a 为聚点. 记号

$$\lim_{x\to a}f(x)=A \tag{1}$$

表示，对于任一个数 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对于满足条件$0<|x-a|<\delta$，并使 $f(x)$有意义的一切 x，下列不等式成立：

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

函数的极限(1)存在的充分必要条件是：对于每一个数列$x_n\to a$ $(n=1,2,\cdots)$，下面的等式都成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

有两个著名的极限：

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$； (2)$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

柯西准则. 函数 $f(x)$在 a 点的极限存在的充分必要条件是：对于每一个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得只要

$$0<|x'-a|<\delta \quad 和 \quad 0<|x''-a|<\delta,$$

就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

式中 x'和 x''属于函数 $f(x)$的定义域.

3° **单侧极限** 若对于任何 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得

当 $0<a-x<\delta(\varepsilon)$时，有$|A'-f(x)|<\varepsilon$，则称数 A'为函数 $f(x)$在 a 点的左极限：

$$A'=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0).$$

类似地，若当 $0<x-a<\delta(\varepsilon)$时，有$|A''-f(x)|<\varepsilon$，则称数 A''为函数 $f(x)$在 a 点的右极限：

$$A''=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0).$$

函数 $f(x)$在 a 点的极限存在的充分必要条件为：

$$f(a-0)=f(a+0).$$

4° **无穷极限** 约定记号

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

表示，对于任何的 $E>0$，只要 $0<|x-a|<\delta(E)$，则有

$$|f(x)|>E.$$

5° **子列极限** 若对于某数列 $x_n\to a$ 有等式

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=B,$$

则称数(或符号∞)B 为函数 $f(x)$在 a 点的子列极限(有限的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\varliminf_{x\to a}f(x) \quad 和 \quad \varlimsup_{x\to a}f(x)$$

来表示，分别称为函数 $f(x)$在 a 点的下极限和上极限.

等式

$$\underline{\lim}_{x \to a} f(x) = \overline{\lim}_{x \to a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有限的或无穷的)的充分必要条件.

【381】 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases} n, & x=\dfrac{m}{n}(m \text{ 和 } n \text{ 为互素的整数,且 } n>0), \\ 0 & x \text{ 为无理数}, \end{cases}$$

在每一点 x 为有限的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

提示 任给 $x_0>0$,注意在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内总有无限多个有理数. 只要证明对任给的 $\delta>0$, $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内无界. 用反证法.

证 任给 $x_0>0$,当 x_0 固定时, $f(x_0)$ 值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密,故在 x_0 的任何邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内总有无限多个有理数. 下面证明对于任给的 $\delta>0$,函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内是无界的. 若不然,存在 $M>0$,使当 $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时,

$$|f(x)| \leqslant M.$$

于是,在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中的有理数只能表示成 $\frac{k}{1}$, $\frac{k}{2}$, $\cdots$, $\frac{k}{[M]}$,其中 k 是与分母互素的整数, $[M]$ 为 M 的整数部分. 由于这些有理数都在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中,故有

$$(x_0-\delta)[M]<k<(x_0+\delta)[M],$$

上式表明在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中的有理数仅为有限个,这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是,本题所定义的函数 $f(x)$ 在每一点 x(有限)的任何邻域中是无界的.

【384】 证明:函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的,但当 $x\to 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时, $f(x)=0$;而当 $x=\frac{1}{k\pi}$ 时, $f(x)=(-1)^k k\pi$. 于是,当 $k\to\infty$ 时,点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 及 $\frac{1}{k\pi}$ 均在点 $x=0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k k\pi| \to +\infty$ $(k\to+\infty)$,故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k\to\infty$ 时, $f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交,即 $f(x)=0$(这样的数 x 的集合是无限的). 因而,当 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 又不成为无穷大.

【399】 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的下确界和上确界.

证明:若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a,b) 内的函数,则

$$m[f_1+f_2] \geqslant m[f_1]+m[f_2] \quad \text{及} \quad M[f_1+f_2] \leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子,使上述两个关系式为:(1)等式;(2)不等式.

提示 利用上、下确界定义且注意 $m[f]\leqslant f\leqslant M[f]$,命题易获证.

证 因为

$$m[f_1]\leqslant f_1\leqslant M[f_1] \quad \text{及} \quad m[f_2]\leqslant f_2\leqslant M[f_2],$$

所以,

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant f_1+f_2,$$

从而有

$$m[f_1]+m[f_2]\leqslant m[f_1+f_2].$$

又因

$$f_1+f_2\leqslant M[f_1]+M[f_2],$$

所以,

$$M[f_1+f_2]\leqslant M[f_1]+M[f_2].$$

(1) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a,b) 内具有相同的单调性,且 m 及 M 均为有限时,取等式.

(2) $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=-x^2$ 在区间 $(-1,1)$ 内

$$m[f_1]=0,\quad M[f_1]=1;$$
$$m[f_2]=-1,\quad M[f_2]=0.$$

又因为 $f_1+f_2=0$,所以,

$$m[f_1+f_2]=M[f_1+f_2]=0.$$

此时

$$m[f_1+f_2]>m[f_1]+m[f_2],\quad M[f_1+f_2]<M[f_1]+M[f_2].$$

取不等式.

利用不等式表示下列结论,并举出适当的例子:

【405】 (6) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$; (8) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$.

解 (6) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<a-x<\delta$ 时,$f(x)>E$,此即 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=+\infty$.

(8) 任给 $E>0$,存在数 $\delta>0$,使当 $0<x-a<\delta$ 时,$f(x)<-E$,此即 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$.

例如,$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,即有 $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=-\infty$.

【408】 设 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,式中 $a_i(i=0,1,\cdots,n)$ 为实数.

证明:$\lim\limits_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty$.

证 不妨设 $a_0\neq 0$,则

$$|p(x)|\geqslant|a_0|\cdot|x^n|\cdot\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|,$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|^i}=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,故存在 $E_1>0$,使当 $|x|>E_1$ 时,恒有

$$\left|1-\left(\frac{|a_1|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|}+\frac{|a_2|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^2}+\cdots+\frac{|a_n|}{|a_0|}\cdot\frac{1}{|x|^n}\right)\right|>\frac{1}{2},$$

从而有 $|p(x)|>\dfrac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n$.

任给 $M>0$,设 $E_2=\sqrt[n]{\dfrac{2M}{|a_0|}}$.取 $E=\max(E_1,E_2)$,则当 $|x|>E$ 时,恒有 $|p(x)|>M$,故

$$\lim_{x\to\infty}|p(x)|=+\infty.$$

【410】 设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式,且 $P(a)=Q(a)=0$.

表达式 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 可能取何值?

解 若 a 仅为 $P(x)=0$ 及 $Q(x)=0$ 的一重根,则极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x)=0$ 的 n 重根,而为 $Q(x)=0$ 的 m 重根,则当 $n>m$(n,m 均大于 1)时,此极限为 0;当 $n<m$ 时,此极限为 ∞;当 $n=m$ 时,此极限为一不等于零的值.

总之,极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为 0,或为 ∞,或为不等于零的值.

求下列各式之值:

【414】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m 与 n 为正整数).

提示 将 $(1+mx)^n$ 及 $(1+nx)^m$ 展开即易获解.

解 $\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\frac{\left[1+nmx+\frac{1}{2!}n(n-1)m^2x^2+\cdots+m^nx^n\right]}{x^2}+\frac{-\left[1+mnx+\frac{1}{2!}m(m-1)n^2x^2+\cdots+n^mx^m\right]}{x^2}$$

$$=\frac{n}{2}(n-1)m^2-\frac{m}{2}(m-1)n^2+o(x)^{*)}=\frac{1}{2}mn(n-m)+o(x),$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}=\frac{1}{2}mn(n-m)$.

*) $o(x)$表示当 $x\to 0$ 时的无穷小量.

【424】 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

提示 $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$.

解 $x+x^2+\cdots+x^n-n=(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)$

$=(x-1)[1+(x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$

$=(x-1)[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$.

于是，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\lim_{x\to 1}[n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+x^{n-1}]$$

$$=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}.$$

【428】 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$ (m 和 n 为正整数).

解题思路 当 $m\neq n$ 时，不失一般性，设 $m<n$，且令 $m+l=n$ ($l\in\mathrm{N}$). 通分后求极限，所得结果对于 $m=n$的情况仍适用.

解 当 $m=n$ 时，此极限显然为零.

当 $m\neq n$ 时，不失一般性，假设 $m<n$，且 $m+l=n$. 此时

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})}$$

$$=\frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l+1})}$$

$$=-\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}-\frac{+l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}.$$

于是，

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=-\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)]+l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn}$$

$$=-\frac{\frac{ml(l-1)}{2}+\frac{ml(m+1)}{2}}{mn}=-\frac{ml(m+l)}{2mn}=\frac{m-n}{2}.$$

当 $m=n$ 时，上述结果就等于零. 即上述结果对 $m=n$ 的情况仍然适用.

总之，不论 m 及 n 为任何的正整数，均有$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$.

【433】 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解题思路 令 $1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n$ 及 $[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n$，则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$.

利用 143 题的结果.

解 令 $1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3=x_n$，$[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2=y_n$，

则 $y_{n+1}>y_n$，且 $y_n\to+\infty$，由于

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$$

$$=\frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2}+\frac{n(3n-1)}{2}\right](3n+1)}\to 3\quad (n\to\infty).$$

利用 143 题的结果，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}=3.$

求极限：

【452】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ （m 及 n 为整数）.

解题思路 分三种情况：(1)m 及 n 均为正整数；(2)m 及 n 均为负整数，可令 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数；(3)m 及 n 中有一个为正整数，另一个为负整数.

解 如果 m 及 n 为正整数，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^n-(1+\beta x)^m}{x\left(\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(n\alpha-m\beta)+(C_n^2\alpha^2x+\cdots+\alpha^nx^{n-1}-C_m^2\beta^2-\cdots-\beta^mx^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+\alpha x)^{n(mn-1)}}+\cdots+\sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}}$$

$$=\frac{n\alpha-m\beta}{mn}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m=-m'$，$n=-n'$，其中 m' 及 n' 为正整数，则

$$\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}=\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{\sqrt[m']{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于 1，于是利用本题前半段的结果，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n']{1+\beta x}-\sqrt[m']{1+\alpha x}}{x}=\frac{\beta}{n'}-\frac{\alpha}{m'}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数，另一个为正整数，则同法可证上述结论仍然成立. 因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\quad (mn\neq 0).$$

【456】 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}.$

提示 令 $x=t^{n!}$.

解 设 $x=t^{n!}$，则

$$\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{(1-t^{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n})(1-t^{2\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot n})\cdots(1-t^{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n-1)})}{(1-t^{n!})^{n-1}}$$

$$=\frac{(1+t+t^2+\cdots+t^{\frac{n!}{2}-1})(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{3}-1})\cdots(1+t+\cdots+t^{\frac{n!}{n}-1})}{(1+t+\cdots+t^{n!-1})^{n-1}}$$

当 $x\to 1$ 时，$t\to 1$. 于是，上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2}\cdot\frac{n!}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}}=\frac{1}{n!},$$

即 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\frac{1}{n!}.$

【459】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x).$

提示 令 $x=\frac{1}{t}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}=\frac{(\sqrt{1+2t}+1)^2-4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})}=\frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}$$

$$=\frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}.$$

当 $x\to+\infty$ 时，$t\to 0$. 于是，上式趋向于 $-\frac{1}{4}$，即

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)=-\frac{1}{4}.$$

【465】 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt[n]{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)}-x]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\alpha_1)\cdots(x+\alpha_n)-x^n}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i)x^{n-1}+\cdots+\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}(x+\alpha_i)^{\frac{n-j}{n}}\right]x^{j-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i+o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n}\left[\prod\limits_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{n}}\right]}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}.$$

【470】+ * 从条件

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0$$

求常数 a_i 和 $b_i(i=1,2)$.

解题思路 将式子 $\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1$ 化为 $\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1}$，求得其极限为零的必要条件是 $a_1=\pm1, b_1=\mp\frac{1}{2}$. 分别就 $a_1=1, b_1=-\frac{1}{2}$ 及 $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$ 检验 $\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1$ 的极限（当 $x\to-\infty$ 时），并与条件比较，决定取舍，最后得 $a_1=-1, b_1=\frac{1}{2}$. 同理可得 $a_2=1, b_2=-\frac{1}{2}$.

解 $$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1=\frac{(1-a_1^2)x^2-(1+2a_1b_1)x+(1-b_1^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1},\tag{1}$$

上式极限为零的必要条件是

$$1-a_1^2=0 \quad 及 \quad 1+2a_1b_1=0,$$

解之，得 $a_1=\pm1, b_1=\mp\frac{1}{2}$.

当 $a_1=1, b_1=-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}=\frac{x^2-x+1-(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{x^2-x+1}-(x-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}}\to 0$$

（当 $x\to-\infty$ 时），

从而，由(1)式知

---

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to+\infty\quad(\text{当 } x\to-\infty\text{时}),$$

此与假定不符合，故舍弃 $a_1=1,b_1=-\frac{1}{2}$.

当 $a_1=-1,b_1=\frac{1}{2}$ 时，显然有

$$\sqrt{x^2-x+1}+a_1x+b_1=\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2}\to+\infty\quad(\text{当 } x\to-\infty\text{时}),$$

从而，由(1)式知

$$\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\to0\quad(\text{当 } x\to-\infty\text{时}),$$

此与假定符合，故得 $a_1=-1,b_1=\frac{1}{2}$. 同理可得 $a_2=1,b_2=-\frac{1}{2}$.

【473】 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

提示 令 $x=\pi+y$.

解 设 $x=\pi+y$，则当 $x\to\pi$ 时，$y\to0$. 于是，

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{y\to0}\frac{(-1)^m\sin my}{(-1)^n\sin ny}=(-1)^{m-n}\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin my}{my}\cdot\frac{ny}{\sin ny}\cdot\frac{m}{n}\right)=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

【494】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{1-\cos x}$.

解题思路 注意 $1-\cos x\cos2x\cos3x=\frac{1}{2}(\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x)$ 及 $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，将原式变形后利用重要极限.

解 因为

$$1-\cos x\cos2x\cos3x=1-\frac{1}{2}(\cos4x+\cos2x)\cos2x=1-\frac{1}{2}\cos4x\cos2x-\frac{1}{2}\cos^22x$$

$$=1-\frac{1}{4}(\cos6x+\cos2x)-\frac{1}{4}(1+\cos4x)=\frac{1}{2}(\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x),$$

所以，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cos2x\cos3x}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin^2x+\sin^22x+\sin^23x)}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin2x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2+\left(\frac{\sin3x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(4+16+36)=14.$$

【499】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

提示 分子分母同乘以式 $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}\right]=\frac{1}{4}.$$

【504】 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos2x}\sqrt[3]{\cos3x}}{x^2}$.

解 不妨令 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2(1+\sqrt{\cos 2x})}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2(1+\sqrt[3]{\cos 3x}+\sqrt[3]{\cos^2 3x})}=3.$$

【537】 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}\quad(x>0)$.

解 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lg(x^2-h^2)-\lg x^2}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{x^2}\lg\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\frac{1}{x^2}\lg\mathrm{e}.$$

【551】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+a}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}a+a}\left(1+\frac{x}{b}\right)^{\frac{x}{b}b+b}}{\left(1+\frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b}[2(a+b)]+(a+b)}}$

$$=\frac{\mathrm{e}^a\cdot\mathrm{e}^b}{\mathrm{e}^{2(a+b)}}=\mathrm{e}^{-(a+b)}.$$

【564】 证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad(a>0,\ n>0).$$

证明思路 注意到当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使得 $k\leqslant x<k+1$. 于是，当 $n>0$ 时，有 $\frac{k^n}{a^{k+1}}<\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k}$，利用 60 题的结果.

证 当 $x\geqslant 1$ 时，存在唯一的正整数 k，使

$$k\leqslant x<k+1.$$

于是当 $n>0$ 时，我们有

$$\frac{x^n}{a^x}<\frac{(k+1)^n}{a^k}\quad 及\quad \frac{x^n}{a^x}>\frac{k^n}{a^{k+1}}=\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}.$$

因为当 $x\to+\infty$ 时，$k\to+\infty$，所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+1)^n}{a^{k+1}}\cdot a=0\cdot a^{*)}=0$$

及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^{k+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k^n}{a^k}\cdot\frac{1}{a}=0\cdot\frac{1}{a}^{*)}=0.$$

于是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$.

*) 利用 60 题的结果.

【607】 设 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 及 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$，则由此是否可推出 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$?

研究例子： $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(p,q\text{ 是互素的整数}),\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

并且 $x\to 0$.

解 不一定. 例如,对于函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\text{ 是互素的整数}),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

及

$$\psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则有

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0(=A) \quad\text{及}\quad \lim_{x\to 0}\psi(x)=1,$$

但是,极限$\lim\limits_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$却不存在. 事实上,当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时,有$\varphi(x_n)=0$,因此 $\psi(\varphi(x_n))=0(n=1,2,\cdots)$;而当 x 以一串有理数列 x'_n 趋近于零时,$\varphi(x'_n)\neq 0$,因此,$\psi(\varphi(x'_n))=1(n=1,2,\cdots)$.

由此可知,极限$\lim\limits_{x\to 0}\psi(\varphi(x))$不存在.

【608】 证明柯西定理:若函数 $f(x)$定义于区间$(a,+\infty)$,且在每一个有限的区间(a,b)内是有界的,则

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}\quad(f(x)\geqslant c>0)$,

假定等式右端的极限都存在.

证 (1)记 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$. 任给 $\varepsilon>0$,必存在正数 $X_0>a$,使当 $x\geqslant X_0$ 时,恒有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是,恰有一个正整数 n(依赖于 x),满足 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$,则 $0\leqslant\tau<1$,$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\frac{f(x)}{x}-A=\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]+\frac{f(X_0+\tau)}{x}-\frac{(X_0+\tau)A}{x}.$$

显然

$$\begin{aligned}&\left|\frac{n}{x}\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right]\right|\leqslant\left|\frac{f(X_0+\tau+n)-f(X_0+\tau)}{n}-A\right|\\ =&\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A]\right|\\ \leqslant&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)-A|<\frac{1}{n}\cdot\frac{n\varepsilon}{3}=\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

由假定,$f(x)$在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界,故存在正数 X_1,使当 $x>X_1$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(0\leqslant\tau<1);$$

另外,显然存在正数 X_2,使当 $x>X_2$ 时,恒有

$$\left|\frac{(X_0+1)A}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1,X_2\}$. 于是,当 $x>X$ 时,必有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$. 故(1)获证.

(2)由假定,$f(x)\geqslant c>0$. 记 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=A'$. 显然 $A'\geqslant 0$. 下证 $A'>0$. 事实上,若 $A'=0$,则存在正数

X_0，使当 $x \geqslant X_0$ 时，必 $0<\frac{f(x+1)}{f(x)}<\frac{1}{2}$. 于是，

$$0<\frac{f(X_0+n)}{f(X_0)}=\frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)} \cdot \frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{f(X_0+1)}{f(X_0)}<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(X_0+n)=0$，此显然与 $f(x) \geqslant c>0$ 矛盾，因此，有 $A'>0$.

由于 $f(x) \geqslant c>0$ 且 $f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内有界，故函数 $\ln f(x)$ 在每个有限区间 (a,b) 内也有界，并且

$$\lim_{x \to +\infty}[\ln f(x+1)-\ln f(x)]=\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)}=\ln A'.$$

于是，将(1)的结果用于函数 $\ln f(x)$，即知

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{x}=\ln A'.$$

故有 $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x \to +\infty}[e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}}=e^{\ln A'}=A'$.

证毕.

【609】 证明：若(1)函数 $f(x)$ 定义于区域 $x>a$ 内；(2)在每一个有限的区域 $a<x<b$ 内是有界的；(3) $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ (或 $-\infty$)*)，则

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty \quad (\text{或} -\infty).$$

证 只要证明 $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ 的情形，这时要证 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$（对于 $-\infty$ 的情形，只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形）. 任给 $G>0$. 必存在正数 $X_0>a$，使当 $x \geqslant X_0$ 时，恒有

$$f(x+1)-f(x)>4G.$$

现设 $x>2(X_0+1)$. 仿 608 题(1)的证明，恰有一个正整数 n(依赖于 x)，满足 $n \leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$，则 $0 \leqslant \tau<1$，$x=X_0+\tau+n$. 由于 $n+1>x-X_0>X_0+2$，故 $n>X_0+1>X_0+\tau$. 从而，$2n>x$，即

$$\frac{n}{x}>\frac{1}{2}.$$

又，我们有

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}+\frac{f(X_0+\tau)}{x};$$

显然

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n}[f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)]>\frac{1}{n} \cdot 4nG=4G,$$

故

$$\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{n}>2G.$$

由假定，$f(x)$ 在 $X_0 \leqslant x<X_0+1$ 上有界，故存在正数 X_1，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(X_0+\tau)}{x}\right|<G.$$

令 $X=\max\{2(X_0+1), X_1\}$，则当 $x>X$ 时，恒有 $\frac{f(x)}{x}>G$. 由此可知 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$.

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$，结论误写为 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\infty$. 例如，按下式定义 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$：

$$f(x)=\begin{cases} 2n, & 2n \leqslant x<2n+1, \\ 0, & 2n+1 \leqslant x<2n+2, \end{cases} \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

则显然 $f(x)$ 满足原题的条件(1)和(2)(这时 $a=0$)，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=\infty$；但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\neq\infty$（实际 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在，$\varliminf\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$）.

【610】 证明：若(1)函数 $f(x)$ 定义于区域 $x>a$ 内；(2)在每一个有限的区域 $a<x<b$ 内是有界的；(3)存在着有限的或无穷的（带确定符号的无穷，即 $+\infty$ 和 $-\infty$）*) 极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}=l,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{n+1}}=\dfrac{l}{n+1}$.

证 先证一条一般性的定理（Stolz 定理在函数情形的推广）若：(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于区域 $x>a$ 内；(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限区域 $a<x<b$ 内有界，并且 $g(x)$ 当 $x>a$ 时满足 $g(x+1)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$；(3)存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=l\quad(l\text{ 为有限数或为 }+\infty\text{ 或为 }-\infty)；$$

则必 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

证如下：

先证 l 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$. 存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现设 $x>X_0+1$. 于是，恰有一个正整数 n（依赖于 x），使 $n\leqslant x-X_0<n+1$. 令 $\tau=x-X_0-n$，则 $0\leqslant\tau<1$，$x=X_0+\tau+n$. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\cdot\left[\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right],\end{aligned}$$

而

$$\left|\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

又由于

$$g(x)=g(X_0+\tau+n)>g(X_0+\tau+n-1)>g(X_0+\tau+n-2)>\cdots>g(X_0+\tau),$$

从而，

$$\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>0(k=1,2,\cdots,n)；$$

由此可知

$$\left|\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0-\tau)}-l\right|<\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

容易直接验证等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}-l=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\left[\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}-l\right]+\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上有界，故必有正数 $X_1>a$ 存在，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\quad\left|\frac{f(X_0+\tau)-lg(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是，当 $x>X$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\frac{3}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$，$l$ 为有限数获证.

下设 $l=+\infty$（若 $l=-\infty$，则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l=+\infty$ 的情形）. 任给 $G>0$，存在正数 $X_0>a$，使当 $x\geqslant X_0$ 时，恒有

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}>4G.$$

当 $x>X_0+1$ 时，仿前一段之证，有

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}\cdot\frac{f(X_0+\tau+k)-f(X_0+\tau+k-1)}{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}$$

从而，

$$\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}>4G\sum_{k=1}^{n}\frac{g(X_0+\tau+k)-g(X_0+\tau+k-1)}{g(x)-g(X_0+\tau)}=4G.$$

易知

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right]\cdot\frac{f(x)-f(X_0+\tau)}{g(x)-g(X_0+\tau)}+\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}.$$

根据 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ 以及 $f(x)$，$g(x)$ 在 $X_0\leqslant x<X_0+1$ 上的有界性，可取正数 $X_1>a$，使当 $x>X_1$ 时，恒有

$$\left|\frac{g(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<\frac{1}{2},\quad\left|\frac{f(X_0+\tau)}{g(x)}\right|<G.$$

令 $X=\max\{X_0+1,X_1\}$. 于是，当 $x>X$ 时，恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{1}{2}\cdot4G-G=G.$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题，在一般性定理中取 $g(x)=x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件，并且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(n+1)x^n+\frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1}+\cdots+(n+1)x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x+1)-f(x)}{x^n}\cdot\frac{1}{(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)nx^{-1}+\cdots+(n+1)x^{-n+1}+x^{-n}}\right]=\frac{l}{n+1}.$$

由此，根据此一般性定理，即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{n+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{n+1}$.

证毕.

*）原题所说的无穷，必须是带确定符号的无穷，即 $+\infty$ 或 $-\infty$；参看 609 题末尾加的注.

注 608 题的(1)和 609 题可直接从上述一般性定理推出. 实际上，只需令 $g(x)=x$，由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{g(x+1)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]$$

即知.

【611】 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^x$.

证 (1)当 $x=0$ 时是显然的；当 $x\neq0$ 时，令 $y_n=\frac{n}{x}$，由 71 题的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n\cdot x}=e^x;$$

(2) 当 $x=0$ 时是显然的，我们先讨论 $x>0$ 的情形. 由牛顿二项式定理知

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

另一方面，当 $m>n$ 时有

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m>1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

令 $m\to\infty$（n 保持不变），得

$$e^x\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)=e^x\quad(x>0).$$

由于

$$\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)\left(1-x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\right)=1+(-1)^n\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2,$$

而由 61 题知，对固定的 x 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$. 于是，对于 $x<0$，仍然有

$$\lim_{n\to\infty}(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!})=e^x\quad(x<0).$$

【627】 求下列曲线的渐近线并作其图像：

(1) $y=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$；　　(4) $y=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$.

提示 (1)注意 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，并利用 626 题的结果，即得渐近线：$x=1$，$x=-2$ 及 $y=1$.(4)仿(2).

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to1}y=\infty$ 及 $\lim\limits_{x\to-2}y=\infty$，所以，直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次，因为

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x^2+x-2)}=0,$$

而

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=1,$$

所以，$y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2<x<1$ 时，$y<0$，故曲线在 Ox 轴的下方；

当 $x>1$ 或 $x<-2$ 时，$y>0$，故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点：


$A(2,1)$，$B(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$C(4,\frac{8}{9})$，$D(-3,\frac{9}{4})$，…，

并用光滑曲线连接，即得图像(图 627−1).

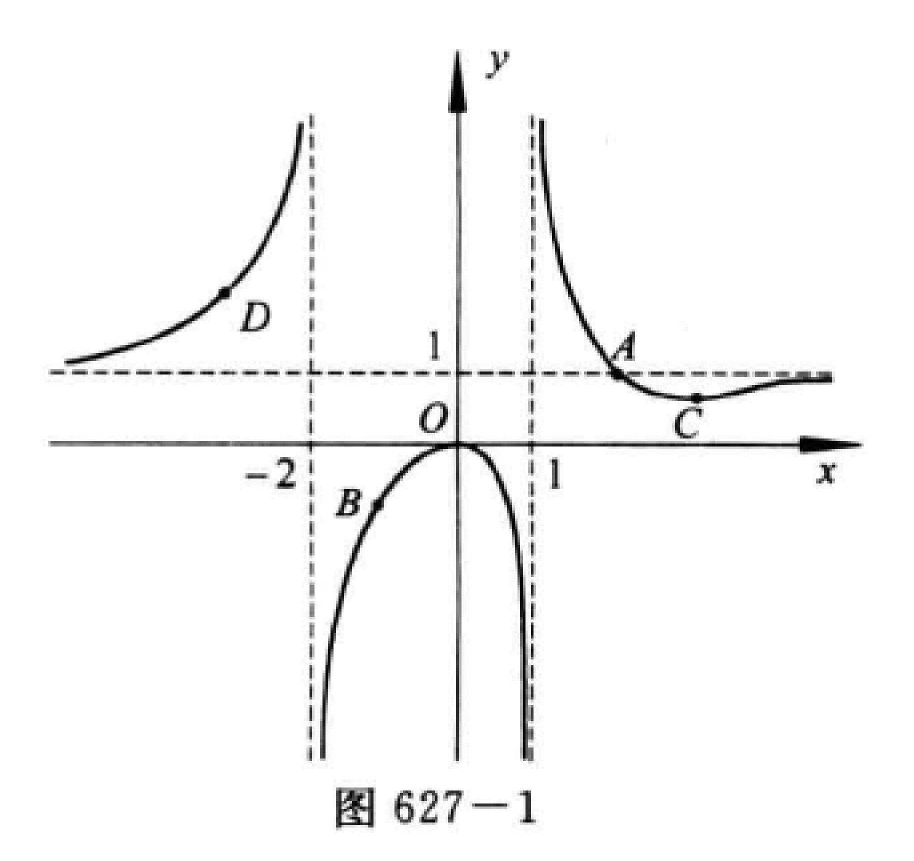


图 627−1

(4) 当 $x>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=1,\quad b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x-1}=0,$$

故渐近线为 $y=x$；当 $x<0$ 时，

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x(e^x-1)}=0,\quad b=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{e^x-1}=0,$$

故另一渐近线为 $y=0$.

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是"可去的间断").

因为 $y>0$,故图像始终在 Ox 轴的上方.如图 627－2 所示.

图 627－2

求下列极限:

【628】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

解题思路 注意到

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}),$$

当 $|x|=1$ 时,不等式右端趋于零.当 $|x|\neq1$ 时,

$$\text{右端}=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

利用 61 题的结果也趋于零.

解 由于

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}(1+|x|+\cdots+|x|^{n-1}).$$

当 $|x|=1$ 时,上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!}\to0\ (n\to\infty)$;

当 $|x|\neq1$ 时,此式为

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}=\frac{1}{1-|x|}\cdot\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{|x|}{n+1}\cdot\frac{(|x|^2)^n}{n!}\right].$$

由 61 题的结果知:$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\to0$, $\frac{(|x|^2)^n}{n!}\to0\ (n\to\infty)$,故当 $n\to\infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1-|x|^n}{1-|x|}\to0$.

于是,对于任意实数 x,有 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]=0$.

【629】 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]$,若 $|x|<1$.

提示 由 $1+x^{2^k}=\frac{1-x^{2^{k+1}}}{1-x^{2^k}}\ (k=0,1,2,\cdots,n)$ 可得 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$.

解 因为

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\quad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},\quad\cdots,\quad 1+x^{2^n}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}.$$

又因 $|x|<1$,故当 $n\to\infty$ 时,$x^{2^{n+1}}\to0$. 最后得到

$$\lim_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})]=\frac{1}{1-x}.$$

【631】 设 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$,其中 $\psi(x)>0$,再设 $n\to\infty$ 时 $\alpha_{mn}\rightrightarrows0\ (m=1,2,\cdots,n)$,换言之,对于任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N(\varepsilon)$,当 $m=1,2,\cdots,n$ 且 $n>N(\varepsilon)$ 时 $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$. 再假定 $\alpha_{mn}\neq0$. *)

证明:

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{m})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{m})],\qquad(1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $0<|x|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1\right|<\varepsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x)>0$)，

$$(1-\varepsilon)\psi(x)<\varphi(x)<(1+\varepsilon)\psi(x). \tag{2}$$

由 $\alpha_{mn}\neq 0$ 以及 $\alpha_{mn}\Rightarrow 0\ (m=1,2,\cdots,n)$知，必有正整数 $N=N(\varepsilon)$存在，使当 $n>N$ 时，恒有

$$0<|\alpha_{mn}|<\delta\quad (m=1,2,\cdots,n).$$

于是，

$$(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})<\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})\quad (n>N,m=1,2,\cdots,n).$$

将这 n 个不等式相加，得

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})<\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\quad (n>N).$$

即

$$1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon\quad (n>N).$$

由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1$. 由假定，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$存在，故

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

证毕.

*) 作者注：此题应加上条件 $\alpha_{mn}\neq 0$(原书没有)，因为 $\varphi(x)$或$\psi(x)$都可能在 $x=0$ 处无定义. 另外，$m=1,2,\cdots$ 应改为 $m=1,2,\cdots,n$.

利用上述定理，求：

【632】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

解题思路 令 $x=\dfrac{k}{n^2}$，$\varphi(x)=\sqrt[3]{1+x}-1$，$\psi(x)=\dfrac{x}{3}$. 先求出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$，其次，说明$\dfrac{k}{n^2}\Rightarrow 0\ (n\to\infty;k=1,2,\cdots,n)$. 最后，求出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{3n^2}=\dfrac{1}{6}$. 利用 631 题的结果，即知所求的极限也是$\dfrac{1}{6}$.

下列各题(633～636)的思路相同.

解 设 $x=\dfrac{k}{n^2}$，我们将首先说明它满足 631 题的条件. 首先，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{\frac{x}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=1,$$

其次，$\dfrac{k}{n^2}\Rightarrow 0\quad (n\to\infty;\ k=1,2,\cdots,n)$. 最后，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{3n^2}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{n^2}=\dfrac{1}{6}$. 所以，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{6}.$$

【635】 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

提示 令 $y=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$，则有 $\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$. 利用631题的结果，先求出 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

解 设 $y=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$, $\ln y=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

我们考虑下列极限，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$，又 $\frac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$（$n\to\infty$ 时，$k=1,2,\cdots,n$），且有 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{2}$，所以，$\lim_{n\to\infty}\ln y=\frac{1}{2}$，

即 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

【638】 函数序列 $y_n=y_n(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 用以下的方法来确定：$y_1=\frac{x}{2}$，$y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$. 求 $\lim_{n\to\infty}y_n$.

解 当 $x=0$ 时，$y_n=0$，$n=1,2,\cdots$，则 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

当 $0<x\leqslant 1$ 时，用数学归纳法可证 $y_n>0$，$n=1,2,\cdots$：$y_1>0$. 若 $y_k>0$，由 $x>y_{k-1}^2$，可得

$$y_{k+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_k^2}{2}=\frac{4x-(x-y_{k-1}^2)^2}{8}\geqslant\frac{3x}{8}>0.$$

因而有

$$y_1-y_3=\frac{y_2^2}{2}>0,\quad y_2-y_4=\frac{y_3^2-y_1^2}{2}<0,\quad\cdots$$

用数学归纳法可证

$$y_{2n}-y_{2n+2}<0,\quad y_{2n-1}-y_{2n+1}>0\quad(n=1,2,\cdots).$$

即

$$\frac{x}{2}=y_1>y_3>\cdots>0,\quad 0<y_2<y_4<\cdots<\frac{x}{2}.$$

可见序列 $y_1,y_3,\cdots$ 及序列 $y_2,y_4,\cdots$ 都是收敛的. 设极限分别为 A_1,A_2，由

$$y_{2n}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n-1}^2}{2}\quad\text{及}\quad y_{2n+1}=\frac{x}{2}-\frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2=\frac{x}{2}-\frac{A_1^2}{2}$，$A_1=\frac{x}{2}-\frac{A_2^2}{2}$，相减得 $A_1-A_2=(A_1-A_2)\frac{(A_1+A_2)}{2}$. 而 $0\leqslant A_1\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，$0\leqslant A_2\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，故

$$A_1=A_2=A.$$

用极限定义直接可以证明：若 $\{y_n\}$ 的两个子序列 $\{y_{2n}\}$ 及 $\{y_{2n-1}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 收敛于同一个极限，则 $\{y_n\}$ 也收敛于这个极限，由 $A=\frac{x}{2}-\frac{A^2}{2}$ 解得 $A=\sqrt{1+x}-1$，即 $\lim_{n\to\infty}y_n=\sqrt{1+x}-1$.

此结果对 $x=0$ 也成立.

【640】 为了求开普勒方程

$$x-\varepsilon\sin x=m\quad(0<\varepsilon<1)\tag{1}$$

的近似解，假设

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \cdots,\ x_n=m+\varepsilon\sin_{n-1},\ \cdots\quad(\text{逐步逼近法}).$$

证明：存在 $\xi=\lim_{n\to\infty}x_n$，且数 ξ 为方程(1)的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_m-x_n|$. 由于

$$x_2-x_1=\varepsilon(\sin x_1-\sin x_0)=2\varepsilon\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2},$$

所以，

$$|x_2-x_1|\leqslant 2\varepsilon\left|\sin\frac{x_1-x_0}{2}\right|\leqslant 2\varepsilon\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}=\varepsilon|x_1-x_0|.$$

同理可证

$$|x_3-x_2|\leqslant\varepsilon^2|x_1-x_0|.$$

设

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|,$$

则有

$$|x_{n+1}-x_n|=2\varepsilon\left|\sin\frac{x_n-x_{n-1}}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right|\leqslant\varepsilon|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^n|x_1-x_0|.$$

由数学归纳法得知，对于任意的正整数 n，均有 $|x_n-x_{n-1}|\leqslant\varepsilon^{n-1}|x_1-x_0|$. 于是，当 $m>n$ 时，有

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\leqslant(\varepsilon^{m-1}+\varepsilon^{m-2}+\cdots+\varepsilon^n)|x_1-x_0|$$
$$=\varepsilon^n\cdot\frac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}\cdot|x_1-x_0|,$$

而 $|x_1-x_0|=\varepsilon|\sin x_0|\leqslant\varepsilon$，所以，$|x_m-x_n|\leqslant\varepsilon^{n+1}\cdot\dfrac{1-\varepsilon^{m-n}}{1-\varepsilon}<\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}$. 由此知 $|x_m-x_n|\to 0\ (n\to\infty)$. 按柯西准则得知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设其值为 ξ，由等式 $x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1}$ 取极限即得 $\xi=m+\varepsilon\sin\xi$. 这就是说，变量 x_n 的极限 ξ 是方程(1)的根.

最后，证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根，则 $\xi_1-\xi=\varepsilon(\sin\xi_1-\sin\xi)$，由此得

$$|\xi_1-\xi|\leqslant\varepsilon|\xi_1-\xi|.$$

因为 $0<\varepsilon<1$，故 $\xi_1=\xi$.

于是，我们就证明了 ξ 是方程(1)的唯一的根.

§6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 记号

$$\varphi(x)=O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x\to a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=k\quad(0<|k|<+\infty).$$

特别是，若当 $x\to 0$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n **阶无穷小**.

仿此，若当 $x\to\infty$ 时，有

$$\varphi(x)=O^*(x^n)\quad(n>0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n **阶无穷大**.

2° 记号

$$\varphi(x)=o(\psi(x))$$

表示当 $x\to a$ 时，函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小，或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大，就是说

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0.$$

3° 若当 $x\to a$ 时，无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶（在广义的意义上）不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶（或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶），即

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)}=k \quad (0\leqslant k<+\infty),$$

则约定写为：

$$\varphi(x)=O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x\to a$ 时为等价的[$\varphi(x)\sim\psi(x)$].

例如，当 $x\to 0$ 时，有：

$$\sin x\sim x;\quad \tan x\sim x;\quad a^x-1\sim x\ln a(a>0);\quad \sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n};\quad \ln(1+x)\sim x.$$

一般地说来，$\varphi(x)+o(\varphi(x))\sim\varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时，已知函数可用其等价的函数来代换.

【645】 把圆心角 $AOB=x$(图 645)当作一阶无穷小量，求下列各无穷小量的阶：

(1) 弦 AB； (2) 拱高 CD； (4) 三角形 ABC 的面积.

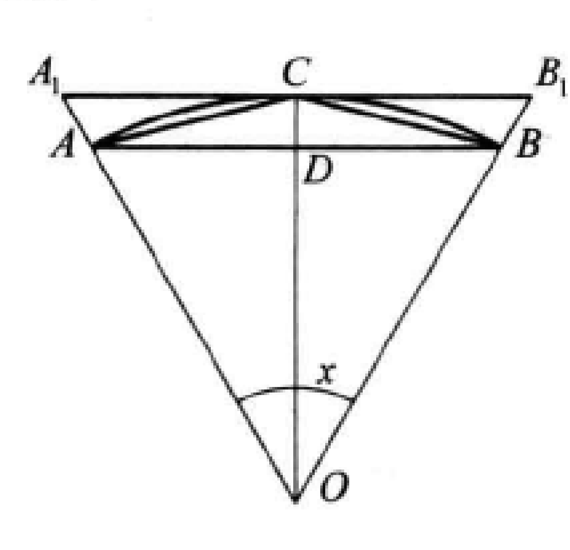


图 645

解 (1) $AB=2R\sin\frac{x}{2}$，式中 R 为圆的半径. 因为

$$\frac{AB}{x}=\frac{2R\sin\frac{x}{2}}{x}\to R\ (x\to 0),$$

所以，弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

(2) $CD=R-R\cos\frac{x}{2}=2R\sin^2\frac{x}{4}$. 因为$\frac{CD}{x^2}\to\frac{R}{8}$，所以，拱高 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

(4) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2R^2\sin\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}$. 因为$\frac{S_{\triangle ABC}}{x^3}\to\frac{R^2}{16}$，所以，$\triangle ABC$ 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

【646】 设 $o(f(x))$ 为当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数，且 $O(f(x))$ 为 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶(在广义的意义上)的任意无穷大函数，其中 $f(x)>0$.

证明：(1) $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$； (2) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$；

(3) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$； (4) $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$；

(5) $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$； (6) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

解题思路 (2)由 133 题(2)的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o[f(x)]}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}=0$.

(3)利用 133 题(2)的结果，仿(2).

(4)利用 132 题(2)的结果.

(5)利用 131 题(2)的结果.

(6)利用 132 题(2)的结果.

证 (1)因为

$$\lim_{x\to a}\frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)]}\cdot\frac{o[f(x)]}{f(x)}\right\}=0,$$

故 $o\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(2) 由 133 题(2)的结果，有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o[f(x)]}\cdot\lim_{x\to a}\frac{o\{f(x)\}}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O[o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此,$O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(3) 仍由 133 题(2)的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o\{O[f(x)]\}|}{f(x)}=\lim_{x\to a}\left|\frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\right|\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=0$, 即 $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$.

(4) 由 132 题(2)的结果,有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O\{O[f(x)]\}|}{O[f(x)]}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{O[f(x)]}{f(x)}<+\infty,$$

故 $O\{O[f(x)]\}=O[f(x)]$.

(5) 由 131 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]+o[f(x)]|}{f(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}+\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|o[f(x)]|}{f(x)}=\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}<+\infty.$$

故 $O[f(x)]+o[f(x)]=O[f(x)]$.

(6) 由 132 题(2),有

$$\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)}\leqslant\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[f(x)]|}{f(x)}\cdot\overline{\lim_{x\to a}}\frac{|O[g(x)]|}{g(x)}<+\infty,$$

故 $O[f(x)]O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$.

【647】 设 $x\to+0$ 和 $n>0$. 证明:

(1) $CO(x^n)=O(x^n)$ (C 为常数); (2) $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n<m$);

(3) $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

证 (1) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|CO(x^n)|}{x^n}=|C|\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $CO(x^n)=O(x^n)$.

(2) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)+O(x^m)|}{x^n}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}+\overline{\lim_{x\to+0}}\left(\frac{|O(x^m)|}{x^m}\cdot x^{m-n}\right)=\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}<+\infty,$$

故 $O(x^n)+O(x^m)=O(x^n)$ ($n<m$).

(3) 由

$$\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}}\leqslant\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^n)|}{x^n}\cdot\overline{\lim_{x\to+0}}\frac{|O(x^m)|}{x^m}<+\infty,$$

得知 $O(x^n)O(x^m)=O(x^{n+m})$.

【653】 设 $x\to0$. 分出下列函数的形如 Cx^n(C 为常数)的主部,并求其对于无穷小变量 x 的阶:

(2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$; (4) $\tan x-\sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$,即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to1 \quad 或 \quad f(x)=g(x)+o(x) \quad (x\to0).$$

(2) 因为 $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\to1$ $(x\to0)$,故其主部为 x,它对于 x 是一阶的.

(4) 因为 $\tan x-\sin x=\dfrac{2}{\cos x}\sin x\sin^2\dfrac{x}{2}$,于是,$\dfrac{\tan x-\sin x}{\dfrac{x^3}{2}}\to1$ $(x\to0)$,故其主部为$\dfrac{x^3}{2}$,它对于 x 是三

阶的.

【656】 设 $x\to+\infty$. 分出下列函数的形如 Cx^n 的主部,并求其对于无穷大量 x 的阶:

(3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; (4) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

解 (3) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}=x^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\right)$,于是,$\frac{\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+\sqrt[6]{\frac{1}{x}}\to1$ $(x\to+\infty)$,故其主部为 $x^{\frac{2}{3}}$,它对于无穷大量 x 是$\frac{2}{3}$阶的.

(4) 因为$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}}\to1$ $(x\to+\infty)$,故其主部为$\sqrt[8]{x}$,它对于无穷大量 x 是$\frac{1}{8}$阶的.

【661】 证明:对于任意的函数序列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots \quad (x_0<x<+\infty).$$

可举出一函数 $f(x)$,当 $x\to+\infty$时它比函数 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N>x_0$. 定义 $x_0<x<+\infty$上的函数 $f(x)$如下:

$$f(x)=\begin{cases}n\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|+1\right), & n\leqslant x<n+1,(n=N,N+1,\cdots);\\ 0, & x_0<x<N.\end{cases}$$

于是,对任何正整数 n,当 $x>\max\{N,n\}$时,有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\left(\sum_{k=1}^{[x]}|f_k(x)|+1\right)}<\frac{1}{[x]},$$

其中$[x]$表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_n(x)}{f(x)}=0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

故当 $x\to+\infty$时,$f(x)$比 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$中的每一个都增加得较快.

§7. 函数的连续性

1° 函数的连续性 设

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{1}$$

即,函数 $f(x)$对 $x=x_0$ 有定义,并且对于每一个 $\varepsilon>0$,都存在 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,对于 $f(x)$的有意义的一切值,不等式

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

都成立,则称函数 $f(x)$当$x=x_0$ 时(或在点 x_0)是连续的.

若函数 $f(x)$在所给的集合 X(开区间,闭区间等等)上的每一点都是连续的,则称函数 $f(x)$在集合 $X=\{x\}$上是连续的.

若某值 $x=x_0$ 属于函数 $f(x)$的定义域 $X=\{x\}$或为此集合的聚点,而当 $x=x_0$ 时,等式(1)不成立[即,(ⅰ)数 $f(x_0)$不存在,换言之,函数在点 $x=x_0$ 没有定义;或(ⅱ)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;或(ⅲ)公式(1)的两端虽有意义,但它们不相等],则称 x_0 为函数 $f(x)$的不连续点(不连续点也称间断点).

不连续点分为:(1)第一类不连续点 x_0,在这些点存在有限的单侧极限:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x) \text{ 和 } f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

(2)第二类不连续点——其余的一切不连续点.

差 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$称为函数在点 x_0 的突跃.

若等式

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)$$

成立,则不连续点 x_0 称为可去的.若极限 $f(x_0-0)$或 $f(x_0+0)$中至少有一个等于符号∞,则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式

$$f(x_0-0)=f(x_0)[\text{或 } f(x_0+0)=f(x_0)]$$

成立,则称函数 $f(x)$在点 x_0 是左(或右)连续.函数 $f(x)$在点 x_0 连续的充分必要条件为下面三个数相等:

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0).$$

2° **初等函数的连续性** 若函数 $f(x)$和 $g(x)$在 $x=x_0$ 连续,则函数

(1) $f(x)\pm g(x)$; (2) $f(x)g(x)$; (3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $[g(x_0)\neq 0]$

也在 $x=x_0$ 连续.

特殊情形:(1)有理函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的;

(2)分式有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值,都是连续的.

一般地说,基本初等函数:x^n,$\sin x$,$\cos x$,$\tan x$,a^x,$\log_a x$,$\arcsin x$,$\arccos x$,$\arctan x$,…在一切使它们有意义的点都连续.

更为一般的结果如下:若函数 $f(x)$当 $x=x_0$ 时连续,函数 $g(y)$当$y=f(x_0)$时连续,则函数 $g(f(x))$当 $x=x_0$ 时连续.

3° **关于连续函数的基本定理** 若函数 $f(x)$在有限的闭区间$[a,b]$上连续,则:(1)函数 $f(x)$在此闭区间内是有界的;(2)达到其下确界 m 和上确界 M(魏尔斯特拉斯定理);(3)在每一个区间$(\alpha,\beta)\subset[a,b]$中,函数取到所有介于 $f(\alpha)$和 $f(\beta)$间的值(柯西定理).例如,若 $f(\alpha)f(\beta)<0$,则可找到一个数值 γ $(\alpha<\gamma<\beta)$,使得 $f(\gamma)=0$.

【669】 设对于某些数 $\varepsilon>0$,可找到对应的数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使得只要 $|x-x_0|<\delta$,则

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

若:(1) 诸数 ε 形成一有限的集合;(2) 数 ε 组成分数$\varepsilon=\dfrac{1}{2^n}(n=1,2,\cdots)$的无穷集合,则可否断定函数$f(x)$在点 x_0 连续?

提示 (1) 不能.(2) 可以.可取充分大的 n,使$\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

解 (1) 不能.因为 ε 不能任意地小.

(2) 可以.事实上,对于任给的 $\varepsilon>0$,总可以取充分大的 n,使$\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.于是,存在 $\delta>0$,使当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{1}{2^n}<\varepsilon$.

【670】 设已知函数 $f(x)=x+0.001[x]$.证明:对于每一个 $\varepsilon>0.001$,可以选出 $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$,使得只要$|x'-x|<\delta$,则$|f(x')-f(x)|<\varepsilon$.然而当 $0<\varepsilon\leqslant 0.001$时,对于所有的 x 值都无法选出这样的 δ.

这个函数的连续性在哪些点遭到破坏?

证 当 $\varepsilon>0.001$，且 $|x'-x|<1$ 时，

$$|f(x')-f(x)|=|x-x'+0.001([x]-[x'])|\leqslant|x-x'|+0.001$$

此时只要取 $\delta=\min\{\varepsilon-0.001,\ 1\}$，则当 $|x-x'|<\delta$ 时恒有 $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

当 $0<\varepsilon\leqslant0.001$，且 x_0 不为整数时，有整数 n，使得 $n<x_0<n+1$. 只要取

$$\delta=\min(x_0-n,n+1-x_0,\varepsilon)>0,$$

则当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $[x]=[x_0]$. 从而，

$$|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta\leqslant\varepsilon.$$

而当 $x_0=n$ 为整数时，则对于无论怎样取正数 δ，总有 x 满足 $x<x_0$ 及 $x_0-x<\delta$，此时

$$|f(x)-f(x_0)|=(x_0-x)+0.001>\varepsilon.$$

于是，函数 $f(x)$ 在 $x=n$（整数）的点失去了连续性.

【672】 设对于每一个数 $\varepsilon>0$，都存在数 $\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得若 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则 $|x-x_0|<\delta$. 由此是否可知函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续？这些不等式描述了函数的什么性质？

解 不对，若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 内有定义，则只要取 $\delta=2(b-a)$，不等式 $|x-x_0|<\delta$ 恒成立. 若 (a,b) 为无穷区间，例如，设 $b=+\infty$，则必然 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$. 事实上，若不然，则 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=c<+\infty$. 于是，存在数列 $x_n>a\ (n=1,2,\cdots)$，$x_n\to+\infty$ 使 $f(x_n)\to c$. 由此可知数列 $f(x_n)(n=1,2,\cdots)$ 有界，令

$$\varepsilon_0=\sup\{|f(x_n)|+|f(x_0)|+1\}>0.$$

显然

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon_0\quad(n=1,2,\cdots),$$

但是，

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-x_0|=+\infty,$$

故对此 $\varepsilon_0>0$，不存在对应的 $\delta=\delta(\varepsilon_0,x_0)>0$，此与假定矛盾. 由此可知，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$.

求出下列函数的不连续点，并研究这些点的性质：

【691】 $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}y=1$，$\lim\limits_{x\to k\pi}y=\infty$（$k$ 为不等于零的整数），所以，$x=0$ 为"可去"的不连续点，而 $x=k\pi$ $(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为无穷型不连续点.

【694】 $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点. 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}-0}y=(-1)^k$，$\lim\limits_{x\to\frac{1}{k}+0}y=(-1)^{k-1}$，故 $x=\dfrac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

【700】+ $y=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to1+0}y=1$，$\lim\limits_{x\to1-0}y=0$，$\lim\limits_{x\to+0}y=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-0}y=+\infty$，所以，$x=1$ 为第一类不连续点，而 $x=0$ 为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图像.

【708】 $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos\dfrac{1}{x}=0$ 的点，即 $x=\dfrac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第一类不连续点.

图 708 仅画了当$k=0,\pm1,\pm2$时的情形，图像关于 Oy 轴对称.

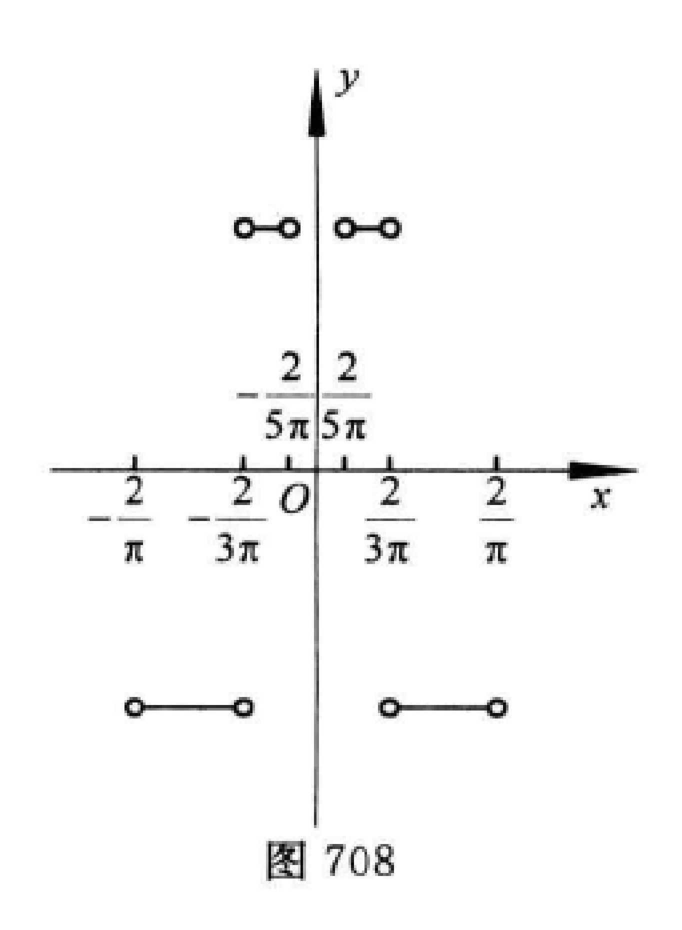


图 708

【709】 $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x=0$ 为第二类不连续点.

$$x=\pm\frac{1}{k}\quad 及\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{k}}(k=1,2,\cdots)$$

为第一类不连续点.

图 709 的两轴所取的比例单位不同.

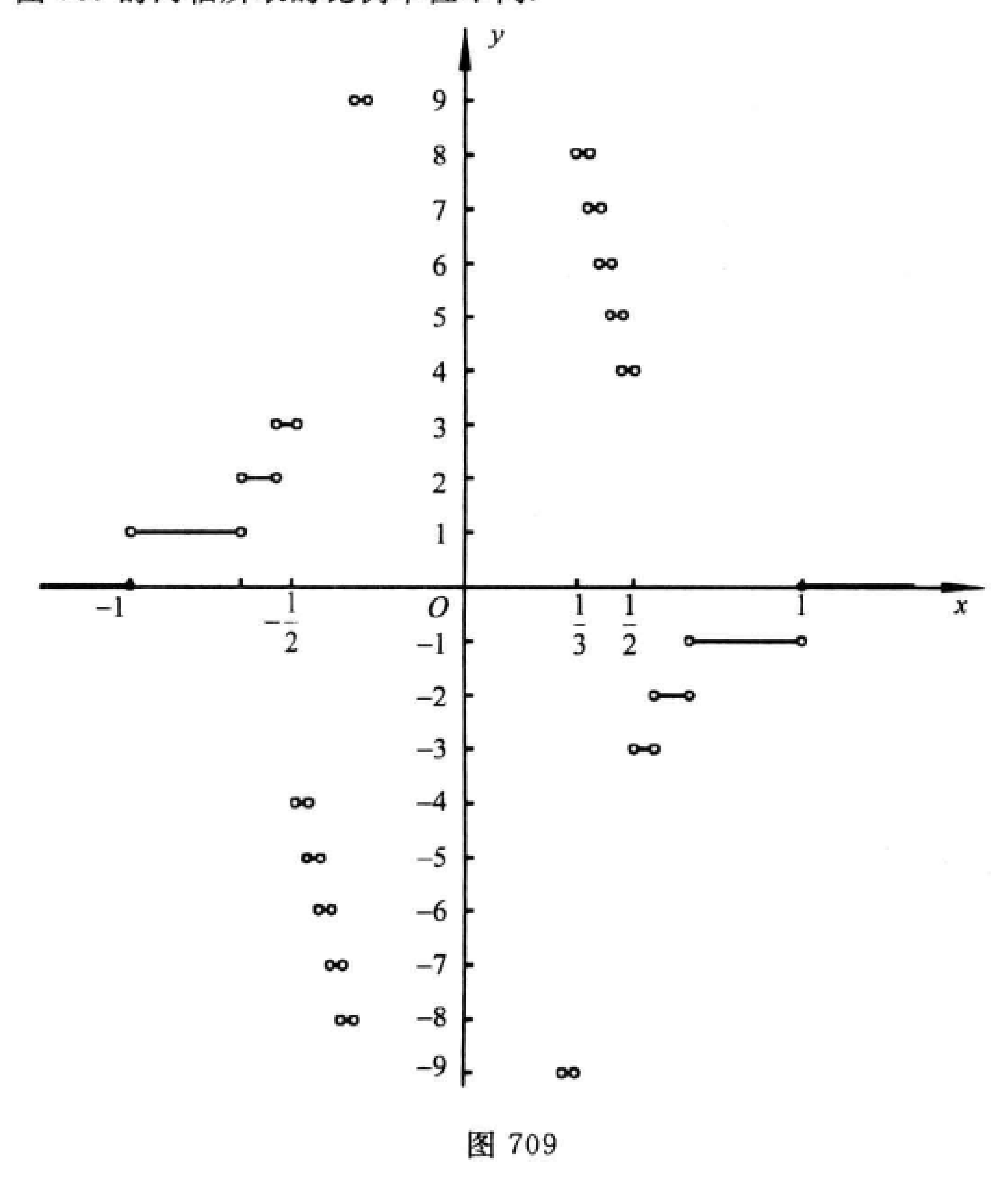


图 709

【710】 $y=\cot\frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin\frac{\pi}{x}=0$，即 $x=\frac{1}{k}(k=\pm1,\pm2,\cdots)$为无穷型不连续点. $x=0$ 为第二类不连续点.

图像关于原点对称，如图 710 所示.

当 $x\to-\infty$时，$y\to-\infty$；当 $x\to+\infty$时，$y\to+\infty$.

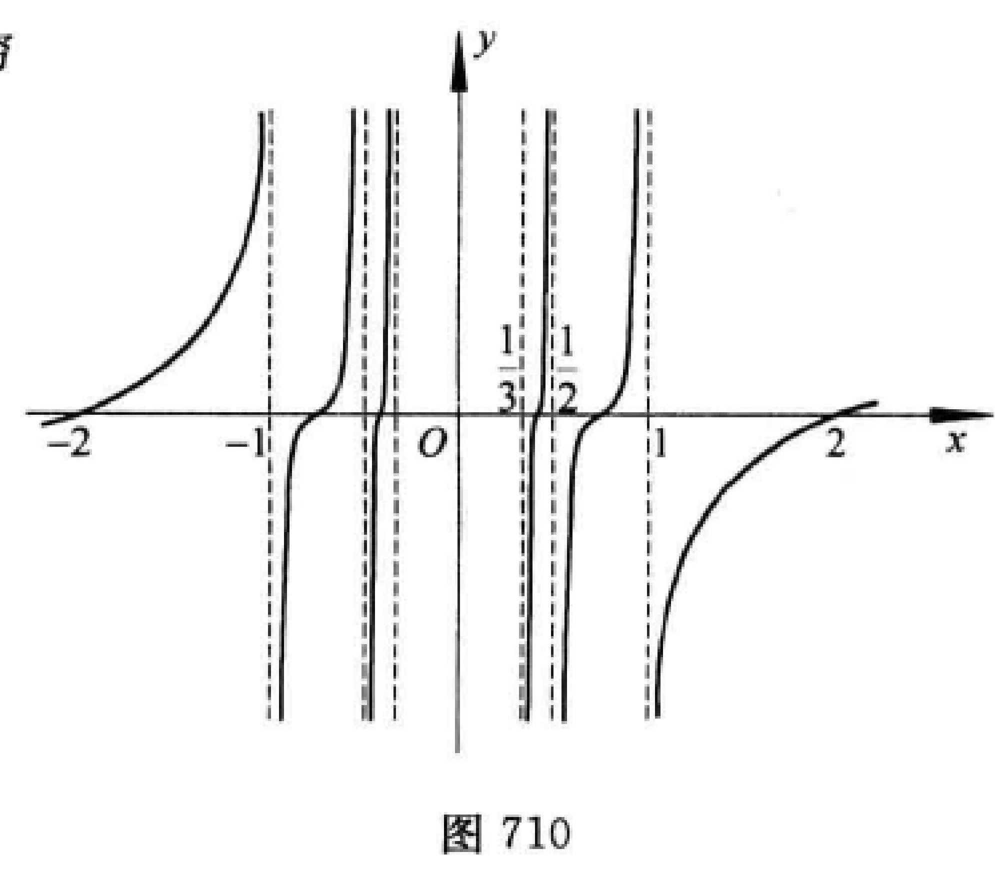


图 710

研究下列函数的连续性并作出其图像：

【724】 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

解
$$y=\begin{cases}x, & |x-k\pi|<\frac{\pi}{6},\\ \frac{x}{2}, & x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}, \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\\ 0, & \frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6}.\end{cases}$$

$x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$为第一类不连续点.

如图 724 所示.

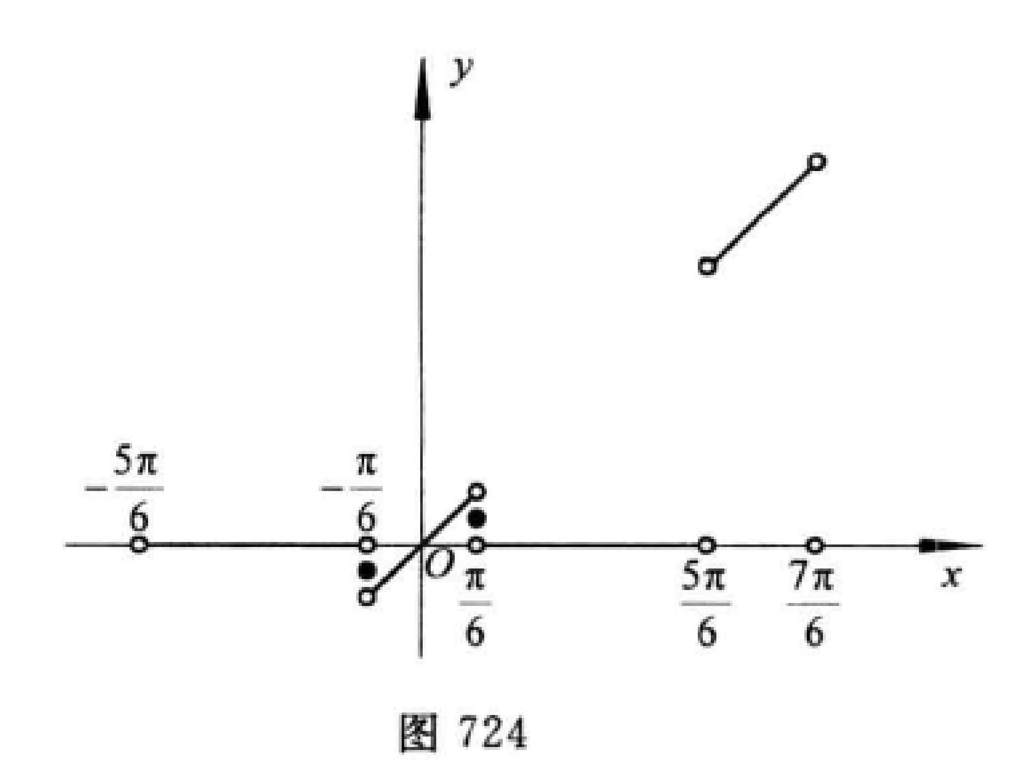


图 724

【732】 函数 $d=d(x)$是数轴 Ox 上的点 x 与由线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $2\leqslant x\leqslant 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式,作出其图像并研究其连续性.

解

$$d=\begin{cases}-x, & -\infty<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant\frac{3}{2},\\ 2-x, & \frac{3}{2}<x<2,\\ 0, & 2\leqslant x\leqslant 3,\\ x-3, & 3<x<+\infty.\end{cases}$$

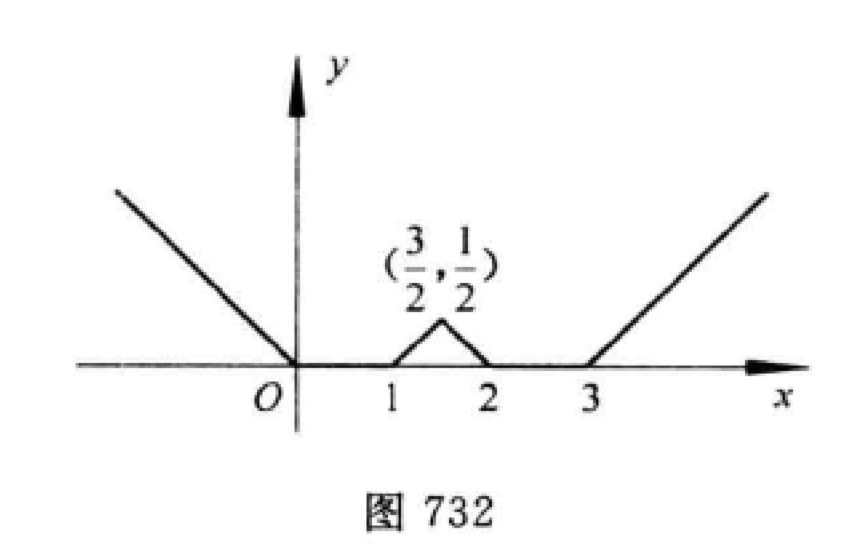


图 732

处处连续,如图 732 所示.

【733】 图像 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图733－1).

函数 $S=S(y)(0\leqslant y<+\infty)$是图像 E 介于平行线 $Y=0$ 及 $Y=y$ 之间的那一部分面积;而函数 $b=b(y)$ $(0\leqslant y<+\infty)$是用平行线 $Y=y$ 去截图像所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式,作出它们的图像并研究其连续性.

解

$$S=\begin{cases}3y-\frac{y^2}{2}, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ \frac{1}{2}+2y, & 1<y\leqslant 2,\\ \frac{5}{2}+y, & 2<y\leqslant 3,\\ \frac{11}{2}, & 3<y<+\infty.\end{cases}$$

处处连续,如图 733－2 所示.

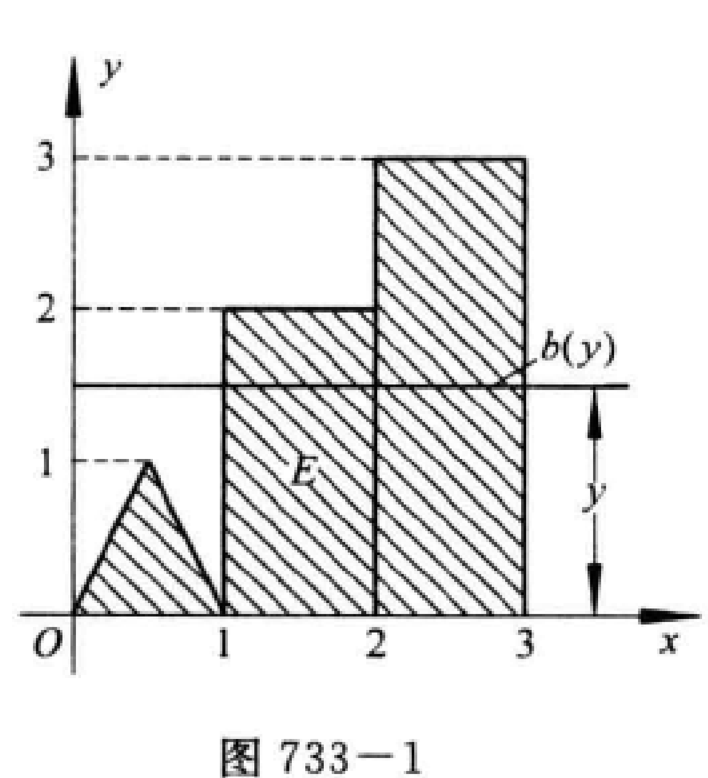


图 733－1

对于函数 $b=b(y)$根据假设,则有如下解析表示式:

$$b=\begin{cases}3-y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 2, & 1<y\leqslant 2,\\ 1, & 2<y\leqslant 3,\\ 0, & 3<y<+\infty.\end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点，如图 733－3 所示.

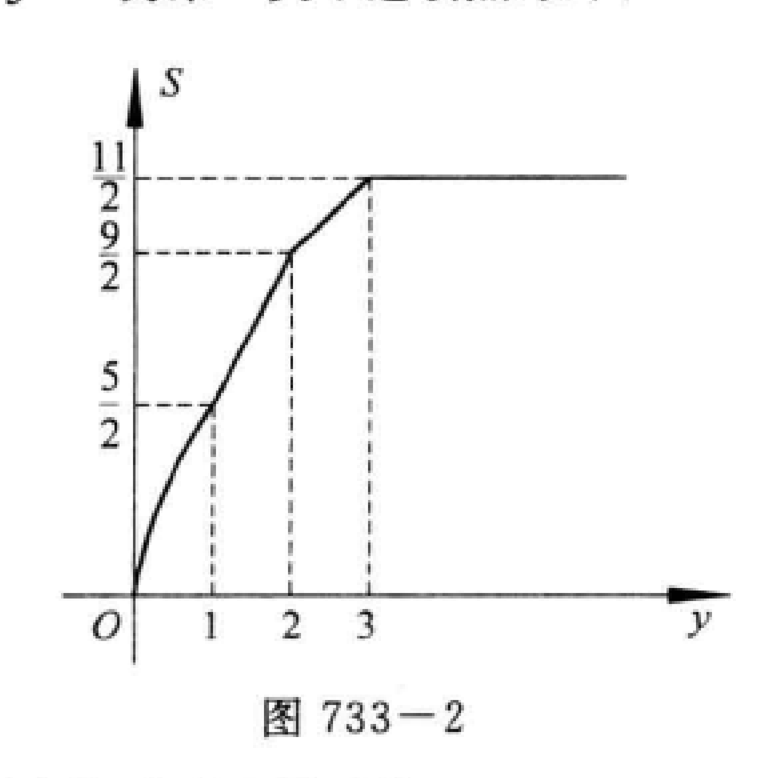


图 733－2

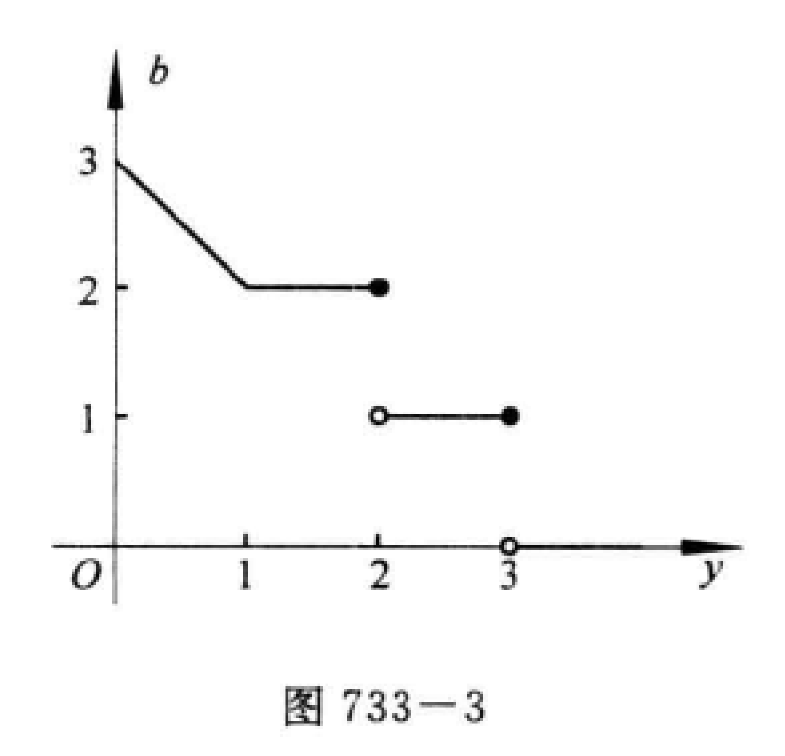


图 733－3

【734】 证明：狄利克雷函数

$$\chi(x)=\lim_{m\to\infty}\{\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\}$$

对于每一个 x 值都是不连续的.

证明思路 令 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!x)$. 当 x 为有理数时，即 $x=\dfrac{q}{p}$（p,q 为互素的整数，且 $p>0$）. 因此，当 $m>p$ 时，有 $f(m,n)=1$，于是，$\chi(x)=1$；当 x 为无理数时，则对任一固定的 m，有 $|\cos(\pi m!x)|<1$，于是，$\chi(x)=0$. 由此可知

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数,}\\ 0, & x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

设 $x_0\in\mathbf{R}$，由于 x_0 的任何邻域中都有无穷多个有理数和无穷多个无理数，故极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\chi(x)$ 不存在，从而 $\chi(x)$ 在任一点 x_0 均不连续.

证 记 $f(m,n)=\cos^n(\pi m!x)$.

当 x 为有理数时，总可认为 $m>p$，其中 $x=\dfrac{q}{p}$（p,q 为互素的整数）. 于是，$f(m,n)=1$，故此时 $\chi(x)=1$；当 x 为无理数时，则对任一固定的 m 而言，$|\cos(\pi m!x)|<1$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)=0$，故此时 $\chi(x)=0$. 总之，

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数,}\\ 0, & x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

由实数的稠密性可知，对于 x 的任意值在其任一邻域内含有无限个有理数和无理数，因而 $\chi(x)$ 的值总在 1 和 0 这两个数中取一个. 这样，$\chi(x)$ 的极限就不存在. 于是，当 x 取任一值时，$\chi(x)$ 都是不连续的.

【736】 证明：黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n}\text{，其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互素的数,}\\ 0, & x\text{ 为无理数.}\end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时不连续的，而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

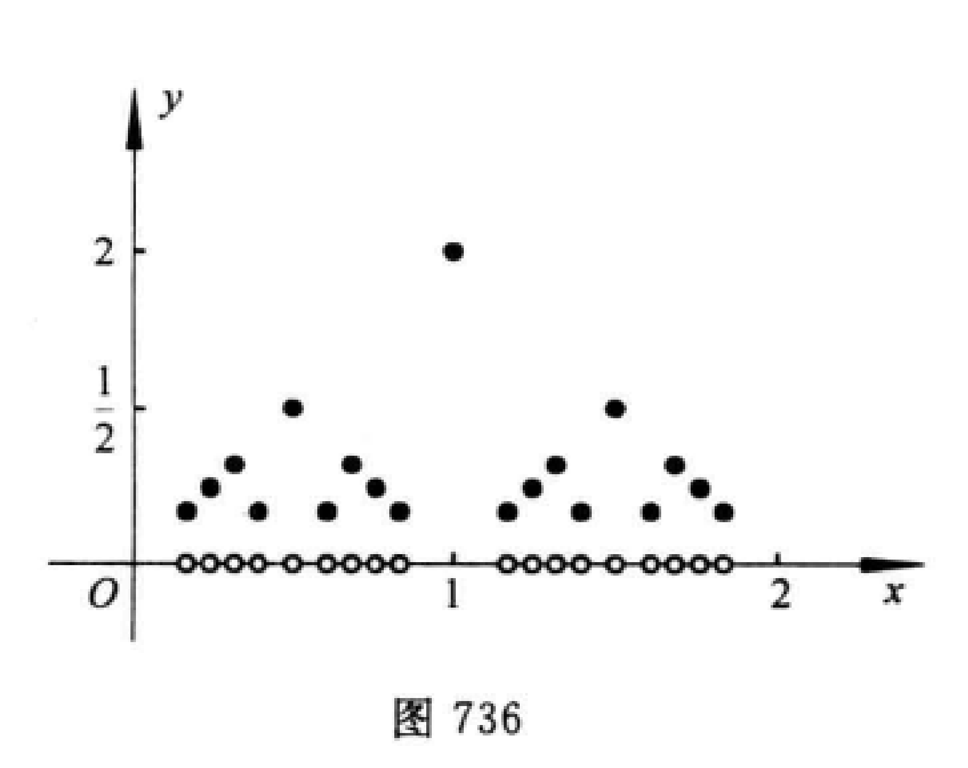


图 736

证 不失一般性，我们仅就区间 $[0,1]$ 讨论，图 736 为 $f(x)$ 在 $x\in[0,2]$ 时的略图.

对于任意的 $x_0\in[0,1]$ 来说，若任取 $\varepsilon>0$，则满足不等式 $n<\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的正整数 n 至多只有有限个，即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\dfrac{m}{n}$，使得 $f\left(\dfrac{m}{n}\right)=\dfrac{1}{n}>\varepsilon$. 因而我们可以取 $\delta>0$，使得 x_0 的邻域 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内不含有这样的

有理数(若 x_0 为有理数,则可能除去 x_0). 于是,只要 $0<|x-x_0|<\delta$,不论 x 是否为有理数,都成立 $|f(x)|<\varepsilon$. 即证明了对于$[0,1]$中任意点 x_0,都成立

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=0.$$

若 x_0 为无理数,则 $f(x_0)=0$,可见 $f(x)$在 x_0 连续;若 x_0 是有理数,则 $f(x_0)\neq 0$,函数 $f(x)$在 x_0 点有"可去"的间断,即点 x_0 为 $f(x)$的"可去"的不连续点.

【741】 设:(1)函数 $f(x)$当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数$g(x)$当 $x=x_0$ 时是不连续的;(2)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$和$g(x)$二者都是不连续的,则此二函数的和 $f(x)+g(x)$在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

提示 (1)用反证法易证不连续.

(2) 不.例如,$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 及 $g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$

解 (1) $f(x)+g(x)$必为不连续的.事实上,设 $F(x)=f(x)+g(x)$.

对于函数 $F(x)-f(x)=g(x)$,如果 $F(x)$在 x_0 连续,则有

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}[F(x)-f(x)]=\lim_{x\to x_0}F(x)-\lim_{x\to x_0}f(x)=F(x_0)-f(x_0)=g(x_0).$$

因此若当 $g(x_0)$有意义,则 $g(x_0)=F(x_0)-f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,这与假设是矛盾的,故 $F(x)$在点 x_0 不连续;若 $g(x_0)$没有意义,那么当然它在 x_0 点不连续.

(2) 不.例如,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}\quad 及\quad g(x)=\begin{cases}-1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续,但其和 $f(x)+g(x)\equiv 0$ 却处处连续.

【742】 设:(1)函数 $f(x)$在点 x_0 连续,而函数 $g(x)$在点 x_0 不连续;(2)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$和 $g(x)$二者都是不连续的,则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$在已知点 x_0 是否必不连续? 举出适当的例子.

提示 (1)不.例如,$f(x)=0$ 及 $g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) 不.例如,$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

解 (1)不.例如,

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}\quad 及\quad f(x)=0.$$

它们满足假设条件,其中 $f(x)$处处连续,而 $g(x)$在点 $x=0$ 不连续,但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 处处连续.

(2) 不.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}\quad 及\quad g(x)=f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续,但其乘积 $f(x)g(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【743】 可否断定不连续函数的平方仍为不连续函数? 举出处处不连续但其平方连续的函数的例子.

解 不能.例如 742 题(2)之例.

又对于函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$ 处处不连续,但平方后所得函数 $f^2(x)\equiv 1$ 却处处连续.

【744】 研究函数 $f[g(x)]$及 $g[f(x)]$的连续性:

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 及 $g(x)=x(1-x^2)$.

解 (2) 因为 $g(x)=x(1-x^2)$当 $x<-1$ 或 $0<x<1$ 时为正,而当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时为负,故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<-1,\\ 0, & x=-1,\\ -1, & -1<x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\\ -1, & x>1.\end{cases}$$

在点 $x=-1,x=0,x=1$ 处不连续. 而 $g[f(x)]\equiv 0$ 却处处连续.

【748】 证明:若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0\in[a,b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续,故存在 $\delta>0$,使当 $|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是,当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,有 $f(x)>f(x_0)-\varepsilon\geqslant m(x_0)-\varepsilon$.

而当 $a\leqslant x\leqslant x_0$ 时, $f(x)\geqslant m(x)>m(x_0)-\varepsilon$. 由此可知当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时, $m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的,故 $m(x_0)\geqslant m(x)\geqslant m(x_0)-\varepsilon$ (当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时).

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0+0}m(x)=m(x_0)$,即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续,不妨设 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在点 $x=x_0$ 达到,即 $m(x_0)=f(x_0)$(否则,若 $m(x_0)=f(x_1)$, $a\leqslant x_1<x_0$. 则显然知,当 $x_1<x<x_0$ 时 $m(x)\equiv m(x_0)$,从而左连续). 任给 $\varepsilon>0$. 仿上述,存在 $\delta>0$,使当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,恒有

$$f(x)<f(x_0)+\varepsilon=m(x_0)+\varepsilon,$$

因此, $m(x)<m(x_0)+\varepsilon$,从而, $m(x_0)\leqslant m(x)<m(x_0)+\varepsilon$ (当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时). 由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$,即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

【750】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 有定义并有界,证明:函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad M(x)=\sup_{a\leqslant\xi<x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是左连续的. 而函数

$$\overline{m}(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\} \quad 和 \quad \overline{M}(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a,b]$ 上是右连续的*).

证 设 $x_0\in(a,b]$,要证 $m(x)$ 在 x_0 左连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,故 $m(x)$ 恒为有限. 任给 $\varepsilon>0$,必存在一点 $\xi_0\in[a,x_0)$,使得 $f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon$. 于是,当 $\xi_0<x<x_0$ 时,必有

$$m(x_0)\leqslant m(x)\leqslant f(\xi_0)<m(x_0)+\varepsilon,$$

由此可知 $\lim\limits_{x\to x_0-0}m(x)=m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a,b]$ 上也为左连续.

*) $\overline{m}(x)$ 和 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 上右连续的结论是错误的,今举反例证明之. 例如,对于有界函数

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant p,\\ 0, & p<x\leqslant b.\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases}-1, & a\leqslant x\leqslant p,\\ 0, & p<x\leqslant b.\end{cases}$$

分别有 $\overline{m}(x)=f_1(x)$, $\overline{M}(x)=f_2(x)$,显然它们在点 p 不是右连续的.

若定义 $\overline{m}(x)=\inf\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$, $\overline{M}(x)=\sup\limits_{x<\xi\leqslant b}\{f(\xi)\}$ 则可证明 $\overline{m}(x)$ 与 $\overline{M}(x)$ 在 $[a,b]$ 上右连续.

【751】 证明:若函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续,且有有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,则此函数在已知区间上是有界的.

证 记$A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，取$\varepsilon=1$，则存在$X>a$，使当$x>X$时，恒有$|f(x)|<|A|+1$，又因$f(x)$在$[a,X]$上连续，因而有界，即存在常数$M_1$，使当$x\in[a,X]$时，恒有$|f(x)|<M_1$，取$M=\max(|A|+1,M_1)$，则当$x\in[a,+\infty)$时，恒有$|f(x)|<M$.

【752】 设函数$f(x)$在区间$(x_0,+\infty)$上连续并有界，证明：对于任何数T，可求得数列$x_n\to+\infty$，使

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

证 不妨设$T>0$，记$g(y)=f(x_0+(y+1)T)-f(x_0+yT)$，$y\geqslant1$. 取一数列$\{\varepsilon_n\}(n=1,2,\cdots)$，且当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to0$. 易见，$g(y)$是$[1,+\infty)$上连续且有界的函数，今按下法取$x_1=x_0+k_1T$，使$|g(k_1)|<\varepsilon_1$，如果$g(1)$，$g(2)$异号，则由连续函数介值定理，存在$k_1$，且$1<k_1<2$，使得$|g(k_1)|=0<\varepsilon_1$，这时取$x_1=x_0+k_1T$. 若$g(1)$与$g(2)$同号，且$g(1)$，$g(2)$，$g(3)$，$g(4)\cdots$都是同号的，不妨设它们均大于零，那么我们可以证明，必存在一个正整数$k_1\geqslant1$，使$g(k_1)<\varepsilon_1$. 因为，若对一切正整数n，$g(n)\geqslant\varepsilon_1$，则由$g(y)$的定义，

$$f(x_0+2T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+T),$$
$$f(x_0+3T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+2T),$$
$$f(x_0+4T)\geqslant\varepsilon_1+f(x_0+3T),$$
$$\vdots$$
$$f(x_0+nT)\geqslant\varepsilon_1+f[x_0+(n-1)T].$$

则$f(x_0+nT)\geqslant(n-1)\varepsilon_1+f(x_0+T)$，这与$f(x)$在$(x_0,+\infty)$内有界矛盾，故必存在正整数$k_1$，使得$|g(k_1)|<\varepsilon_1$，取$x_1=x_0+k_1T$. 然后，取正整数$p_2>k_1+1$，通过考虑$g(p_2)$，$g(p_2+1)$，$\cdots$的符号；仿上，可取$x_2=x_0+k_2T$，$k_2>k_1+1$，使$|g(k_2)|<\varepsilon_2$. 依此类推，我们就可得到一数列$\{x_n\}$适合要求.

【754】 证明：单调有界函数的一切不连续点皆为第一类不连续点.

证 不妨设$f(x)$为单调增函数，取其定义域A中的任意点x_0，且设x_0不是A的左端点，由于$x<x_0$时显然有$f(x)\leqslant f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\leqslant f(x_0)$. 可见若$f(x)$在$x_0$点不连续，则函数在该点只可能有突跃，即第一类不连续点.

【755】 证明：若函数$f(x)$具有下列性质：

(1)在闭区间$[a,b]$上有定义且单调；

(2)取介于$f(a)$和$f(b)$之间所有的数作为其函数值，则此函数在$[a,b]$上连续.

证明思路 用反证法. 设$x_0\in[a,b]$，$f(x_0)$在点x_0不连续，利用754题的结果得出矛盾.

证 用反证法，不妨设单调函数$f(x)$为递增的且在x_0不连续$(x_0\in[a,b])$，由754题知x_0只能是第一类不连续点，则$f(x_0)-f(x_0-0)$及$f(x_0+0)-f(x_0)$中至少有一个大于零，例如$f(x_0)-f(x_0-0)>0$. 于是，由函数$f(x)$的单调性知，$f(x)$无法取到$f(x_0-0)$和$f(x_0)$之间的数值.

这与题设函数$f(x)$的性质(2)矛盾，从而，$f(x)$在$[a,b]$上连续.

【758】 设函数$f(x)$在区间(a,b)上连续，且$l=\varliminf\limits_{x\to a+0}f(x)$及$L=\varlimsup\limits_{x\to a+0}f(x)$.

证明：对于任意的数λ，此处$l\leqslant\lambda\leqslant L$，则存在数列$x_n\to a+0\ (n=1,2,\cdots)$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

证 当$\lambda=l$或$\lambda=L$时结论都是显然的. 因此设$l<\lambda<L$.

由条件有$\{a_n\}$及$\{b_n\}$，$a_n\to a+0$，$b_n\to a+0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=L$. 于是，存在正整数$N$，使当$n>N$时，恒有$f(a_n)<\lambda$及$f(b_n)>\lambda$.

再由$f(x)$的连续性知，在a_n及b_n之间存在x_n，使$f(x_n)=\lambda\ (n>N)$.

这样选取的$\{x_n\}$，由于$a_n\to a+0$，$b_n\to a+0$，故$x_n\to a+0$. 从而，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda$.

§8. 反函数. 用参数形式表示的函数

1° **反函数的存在性和连续性** 若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质:(1)在区间 (a,b) 上有定义并连续;(2)在此区间上是严格单调的,则存在单值的反函数 $x=f^{-1}(y)$,此函数在区间 (A,B) 上有定义并连续,而且是严格单调的,其中

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x) \quad 和 \quad B=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

连续函数 $y=f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝,可被理解为在其有定义的最大区域上满足方程 $f(g(y))=y$ 的任何一个单值连续函数 $x=g(y)$.

2° **以参数形式表示的函数的连续性** 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (α,β) 上有定义并且连续,且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格单调的,则方程组

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

在区间 (a,b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中

$$a=\lim_{t\to\alpha+0}\varphi(t) \quad 及 \quad b=\lim_{t\to\beta-0}\varphi(t).$$

【761】 证明:存在唯一的连续函数 $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 满足开普勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$.

证 由 640 题知数列

$$y_0=x, \quad y_1=x+\varepsilon\sin y_0, \quad y_2=x+\varepsilon\sin y, \quad \cdots, \quad y_n=x+\varepsilon\sin y_{n-1}, \quad \cdots$$

的极限 $y(x)$ 为开普勒方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ 的唯一的根. 现在证明 $y=y(x)$ 是连续的. 我们只要证明当 $x\to x_0$ 时,$y(x)\to y(x_0)$. 为此,我们考虑

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_n(x_0)|&=|(x-x_0)+\varepsilon[\sin y_{n-1}(x)-\sin y_{n-1}(x_0)]|\\&\leqslant|x-x_0|+\varepsilon|y_{n-1}(x)-y_{n-1}(x_0)|.\end{aligned}$$

逐次应用此不等式,即得

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_n(x_0)|&\leqslant|x-x_0|(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)\\&=|x-x_0|\cdot\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$,便有 $|y(x)-y(x_0)|\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon}|x-x_0|$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$. 于是,显然有 $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

【762】 证明:对于每一个实数 k $(-\infty<k<+\infty)$,方程 $\cot x=kx$ 在区间 $0<x<\pi$ 中有唯一连续的根 $x=x(k)$.

证 令 $f(x)=\frac{\cot x}{x}$. 显然,在 $(0,\pi)$ 上 $\cot x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数,从而,$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上也是连续的严格减函数,并且,很明显

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty.$$

由此可知,对每一个实数 k $(-\infty<k<+\infty)$,恰有一个 $x\in(0,\pi)$,使 $f(x)=k$,即 $\cot x=kx$. 另外,由于 $f(x)=\frac{\cot x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是连续的严格减函数,故 $k=f(x)$ 的反函数 $x=x(k)=f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty<k<+\infty$ 上的连续的严格减函数. 此 $x=x(k)$ 即方程 $\cot x=kx$ 的根.

综上所述,可知:对任何 $-\infty<k<+\infty$,方程 $\cot x=kx$ 在 $(0,\pi)$ 上具有唯一的根 $x=x(k)$,而且 $x(k)$ 是 k $(-\infty<k<+\infty)$ 的连续的严格减函数,证毕.

求下列函数的反函数的连续单值分支:

【769】 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2y-2x+y=0$,故 $x=\begin{cases}\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0.\end{cases}$

又由于

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y(1+\sqrt{1-y^2})}=0,\quad \lim_{y\to 0}\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}=\infty,$$

故反函数的连续单值分枝为

$$x=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(-1\leqslant y\leqslant 1)\quad 及\quad x=\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}\quad(0<|y|\leqslant 1).$$

【773】 证明:连续函数 $y=1+\sin x$ 在区间 $0<x<2\pi$ 内的值域是闭区间.

证 显然,当 $x\in(0,2\pi)$时,$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 从而,$0\leqslant 1+\sin x\leqslant 2$. 而由于 $y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=2$, $y\Big|_{x=\frac{3\pi}{2}}=0$. 而 $y=1+\sin x$ 是$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上的连续函数,故由介值定理知当 x 从$\dfrac{\pi}{2}$变到$\dfrac{3\pi}{2}$时,y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0<x<2\pi$ 时,y 的值域是闭区间$[0,2]$.

【775】 证明:等式 $\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x\quad(x\neq 0)$.

证 当 $x>0$ 时,令 $\varphi=\arctan x$,则得 $\tan\varphi=x$,且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$. 又 $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x$,故

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x}.$$

因为 $0<\dfrac{\pi}{2}-\varphi<\dfrac{\pi}{2}$,而在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内仅有唯一的数,使其正切等于$\dfrac{1}{x}$,故$\dfrac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\dfrac{1}{x}$,即当 $x>0$ 时,$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

当 $x<0$ 时,令 $\varphi=\arctan x$,则得 $\tan\varphi=x$,且$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0$. 又

$$\cot\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\tan\varphi=x,\quad 即\ \tan\left(-\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{1}{x},$$

因为$-\dfrac{\pi}{2}<-\dfrac{\pi}{2}-\varphi<0$,而在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$内有唯一的数,使其正切等于$\dfrac{1}{x}$,故$-\dfrac{\pi}{2}-\varphi=\arctan\dfrac{1}{x}$,即当 $x<0$ 时,$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$.

总之,当 $x\neq 0$ 时,$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$.

【781】 设 $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$ $(-\infty<t<+\infty)$. 在参量 t 的哪些变化域中可以把变量 y 看作变量 x 的单值函数?求 y 在不同变化域上的表达式.

解 由于 $x=\operatorname{ch}t$, $y=\operatorname{sh}t$,故 $x^2-y^2=\operatorname{ch}^2t-\operatorname{sh}^2t=1$.

当 $\operatorname{sh}t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\geqslant 0$ 时,即 $e^t\geqslant e^{-t}$或 $e^{2t}\geqslant 1$ 或 $t\geqslant 0$ 时,$y=\sqrt{x^2-1}$;当 $t\leqslant 0$ 时,$y=-\sqrt{x^2-1}$.

不论 t 为何值,$x\geqslant 1$,故$\sqrt{x^2-1}$有意义. $t=0$ 是函数 $y=y(x)$单值区域的分界值.

【782】 设 y 对 x 的函数关系由方程组 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$给出,问 $y=y(x)$是单值函数的充分必要条件是什么?

解 其充分必要条件为,使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值,函数 $\psi(t)$应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性.

若不然,则存在 x^* 及 $t_1\neq t_2$,使

$$\varphi(t_1)=\varphi(t_2)=x^* \quad 且 \quad \psi(t_1)\neq\psi(t_2).$$

于是,对于这样的 x^*,一方面有 $y_1=\psi(t_1)$ 及 $y_2=\psi(t_2)$,另一方面又有 $y_1\neq y_2$,这样 y 就不定义为 x 的单值函数.因此,使 $\varphi(t)=x$ 的一切 t 值,$\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性.设所述条件满足,则对于任一 $x^*\in\{\varphi(t)\}$,有 t^* 使

$$\varphi(t^*)=x^*,\quad \psi(t^*)=y^*$$

有意义,这样定义的函数 $y=y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同,因此,它由 x^* 唯一确定.从而,y 定义为 x 的单值函数.

§9. 函数的一致连续性

1° **一致连续性的定义** 设函数 $f(x)$ 定义在集合 $X=\{x\}$ 上(X 是开区间、闭区间,等等),若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$,使得对于任何数值 $x',x''\in X$,由不等式

$$|x'-x''|<\delta$$

可得不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上为一致连续的.

2° **康托尔定理** 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此区间上一致连续.

【787】 以《$\varepsilon-\delta$》的语言用肯定的方式表达下述论断意义:函数 $f(x)$ 在某集合(开区间,闭区间,等等)上连续,但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E.所需论断的《$\varepsilon-\delta$》说明如下:对于任给的 $\varepsilon>0$,及 $x_0\in E$,总存在一个数 $\delta(\varepsilon,x_0)>0$,使当 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$ 时,恒有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

同时,至少存在一个 $\varepsilon_0>0$,使对于任意给定的 $\delta>0$,都可找到 $x_1,x_2\in E$,满足 $|x_1-x_2|<\delta$,但是

$$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0.$$

【790】 证明:函数 $f(x)=\sin x^2$ 在无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 上是连续的并且有界,但在此区间上并非一致连续的.

证明思路 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上显然有界且连续.只需证其不一致连续性.为此,考虑 $(-\infty,+\infty)$ 上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\quad x_n'=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}},$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时,不论 $\delta>0$ 如何选取,只要 n 充分大,总可以使 $|x_n-x_n'|<\delta$,但是,$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0$.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的.现证其不一致连续性.

考虑 $(-\infty,+\infty)$ 上的两串点

$$x_n=\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\qquad x_n'=\sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当 $0<\varepsilon_0<1$ 时,不论 $\delta>0$ 如何选取,只要 n 充分大,总可以使

$$|x_n-x_n'|=\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}}<\delta,$$

但是,$|f(x_n)-f(x_n')|=1>\varepsilon_0$.因而,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并非一致连续.

【791】 证明：若函数 $f(x)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty$ 上有定义并且连续，而且有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在此区域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，故必存在 $X>a$，使当 $x'>X$，$x''>X$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，故一致连续，从而，必有正数 δ' 存在，使当 $x'\in[a,X+1]$，$x''\in[a,X+1]$，$|x'-x''|<\delta'$ 时，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令 $\delta=\min\{\delta',1\}$. 现设 x'，x'' 为满足 $a\leqslant x'<+\infty$，$a\leqslant x''<+\infty$，$|x'-x''|<\delta$ 的任何两点. 由于 $|x'-x''|<\delta$，故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a,X+1]$，或同时满足 $x'>X$，$x''>X$，因此，恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上一致连续. 证毕.

【793】 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的：(1) $(-l,l)$，这里 l 为任意大的正数；(2) 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上？

解题思路 (1) $|f(x')-f(x'')|\leqslant 2l|x'-x''|\quad(x',x''\in(-l,l))$.

(2) 考虑 $x_n'=n+\dfrac{1}{n}$，$x_n''=n$. 下面仿 790 题.

解 (1) 当 $x_1,x_2\in(-l,l)$ 时，

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 2l|x_1-x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2l}$，则当 $|x_1-x_2|<\delta$，且 $x_1,x_2\in(-l,l)$ 时，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，故 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上一致连续.

(2) 取 $\varepsilon_0=1$，不论 $\delta>0$ 取得多小，只要 n 充分大，我们总可以使 $x_n'=n+\dfrac{1}{n}$，$x_n''=n$ 的距离 $|x_n'-x_n''|=\dfrac{1}{n}<\delta$，但是，

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=2+\left(\frac{1}{n}\right)^2>\varepsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续.

研究下列函数在给定区域上的一致连续性：

【796】 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}\quad(0<x<\pi)$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，我们定义函数

$$F(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & 0<x<\pi,\\ 0, & x=\pi.\end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，由康托尔定理知，$F(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上一致连续. 从而，$f(x)$ 也在 $(0,\pi)$ 上一致连续.

【798】 $f(x)=\arctan x\quad(-\infty<x<+\infty)$.

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$、$[0,+\infty)$ 上连续，且有

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 及 $(-\infty,1]$ 上均一致连续.

于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1(\varepsilon)>0$，当 x_1、$x_2\in(-\infty,1]$，$|x_1-x_2|<\delta_1(\varepsilon)$ 时，恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\varepsilon)>0$，当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta_2(\varepsilon)$时，恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立.

今取 $\delta(\varepsilon)=\min\{1,\delta_1(\varepsilon),\delta_2(\varepsilon)\}$，则当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$时，$x_1$ 与 x_2 必或同时属于$(-\infty,1]$，或同时属于$[0,+\infty)$，故恒有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

即 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

【801】 证明：函数 $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$在每个区间 $J_1=(-1<x<0)$ 及 $J_2=(0<x<1)$上是一致连续的，但在它们的和 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$上并非一致连续的.

证 在 $J_1=(-1<x<0)$上 $f(x)=-\frac{\sin x}{x}$，在 $J_2=(0<x<1)$上 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to-0}f(x)=-\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=-1,$$

故必存在 $\eta>0(\eta<1)$，使当 $0<x_1<\eta$，$-\eta<x_2<0$ 时恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|>1$. 现取 $\varepsilon_0=1$，则不论 $\delta>0$ 取得多么小，都可取两点 x'_1 和 x'_2，使 $0<x'_1<\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}$，$-\min\left\{\eta,\frac{\delta}{2}\right\}<x'_2<0$. 于是，$|x'_1-x'_2|<\delta$，但是，

$$|f(x'_1)-f(x'_2)|>\varepsilon_0=1.$$

由此可知 $f(x)$在 $J_1+J_2=\{0<|x|<1\}$上非一致连续.

【804】 证明：有限个在区间(a,b)上一致连续函数的和与它们的乘积在此区间上仍是一致连续的.

证 由于有限个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘，故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$与 $g(x)$都在有限区间(a,b)上一致连续，要证$f(x)+g(x)$与$f(x)g(x)$也在(a,b)上一致连续. 任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$在(a,b)上一致连续，故有 $\delta_1>0$ 存在，使对于(a,b)中任何两点 x'与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，就有 $\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又由于 $g(x)$在(a,b)上一致连续，故又有 $\delta_2>0$ 存在，使对于(a,b)中任何两点 x'与 x''，只要 $|x'-x''|<\delta_2$，就有 $\left|g(x')-g(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|x'-x''|<\delta$（x',x''为(a,b)中任何两点）时，恒有

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|\leqslant|f(x')-f(x'')|+|g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $f(x)+g(x)$在(a,b)上一致连续. 下证 $f(x)g(x)$在(a,b)上一致连续. 为此先证一个结论：若函数 $F(x)$在有限区间(a,b)上一致连续，则 $F(x)$在(a,b)上必有界. 事实上，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，都有 $\delta>0$ 存在，使对于(a,b)中任何两点 x',x''，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$. 特别，当 $a<x'<a+\delta$，$a<x''<a+\delta$ 时，必有 $|F(x')-F(x'')|<\varepsilon$；当 $b-\delta<x'<b$，$b-\delta<x''<b$ 时，也必有 $\left|F(x')-F(x'')\right|<\varepsilon$. 因此，根据柯西收敛准则，知 $F(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}F(x)$与$F(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}F(x)$都存在（有限）. 现在$[a,b]$上定义函数$F^*(x)$：

$$F^*(x)=\begin{cases}F(x), & a<x<b,\\ F(a+0), & x=a,\\ F(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然，$F^*(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，从而有界，由此可知$F(x)$在(a,b)上有界.

根据刚才已证的结论，存在常数 $L>0$ 与 $M>0$，使

$$|f(x)|\leqslant L,\quad |g(x)|\leqslant M\quad (a<x<b).$$

任给 $\varepsilon>0$,根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a,b) 上的一致连续性,可取 $\delta>0$,使对于 (a,b) 中任何两点 x' 与 x'',只要 $|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知

$$|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|=|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+\frac{\varepsilon}{2L}\cdot L=\varepsilon.$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

注:当 (a,b) 是无穷区间时,(a,b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x)+g(x)$ 必也一致连续,但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续.例如,设 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$,函数 $f(x)=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续,而函数 $[f(x)]^2=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续(参看 793 题(2)).

【805】 证明:若单调有界的函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 上是连续的,则此函数在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 分三种情形予以证明.

(1)设 (a,b) 是有限区间.由于 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调有界,故极限 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$ 都存在(有限).按下式定义 $[a.b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<b,\\ f(a+0), & x=a,\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而一致连续,当然在 (a,b) 上也一致连续,故 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

(2)a 为有限数,$b=+\infty$,此时,令

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & a<x<+\infty,\\ f(a+0), & x=a.\end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^*(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在(有限),故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a\leqslant x<+\infty$ 一致连续,从而,$f(x)$ 在 $a<x<+\infty$ 一致连续.

若 $a=-\infty$,b 为有限数.考虑函数 $g(x)=f(-x)(-b<x<+\infty)$,即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(3)$a=-\infty$, $b=+\infty$.任给 $\varepsilon>0$.利用(2)已证的结果,$f(x)$ 在 $0<x<+\infty$ 上一致连续,故存在 $\delta_1>0$,使当 x' 与 x'' 都属于 $(0,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

同样利用(2)已证的结果,$f(x)$ 在 $-\infty<x<1$ 上一致连续,故对于同一个 ε,存在 $\delta_2>0$,使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

现令 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$,则当 $-\infty<x'<+\infty$, $-\infty<x''<+\infty$, $|x'-x''|<\delta$ 时,x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0,+\infty)$,或是同属于区间 $(-\infty,1)$.因此,恒有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可知,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续.证毕.

【806】 证明:在有限区间 (a,b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$,可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上,其充分必要条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是一致连续的.

证 必要性:若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a,b]$ 上,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,从而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续,当然 $f(x)$ 在 (a,b) 上也是一致连续的.

充分性:若 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.根据 804 题的证明过程,知 $f(a+0)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 与 $f(b-0)=$

$\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$都存在(有限). 按下式定义$[a,b]$上的函数:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & a<x<b, \\ f(a+0), & x=a, \\ f(b-0), & x=b. \end{cases}$$

显然, $f^*(x)$在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上 $f^*(x)\equiv f(x)$.

故 $f^*(x)$是在$[a,b]$上的连续延拓. 证毕.

【807】 函数

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为$(a.b)$中受条件$|x_1-x_2|\leqslant\delta$限制的任意两点)称为函数 $f(x)$在区间(a,b)上的**连续模**.

证明:函数 $f(x)$在区间(a,b)上是一致连续的充分必要条件是$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

证 必要性:设 $f(x)$在(a,b)上一致连续. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta'>0$, 使(a,b)中任何两点 x_1, x_2, 只要$|x_1-x_2|<\delta'$就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0<\delta<\delta'$, 则当$|x_1-x_2|\leqslant\delta$时, 必有$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 从而,

$$\omega_f(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由此可知, $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

充分性:设$\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$. 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta'>0$, 使当 $0<\delta<\delta'$时, 恒有 $\omega_f(\delta)<\varepsilon$.

现设 x_1 与 x_2 是(a,b)中满足$|x_1-x_2|<\delta'$的任何两点.

若 $x_1=x_2$, 则显然$|f(x_1)-f(x_2)|=0<\varepsilon$;

若 $x_1\neq x_2$, 令$|x_1-x_2|=\delta^*$, 则 $0<\delta^*<\delta'$, 于是, $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\omega_f(\delta^*)<\varepsilon$.

由此可知, $f(x)$在(a,b)上一致连续. 证毕.

§10. 函数方程

【809】 证明:对于所有实数 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \tag{1}$$

的唯一的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是线性齐次函数:

$$f(x)=ax,$$

式中 $a=f(1)$是任意的常数.

证 先证:若 $f(x)$满足(1), 则对任何有理数 c, 必有

$$f(cx)=cf(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

事实上, 当 m 与 n 为正整数时, 有

$$f(mx)=f(x+(m-1)x)=f(x)+f((m-1)x)=f(x)+f(x)+f((m-2)x)=\cdots$$
$$=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=mf(x);$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=nf\left(\frac{x}{n}\right),\quad 故\ f\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n}f(x).$$

于是,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=mf\left(\frac{x}{n}\right)=\frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y=0$, 得 $f(x)=f(x)+f(0)$, 故 $f(0)=0$; 又在(1)中令 $y=-x$, 并注意到已证的结果 $f(0)=0$, 得 $f(-x)=-f(x)$. 于是,

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-f\left(\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c，有 $f(cx)=cf(x)(-\infty<x<+\infty)$. 下面，我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c，此式也成立. 事实上，设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n，使 $c_n\to c(n\to\infty)$. 于是，

$$f(c_n x)=c_n f(x) \quad (n=1,2,\cdots),$$

在此式两端令 $n\to\infty$ 取极限，并注意到函数 f 在点 cx 连续，即得 $f(cx)=cf(x)$. 于是，对任何实数 x 和 c，有 $f(cx)=cf(x)$. 由此可知，对任何实数 x，有

$$f(x)=f(x\cdot 1)=xf(1)=ax,$$

其中 $a=f(1)$. 证毕.

【812】 证明：对所有 x 和 y 都满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y) \tag{2}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数：$f(x)=a^x$，式中 $a=f(1)$ 为正的常数.

证 先证必有 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 事实上，由 $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$，知 $f(x)\geqslant 0$. 由于 $f(x)\not\equiv 0$，故存在 x_0 使 $f(x_0)>0$. 在(2)中令 $x=x_0, y=0$，得 $f(x_0)=f(x_0)f(0)$，故 $f(0)=1$；又在(2)中令 $y=-x$，得 $1=f(0)=f(x)f(-x)$，故 $f(x)\neq 0$，由此可知 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 当 m 与 n 为正整数时，

$$f(mx)=f((m-1)x+x)=f((m-1)x)f(x)=f((m-2)x)f(x)f(x)=\cdots=[f(x)]^m;$$

$$f(x)=f\left(n\cdot\frac{x}{n}\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n,\quad 即\ f\left(\frac{x}{n}\right)=[f(x)]^{\frac{1}{n}}.$$

于是，

$$f\left(\frac{m}{n}x\right)=\left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=[f(-x)]^{\frac{m}{n}}=[f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知，对任何有理数 c，有

$$f(cx)=[f(x)]^c \quad (-\infty<x<+\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性，仿 809 题的证明易知此式对任何无理数也成立. 因此，对于任何实数 c 与 x，有

$$f(cx)=[f(x)]^c,$$

从而， $f(x)=f(x\cdot 1)=[f(1)]^x=a^x,\ a=f(1)>0.$

注 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x)>0\ (-\infty<x<+\infty)$. 令 $F(x)=\log_a f(x)$，这里 $a=f(1)>0$. 于是，$F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，满足(1)式：

$$F(x+y)=\log_a f(x+y)=\log_a[f(x)f(y)]=\log_a f(x)+\log_a f(y)=F(x)+F(y).$$

故由 809 题的结果，知 $F(x)=a^* x$，这里

$$a^*=F(1)=\log_a f(1)=\log_a a=1,$$

从而，$F(x)=x$. 由此可知 $f(x)=a^x$.

【814】 证明：对于所有正数 x 和 y 都满足方程 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$ 是对数函数：$f(x)=\log_a x$，式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中令 $y=1$，得 $f(1)=0$. 由于 $f(x)\not\equiv 0$，故存在 $x_0>0$ 使 $f(x_0)\neq 0$. 先设 $f(x_0)>0$.

由于 $f(x_0^2)=f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)$，$f(x_0^4)=2f(x_0^2)=4f(x_0)$，$\cdots$，利用数学归纳法，易知 $f(x_0^{2n})=2nf(x_0)\to+\infty\ (n\to\infty)$. 故可取某正整数 n，使 $f(x_0^{2n})>1$. 于是，根据连续函数性质知，在 1 与 x_0^{2n} 之间必存在某 a(显然 $a>0$)使 $f(a)=1$. 现考虑函数 $F(x)=f(a^x)(-\infty<x<+\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足(1)式：

$$F(x+y)=f(a^{x+y})=f(a^x\cdot a^y)=f(a^x)+f(a^y)=F(x)+F(y).$$

于是，根据 809 题的结果知，$F(x)=a^*x$ $(-\infty<x<+\infty)$，其中 $a^*=F(1)=f(a)=1$. 于是，$F(x)=x$，即

$$f(a^x)=x;$$

令 $a^x=y$，则 $x=\log_a y$，于是，

$$f(y)=\log_a y\quad(0<y<+\infty).$$

若 $f(x_0)<0$，则可考虑函数 $g(x)=-f(x)$. 于是，$g(x_0)>0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy)=g(x)+g(y)$，故根据刚才已证的结果，可知 $g(y)=\log_a y$ $(0<y<+\infty)$，其中 $a>0$. 即 $-f(y)=\log_a y$，或 $f(y)=-\log_a y$. 令 $a^*=\dfrac{1}{a}$，则 $a^*>0$ 且 $-\log_a y=\log_{a^*} y$，故

$$f(y)=\log_{a^*} y\quad(0<y<+\infty),$$

其中 $a^*>0$. 证毕.

【815】 证明：对于所有正数 x 和 y 都满足方程

$$f(xy)=f(x)f(y)\tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)(0<x<+\infty)$是幂函数 $f(x)=x^a$，式中 a 为常数.

证 考虑函数 $F(x)=f(e^x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，则 $F(x)$在 $-\infty<x<+\infty$ 连续不恒为零，且满足(2)式：

$$F(x+y)=f(e^{x+y})=f(e^x\cdot e^y)=f(e^x)f(e^y)=F(x)F(y).$$

于是，根据 812 题的结果知

$$F(x)=b^x\quad(-\infty<x<+\infty),$$

其中 $b>0$，即 $f(e^x)=b^x(-\infty<x<+\infty)$.

令 $e^x=y$，则 $y>0$；显然，存在唯一的 $a(-\infty<a<+\infty)$，使 $e^a=b$. 于是，

$$f(y)=b^x=e^{ax}=y^a\quad(0<y<+\infty).$$

证毕.

【816】 求对于所有实数 x 和 y 都满足方程(3)的所有的连续函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$.

证 因为 $f(xy)=f(x)f(y)$，所以 $f(1)=f(1)f(1)$，于是，$f(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

当 $f(1)=0$ 时，对于任意实数 x，均有 $f(x)=f(1)f(x)\equiv0$.

当 $f(1)=1$ 时，由于 $f(1)=f((-1)\cdot(-1))=f(-1)f(-1)=1$，所以，$f(-1)=\pm1$. 下面分两种情况讨论：

(ⅰ) 当 $f(-1)=1$ 时，由于 $f(-x)=f(-1)f(x)=f(x)$，所以，在这种情形下就可把问题归结为对 $0<x<+\infty$ 中的 x 进行讨论. 而对于 $x>0$，我们已证得 $f(x)=x^a$，式中 a 为常数*). 然后再利用 $f(-x)=f(x)$，即得 $f(x)=|x|^a$，为保证 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中连续，需 $a\geqslant0$.

(ⅱ) 当 $f(-1)=-1$ 时，同(ⅰ)可得

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a\quad(a\geqslant0).$$

综上所述，所求的函数为(1) $f(x)\equiv0$；或(2) $f(x)=|x|^a(a\geqslant0)$；或(3) $f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot|x|^a$ $(a\geqslant0)$.

*) 利用 815 题的结果.

【820】 设 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ 及 $\Delta^2 f(x)=\Delta\{\Delta f(x)\}$分别为函数 $f(x)$的一阶、二阶有限差分.

证明：若函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是连续的且 $\Delta^2 f(x)\equiv0$，则此函数是线性函数，即 $f(x)=ax+b$，式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x)\equiv0$ 得

$$f(x+\Delta_1 x+\Delta_2 x)-f(x+\Delta_2 x)\equiv f(x+\Delta_1 x)-f(x).$$

令 $x=0$，得

$$f(\Delta_1+\Delta_2)-f(\Delta_2)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

令 $\Delta_2=n\Delta_1$，得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(n\Delta_1)\equiv f(\Delta_1)-f(0).$$

利用数学归纳法，可得

$$f[(n+1)\Delta_1]-f(0)\equiv(n+1)[f(\Delta_1)-f(0)]. \tag{1'}$$

关系式(1′)可写成

$$f(\Delta_1)-f(0)=\frac{1}{n}[f(n\Delta_1)-f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1=m$，再利用(1′)即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right)-f(0)=\frac{m}{n}[f(1)-f(0)].$$

所以，$f\left(\frac{m}{n}\right)=a\cdot\frac{m}{n}+b$，式中 $a=f(1)-f(0)$ 及 $b=f(0)$ 均为常数.

于是，对于有理数 x，均有

$$f(x)=ax+b.$$

对于无理数 x，利用 $f(x)$ 的连续性，即可证得上式仍成立. 事实上，取有理数列 $x_n\to x$，则

$$\lim_{x_n\to x}f(x_n)=f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n\to x}f(x_n)=\lim_{x_n\to x}(ax_n+b)=ax+b.$$

因此，对于所有的实数 x，均有 $f(x)=ax+b$.

第二章　一元函数微分学

§1.　显函数的导数

1° **导数的定义**　若 x 及 $x_1=x+\Delta x$ 为自变量的值，则差

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

称为函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[x,x_1]$ 上的增量. 表达式

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{1}$$

若有意义，则称为导数，而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微函数.

导数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 点切线的斜率 $[\tan\alpha=f'(x)]$（图 2.1）.

2° **求导数的基本法则**　若 c 为常数且函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 都有导数，则

(1) $c'=0$；　(2) $(cu)'=cu'$；

(3) $(u+v-w)'=u'+v'-w'$；　(4) $(uv)'=u'v+v'u$；

(5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$　$(v\neq 0)$；　(6) $(u^n)'=nu^{n-1}u'$　(n 为常数)；



(7) 若函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 都有导数，则 $y'_x=y'_u u'_x$.

图 2.1



3° **基本公式**　若 x 为自变量*，则

Ⅰ. $(x^n)'=nx^{n-1}$ (n 为常数)；　Ⅱ. $(\sin x)'=\cos x$；

Ⅲ. $(\cos x)'=-\sin x$；　Ⅳ. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$；

Ⅴ. $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$；　Ⅵ. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

Ⅶ. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　Ⅷ. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$；

Ⅸ. $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$；　Ⅹ. $(a^x)'=a^x\ln a$　$(a>0)$；$(e^x)'=e^x$；

Ⅺ. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　($a>0$ 且 $a\neq 1$)；$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；　Ⅻ. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$；

ⅩⅢ. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$；　ⅩⅣ. $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；

ⅩⅤ. $(\operatorname{coth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4° **单侧导数**　表达式

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\quad f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

---

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中，一些明显的定义域要求，例如，本节公式Ⅴ中要求 $x\neq k\pi$（k 为整数），Ⅵ中要求 $|x|<1$ 等等. 以及例如尔后 §5 中相应的限制，一般地就不再一一声明.

《题解》作者注

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导数和右导数.

导数 $f'(x)$ 存在的充分必要条件是

$$f'_-(x)=f'_+(x).$$

5° **无穷导数** 若函数 $f(x)$ 在点 x 连续,且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x 有无穷导数.在此种情形下,函数 $y=f(x)$ 的图像在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

【824】 证明:(2) $\Delta[f(x)g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

提示 由增量的定义,命题即获证.

证(2) $$\begin{aligned}\Delta[f(x)g(x)]&=[f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)]-[f(x)g(x)]\\&=[f(x+\Delta x)-f(x)]g(x+\Delta x)+[g(x+\Delta x)-g(x)]f(x)\\&=\Delta f(x)g(x+\Delta x)+\Delta g(x)f(x),\end{aligned}$$

于是,$\Delta[f(x)\ g(x)]=g(x+\Delta x)\Delta f(x)+f(x)\Delta g(x)$.

同样,我们还可将(2)的结果写成 $\Delta[f(x)g(x)]=f(x+\Delta x)\Delta g(x)+g(x)\Delta f(x)$.

【827】 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式给出

$$x=10t+5t^2,$$

式中 t 以 s(秒)计的时间,x 为以 m(米)计的距离.求在 $20\leqslant t\leqslant 20+\Delta t$ 时间内运动的平均速度.设:

(1)$\Delta t=1$; (2)$\Delta t=0.1$; (3)$\Delta t=0.01$,

计算此速度的值.当 $t=20$ 时运动的速度等于什么?

解 平均速度

$$\bar{v}=\{[10(20+\Delta t)+5(20+\Delta t)^2]-[10\times 20+5\times 20^2]\}\div\Delta t=210+5\Delta t\ (\text{m/s}),$$

(1) $\bar{v}=210+5\times 1=215\ (\text{m/s})$;

(2) $\bar{v}=210.5\ (\text{m/s})$;

(3) $\bar{v}=210.05\ (\text{m/s})$.

于是,$v\Big|_{t=20}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(210+5\Delta t)=210\ (\text{m/s})$.

【829】 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$,求 $f'(1)$,$f'(2)$ 和 $f'(3)$.

解 $$\begin{aligned}f'(x)&=(x-2)^2(x-3)^3+2(x-1)(x-2)(x-3)^3+3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2\\&=2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9).\end{aligned}$$

于是,$f'(1)=-8$; $f'(2)=f'(3)=0$.

【831】 设 $f(x)=x+(x-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

提示 从导数定义出发,易得 $f'(1)=1+\dfrac{\pi}{4}$.

解 注意到当 $x=1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}},$$

即得

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}\right)=1+\frac{\pi}{4}.$$

【833】 证明:若函数 $f(x)$ 可微及 n 为正整数,则

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x). \tag{1}$$

反之,若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在,则可否断定此函数有导数?研究狄利克雷函数的例子(参阅第一章 734 题).

提示 由导数定义易证(1)式成立.然其逆不成立,可研究734题所示的狄利克雷函数$\chi(x)$:

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]}{\frac{1}{n}}=f'(x).$

反之,就不一定对了.例如,对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

在任一有理点是不连续的,当然其导数也不存在.但由于$x+\frac{1}{n}$仍为有理数,故当x为有理数时,

$$\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)=1-1=0,$$

从而,极限(1)$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\chi\left(x+\frac{1}{n}\right)-\chi(x)\right]=0$存在.

利用导数表,求下列函数的导数:

【844】 证明:公式$\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

提示 利用商的求导法则及行列式的定义.

证 $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.这里已暗设$cx+d\neq0$.

【846】 $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

解 由于$y=\dfrac{2}{1-x+x^2}-1$,故$y'=\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$.

【860】 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

解 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\quad(x>0).$

【867】 $y=\dfrac{\sin^2x}{\sin x^2}$.

解 $y'=\dfrac{2\sin x(\cos x\sin x^2-x\sin x\cos x^2)}{\sin^2x^2}\quad(x^2\neq k\pi;\ k=1,2,\cdots).$

【873】 $y=4\sqrt[3]{\cot^2x}+\sqrt[3]{\cot^8x}$.

解 $y'=\dfrac{8}{3}(\cot x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2x)+\dfrac{8}{3}(\cot x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2x)=-\dfrac{8}{3\sin^4x\sqrt[3]{\cot x}}$

$$\left(x\neq k\pi;\ x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right).$$

【883】 $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

解 $y'=e^x[1+e^{e^x}(1+e^{e^{e^x}})]$.

【884】 $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b\quad(a>0,b>0)$.

提示 两边取对数后,同时对x求导数.

解 两边取对数,得

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a).$$

两边同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}.$$

于是, $y'=y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)\quad(x>0).$

【885】 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0).$

解 $y'=a^a x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x\cdot a^{a^x}\ln^2 a.$

【886】 $y=\lg^3 x^2.$

解 $y'=3\lg^2 x^2\cdot\frac{1}{x^2}2x\lg e=\frac{6}{x}\lg e\cdot\lg^2 x^2\quad(x\neq0).$

或按 $y=(\lg e\cdot\ln x^2)^3=8\lg^3 e\cdot\ln^3|x|$ 求导数,有 $y'=24\lg^3 e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln^2|x|\right)^{*)}\quad(x\neq0).$

*) $(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\frac{1}{x}$,以后不再说明.

【901】 $y=\ln\tan\frac{x}{2}.$

解 $y'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}\quad(0<x-2k\pi<\pi;\ k$ 为整数).

【902】 $y=\ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$

解 $y'=\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$=\frac{1}{\cos x}\quad(|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2};\ k$ 为整数).

【919】 $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}.$

提示 利用基本公式及求导法则,求得 $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 的过程中,读者可能认为其存在域仅为 $x>0$,但是,可以证明:在点 $x=0$ 处的右导数 $y'_+(0)=0$,它等于 $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ 在点 $x=0$ 处的值.因此,y' 的存在域为 $x\geqslant0$.以后碰到类似情况,均作这样的理解,不再一一说明.

解 $y'=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}}\cdot\frac{1+x-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\quad(x\geqslant0).$

【924】 $y=\arccos\sqrt{1-x^2}.$

提示 注意将所得结果化简,得

$$-\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<|x|<1).$$

解 $y'=\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(0<|x|<1).$

【928】 $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 $y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-\frac{2\operatorname{sgn}x}{1+x^2}\quad(x\neq0)$.

【932】 $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

解 $y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}}\cdot\frac{-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\quad(x>1)$.

【940】 $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$.

解 $y'=\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)=\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(|x|<1)$.

【949】 $y=\sqrt{1-x^2}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$.

解
$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}\right]-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\quad(0<|x|<1).$$

【966】 $y=\lg_x e$.

解 由 $y=\lg_x e$ 推得 $y=\frac{1}{\ln x}$. 于是，$y'=-\frac{1}{x\ln^2 x}=-\frac{1}{x}(\lg_x e)^2\quad(x>0,x\neq1)$.

【972】 引入中间变量 $u=\cos^2 x$ 求函数 $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$的导数.

解 $u=\cos^2 x,\quad y=\ln(u+\sqrt{1+u^2}),\quad y'_x=y'_u u'_x$，而
$$y'_u=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\cos^4 x}},\quad u'_x=-2\cos x\sin x=-\sin 2x,$$
于是，$y'_x=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

利用 972 题所示的方法，求下列函数的导数：

【974】[+] $y=\frac{1}{2}\arctan(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

提示 令 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$.

解 设 $u=\sqrt[4]{1+x^4}$，则 $y=\frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$. 由于
$$y'_u=\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)=\frac{1}{1-u^4}=-\frac{1}{x^4},\quad u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},$$
于是，$y'_x=y'_u u'_x=-\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}\quad(x\neq0)$.

【975】 $y=\frac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\frac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

提示 令 $u=e^{-x^2}$.

解 设 $u=e^{-x^2}$，则 $y=\frac{u\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-u^2)$. 由于

$$y'_u=\frac{\left(\arcsin u+\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\sqrt{1-u^2}+\frac{u^2\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}-\frac{u}{1-u^2}=\frac{\arcsin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x=-2xe^{-x^2},$$

于是，$y'_x=y'_u u'_x=\frac{-2xe^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$ $(x\neq 0)$.

【978】 求下列函数的导数：

(1) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$； (4) $y=[x]\sin^2\pi x$.

提示 (1)利用 977 题(1)的结果：对于 $y=|x|$，有 $y'=\frac{|x|}{x}$ $(x\neq 0)$.

(4) 对于 $y=[x]$有 $y'=0$ $(x\neq k;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 利用此结果，可知当 $x\neq k$ 时，有

$$([x]\sin^2\pi x)'=\pi[x]\sin 2\pi x,$$

易证当 $x=k$ 时，上式也成立.

解 (1) $y'=\frac{|(x-1)^2(x+1)^3|}{(x-1)^2(x+1)^3}[2(x-1)(x+1)^3+3(x-1)^2(x+1)^2]$

$=(x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$ $(|x|\neq 1)$；

(4)对于 $y=[x]$有 $y'=0$ $(x\neq k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，于是，当 $x\neq k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时，有

$$\{[x]\sin^2\pi x\}'=2\pi\sin\pi x\cos\pi x\cdot[x]=\pi[x]\sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x=k$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时上式也成立.

求下列函数的导数并作出函数及其导数的图像：

【979】 $y=\begin{cases}1-x, & -\infty<x<1,\\ (1-x)(2-x), & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ -(2-x), & 2<x<+\infty.\end{cases}$ (图 979－1)

解题思路 注意必须求函数 y 在其分段(界)点 $x=1$ 及 $x=2$ 处的左、右导数，若左、右导数存在而且相等，则函数在该点可导，否则函数在该点不可导. 从而确定该点是否在导数 y' 的定义域内.

以下的 980 到 983 题中均需这样考虑问题，否则会产生错误.

解 显然 $y'=\begin{cases}-1, & -\infty<x<1,\\ 2x-3, & 1<x<2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$

当 $x=1$ 时，右导数$y'_+|_{x=1}=(2x-3)|_{x=1}=-1$，左导数$y'_-|_{x=1}=-1$.

因此，点 $x=1$ 的导数存在，且$y'|_{x=1}=-1$. 同理，可得$y'|_{x=2}=1$. 于是，

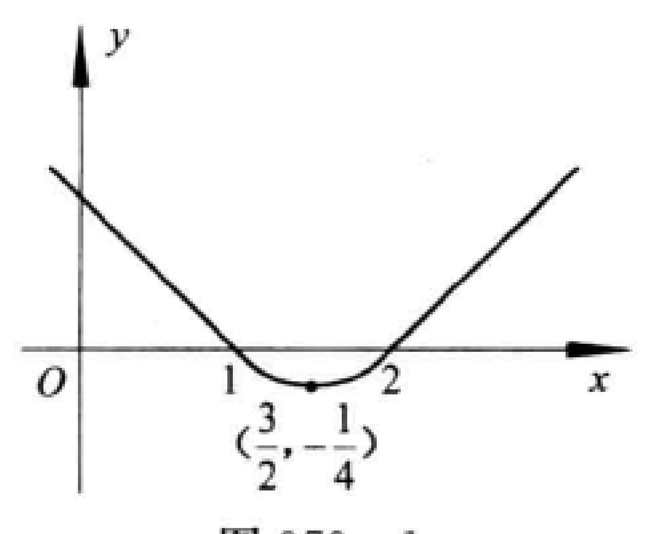


图 979－1

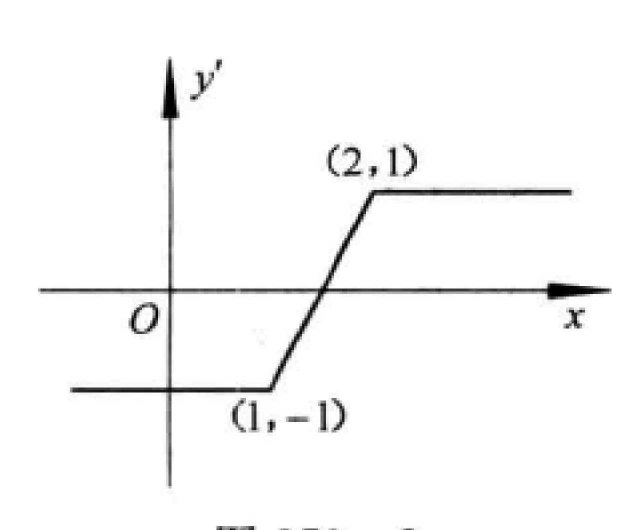


图 979－2

$$y'=\begin{cases}-1, & -\infty<x<1,\\ 2x-3, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<+\infty.\end{cases}$$ (图 979－2)

注 在下面的 980 到 983 题中，求分段定义函数的导数时，在分段点，都要先求其左、右导数. 为简便计，我们只写出结果，而省去了(在分段点)求左、右导数的过程.

【982】$^+$ $y=\begin{cases}\arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$ (图 982－1)

解 $y'=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{2}, & |x|>1.\end{cases}$ (图 982－2)

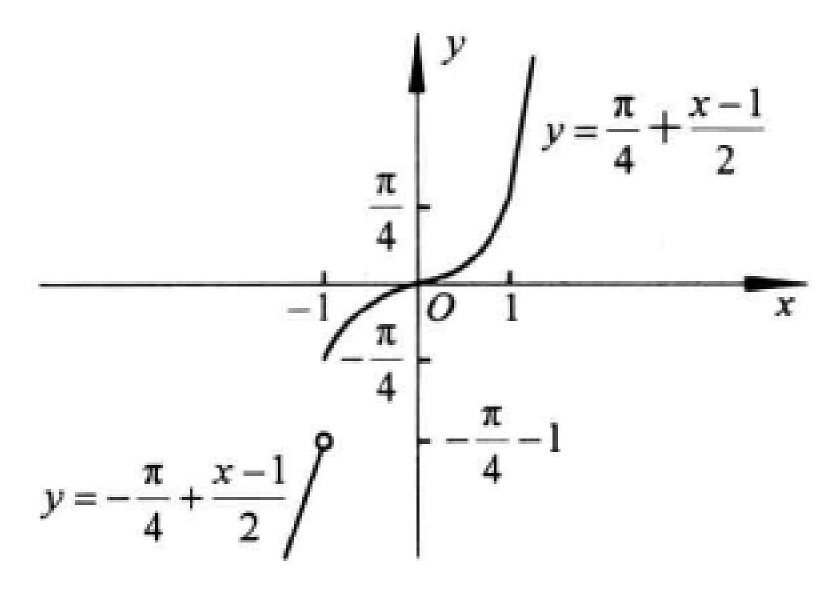


图 982－1

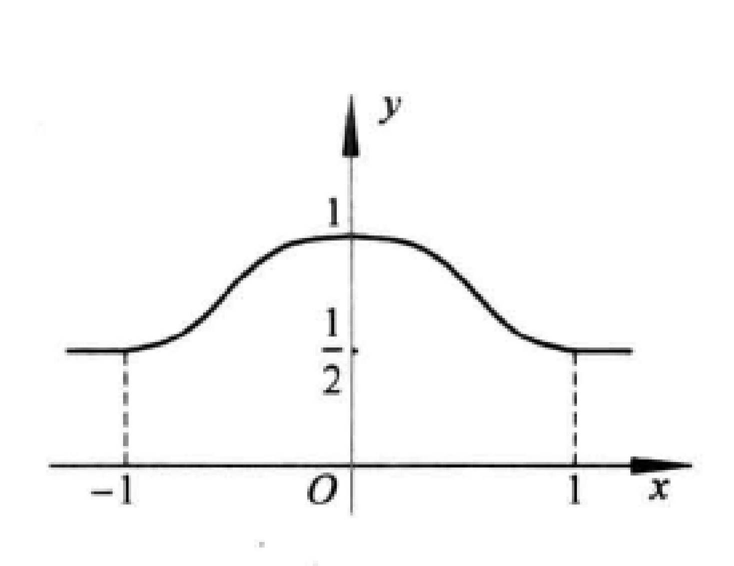


图 982－2

【984】 所给函数的对数的导数称为此函数的**对数导数**：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\quad (f(x)>0).$$

求下列函数 y 的对数导数：

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$；　　(3) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$.

解题思路 (2)注意 $\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\dfrac{1}{3}\ln|3-x|-\dfrac{2}{3}\ln|3+x|$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}\quad (x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3).$$

(3)注意 $\ln y=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\ (x\in A)，其中\ A=\left\{x\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}.$$

解 (2) 由 $y=\dfrac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y=2\ln|x|-\ln|1-x|+\frac{1}{3}\ln|3-x|-\frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3(3-x)}-\frac{2}{3(3+x)}=\frac{54-36x-4x^2+2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}\quad (x\neq 0, x\neq 1, |x|\neq 3);$$

(3)由于 $y=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内，故应设 $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0$，从而有

$$\ln y=\ln\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\ln|x-a_i|,$$

得 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{x-a_i}\quad (x\in A)，\quad 其中\ A=\left\{x\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{\alpha_i}>0\right\}.$$

【985】 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微函数. 求下列函数 y 的导数：

(4) $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)\quad [\varphi(x)>0,\ \psi(x)>0]$.

提示 (4) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得 $y=\dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$.

解 (4) 由 $y=\lg_{\varphi(x)}\psi(x)$ 得

$$y=\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)},\quad y'=\frac{\dfrac{\psi'(x)}{\psi(x)}\ln\varphi(x)-\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}=\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{1}{\ln\varphi(x)}-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\ln\psi(x)}{\ln^2\varphi(x)}.$$

【986】 求 y',设:

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$; (4) $y=f\{f[f(x)]\}$.

其中 $f(u)$ 为可微函数.

解 (2) $y'=2\sin x\cos x f'(\sin^2 x)-2\sin x\cos x f'(\cos^2 x)=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$;

(4) $y'=f'(x)f'[f(x)]f'\{f[f(x)]\}$.

【987】 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1}(x) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

提示 从行列式的定义出发予以证明.

证 从行列式的定义出发予以证明.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)^{*)}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)]$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}\sum_{i=1}^{n}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{ij_i}(x)\cdots f_{nj_n}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i1}(x) & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{i2}(x) & \cdots & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{in}(x)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x)\end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

【989】 设 $F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}$,求 $F'(x)$.

提示 利用 987 题的结果.

解 $F'(x)=\begin{vmatrix}1 & 2x & 3x^2\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 0 & 2 & 6x\\ 0 & 2 & 6x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 0 & 6\end{vmatrix}=0+0+6(2x^2-x^2)=6x^2.$

【992】 在什么条件下，函数 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

(1) 在 $x=0$ 处是连续的； (2) 在 $x=0$ 处可微； (3) 在 $x=0$ 处有连续导数？

提示 (1)$n>0$. 注意当 $n=\dfrac{p}{q}$(p,q 互素)且 q 为偶数时，只考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续.

(2)$n>1$. (3)$n>2$.

解 (1)当 $n>0$ 时

$$\lim_{x\to 0}x^n\sin\frac{1}{x}=0,$$

于是，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，此时，$f(x)$在 $x=0$ 处是连续的(当 $n=\dfrac{p}{q}$(p,q 互素)且 q 为偶数时，只考虑在 $x=0$ 处右连续).

(2) 当 $n>1$ 时

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}\sin\frac{1}{\Delta x}=0,$$

于是，$f'(0)=0$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处可微.

(3) 当 $n>2$ 时，由于

$$f'(x)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\quad(x\neq 0),$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$，而由(2)可得 $f'(0)=0$，所以，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$. 这就说明当$n>2$时，$f'(x)$在 $x=0$ 处是连续的.

【995】 设 $f(x)=|x-a|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$为连续函数及 $\varphi(a)\neq 0$，证明：此函数在 a 点没有导数. 单侧导数 $f'_-(a)$及 $f'_+(a)$等于什么？

提示 注意 $f'_-(a)=-\varphi(a)$，$f'_+(a)=\varphi(a)$.

解 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}\varphi(a+\Delta x)=\begin{cases}\varphi(a+\Delta x), & \Delta x>0,\\ -\varphi(a+\Delta x), & \Delta x<0.\end{cases}$

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to -0}[-\varphi(a+\Delta x)]=-\varphi(a),\quad \text{即}\quad f'_-(a)=-\varphi(a);$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}[\varphi(a+\Delta x)]=\varphi(a),\quad \text{即}\quad f'_+(a)=\varphi(a).$$

由于 $\varphi(a)\neq 0$，故 $f'_-(a)\neq f'_+(a)$，因此，$f(x)$在 a 点没有导数.

【996】 举出在已知点：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 没有导数的连续函数的例子.

提示 已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 由此，可令 $y=\sum\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

解 我们已知 $y=|x-a|$ 在 $x=a$ 处连续而无导数. 利用这一点，我们作一个函数

$$y=f(x)=\sum_{k=1}^{n}|x-a_k|,$$

它在 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 点均连续，而在这些点均无导数.

【997】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 的任何邻域上都有不可微点，但在该点是可微的.

作出此函数的略图.

证 对于函数 $f(x)$，我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{x}=0,$$

故 $f'(0)=0$，即在 $x=0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x=0$ 的任何邻域 $(-\delta,\delta)$（其中 $\delta>0$）中，函数 $f(x)$ 总有不可微点. 事实上，令

$$x_n=\frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

则当 n 充分大时，总可使 $0<x_n<\delta$，从而点 $x_n\in(-\delta,\delta)$. 对于这样的点 x_n，有

$$f'_-(x_{2n})=\pi \quad 及 \quad f'_+(x_{2n})=-\pi,$$

所以，

$$f'_-(x_{2n})\neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1})\neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是，函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图像全在 Ox 轴上方，包括原点；当 $x=\frac{2}{2n+1}$ 时，$f(x)=0$，且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 997 所示.

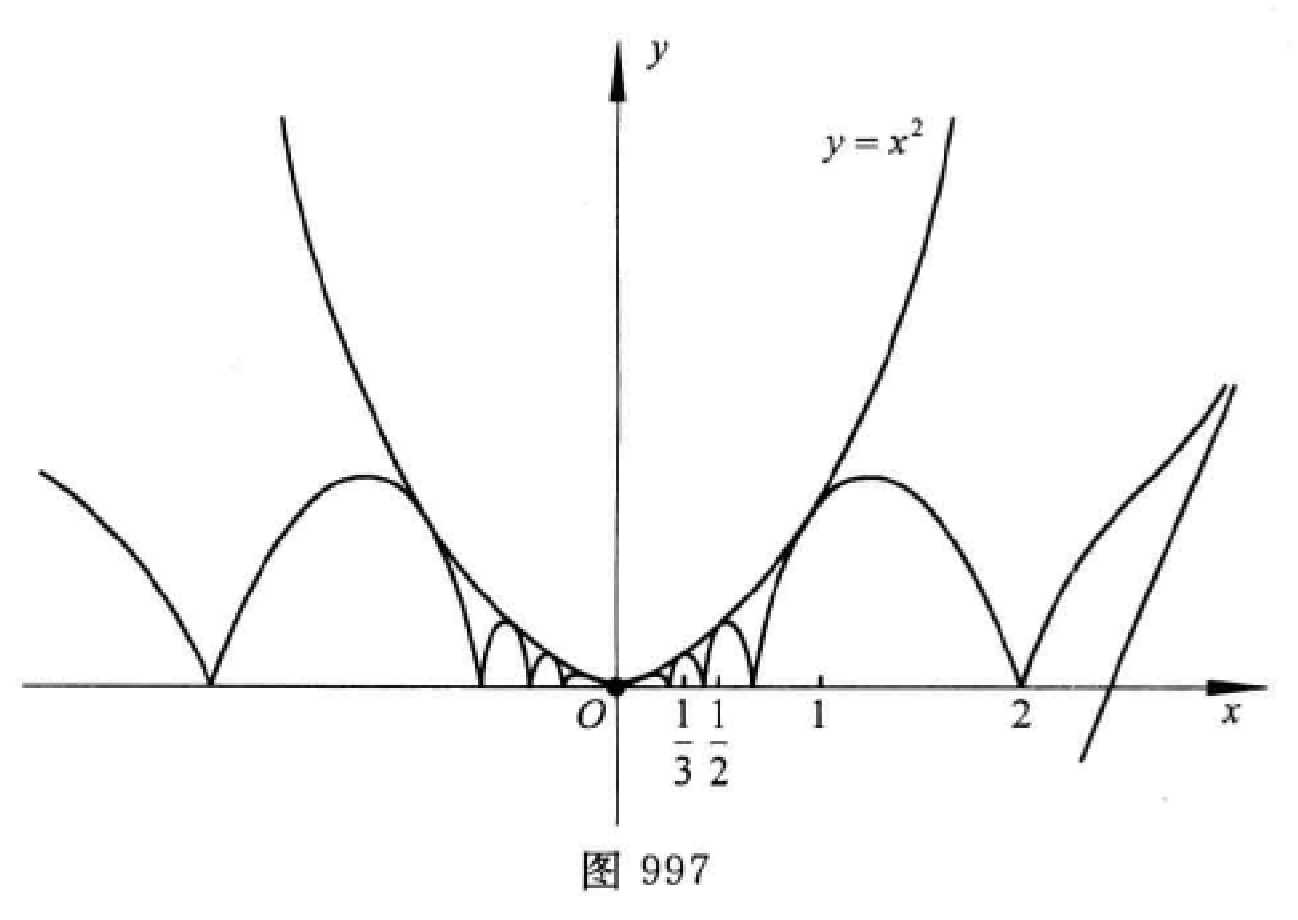


图 997

【998】 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

证 $\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\text{ 为有理数},\\ 0, & \Delta x\text{ 为无理数}.\end{cases}$ 于是，有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=0$，即 $f'(0)=0$.

其次，对于任一点 $x\neq 0$，分两种情形讨论函数的可微性：

(1) x 为有理数. 取一无理数数列 $\{x_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，则有

$$\lim_{x_n\to x}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=\lim_{x_n\to x}\frac{0-x^2}{x_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一有理点 $(\neq 0)$ 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数数列 $\{x'_n\}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=x$，则有

$$\lim_{x'_n\to x}\frac{f(x'_n)-f(x)}{x'_n-x}=\lim_{x'_n\to x}\frac{x'^2_n}{x'_n-x}=\infty.$$

由此可知，函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

总上所述，函数 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 时有导数.

【999】 研究下列函数的可微性：

(5) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2, & |x|\leqslant 1,\\ |x|-1, & |x|>1.\end{cases}$

解 (5) 函数 y 对于 $|x|\neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x|=1$ 点的可微性.

(ⅰ) 当 $x=1$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(\Delta x+2)^2, & \Delta x<0,\\ 1, & \Delta x>0.\end{cases}$ 于是，$\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$，

所以，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$，即函数 y 在 $x=1$ 点可微.

(ⅱ) 当 $x=-1$ 时，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x}=-1, & \Delta x<0,\\[2ex] \dfrac{\frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4}}{\Delta x}=-\dfrac{1}{2}\Delta x+\dfrac{1}{4}(\Delta x)^2, & \Delta x>0.\end{cases}$$

于是，$\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$ 及 $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$，所以，函数 y 在 $x=-1$ 点不可微.

求函数 $f(x)$ 的左导数 $f'_-(x)$ 和右导数 $f'_+(x)$. 设：

【1001】 $f(x)=[x]\sin\pi x$.

解 当 x 不等于整数时，$f'_-(x)=f'_+(x)=\pi[x]\cos\pi x$；

当 x 为整数时，从定义出发得

$$f'_+(k)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{[k+\Delta x]\sin\pi(k+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{k\cos k\pi\sin(\pi\Delta x)}{\Delta x}=k\pi(-1)^k,$$

同法可得 $f'_-(k)=\pi(k-1)(-1)^k$.

【1002】 $f(x)=\begin{cases}x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 当 $x\neq\dfrac{2}{2k+1}$（k 为整数）时（即使 $\cos\dfrac{\pi}{x}\neq 0$ 的 x 值），

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|+\frac{\pi}{x}\,\frac{\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|}{\cos\frac{\pi}{x}}\sin\frac{\pi}{x}=\left(\cos\frac{\pi}{x}+\frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}\right)\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{\pi}{x}\right);$$

当 $x=\dfrac{2}{2k+1}$ 时，从定义出发易得

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right)=-\frac{2k+1}{2}\pi,\quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right)=\frac{2k+1}{2}\pi\quad(k\text{ 为整数}).$$

【1009】 证明：函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续，但在此点既无左导数，又无右导数.

证 由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以，$f(x)$ 在点 $x=0$ 连续.

其次，由于

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左侧还是从右侧趋于零，此极限均不存在. 因此，在点 $x=0$ 函数 $f(x)$ 既无左导数，也无右导数.

【1011】 设 $F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0,\end{cases}$ 其中函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 为左可微的. 应当如何选择系数 a 和 b，使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微?

提示 注意 $F(x_0)=f(x_0)=F(x_0-0)$，$F(x_0+0)=ax_0+b$，$F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$，$F'_+(x_0)=a$.

解 $F(x_0)=F(x_0-0)=f(x_0)$，$F(x_0+0)=ax_0+b$. 当 $f(x_0)=ax_0+b$ 时，函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0)=f'_-(x_0)$，$F'_+(x_0)=a$，故当 $a=f'_-(x_0)$ 时，函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微.

解方程组 $\begin{cases}a=f'_-(x_0),\\ f(x_0)=ax_0+b,\end{cases}$ 即得所求的系数为 $a=f'_-(x_0)$，$b=f(x_0)-x_0f'_-(x_0)$.

【1013】 用抛物线 $y=a+bx^2$（$|x|\leqslant c$）（其中 a 与 b 为未知的参数）去补充曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$（$|x|>c$）的部分，以便得到一条光滑曲线.

提示 显见 $c>0$，注意在点 $x=c$ 处，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c} \quad 及 \quad a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

由对称性可知，在点 $x=-c$ 处，按上述条件求得的系数 a 与 b 也使两曲线光滑连接.

解 显见 $c>0$，否则在点 $x=c$ 处就不可能形成一条光滑曲线. 此时，在点 $x=c$ 处两曲线的切线斜率相等，且有相同的纵坐标. 于是，有

$$(a+bx^2)'\Big|_{x=c}=\left(\frac{m^2}{|x|}\right)'\Big|_{x=c} \quad 及 \quad a+bc^2=\frac{m^2}{c}.$$

从而得 $2bc=-\frac{m^2}{c^2}$，$a+bc^2=\frac{m^2}{c}$. 解之，得 $a=\frac{3m^2}{2c}$，$b=-\frac{m^2}{2c^3}$.

由曲线的对称性可知，在点 $x=-c$ 处，按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y=a+bx^2$ 与曲线 $y=\frac{m^2}{|x|}$ 也连成一条光滑曲线.

【1015】 若：(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，而函数 $g(x)$ 在此点没有导数；(2) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数，可否断定他们的积 $F(x)=f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 没有导数?

提示 (1) 不能. 例如，$f(x)=x$，$g(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处.

(2) 不能. 例如，$f(x)=g(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处.

解 (1) 不能. 例如，$f(x)=x$ 在点 $x=0$ 处有导数，$g(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处没有导数，而它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=x|x|$$

在点 $x=0$ 处有导数. 事实上，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x|\Delta x|-0\cdot|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即有 $F'(0)=0$.

(2) 不能. 例如，

$$f(x)=|x|,\quad g(x)=|x|,$$

在点 $x=0$ 处它们都没有导数，但它们的积

$$F(x)=f(x)g(x)=(|x|)^2=x^2,$$

在点 $x=0$ 处有导数，且 $F'(0)=2x\Big|_{x=0}=0$.

【1018】 函数 $f(x)$ 在其不连续点可否有：(1) 有限的导数；(2) 无穷的导数?

提示 (1)不能. (2)能.例如,$f(x)=\mathrm{sgn}x$,在点 $x=0$ 处.

解 (1)不能.否则由此可推出其连续性.

(2)能.例如,$y=f(x)=\mathrm{sgn}x$ 它在点 $x=0$ 不连续,但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{|\Delta x|}\to+\infty\quad(\Delta x\to 0).$$

【1021】 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上可微,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.由此能否推出 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在?

提示 不能.例如,函数 $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$,在 $(0,+\infty)$ 上.

解 不能.例如,函数 $f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$,它在 $(0,+\infty)$ 上可微,$f'(x)=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在.

【1022】 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上可微,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.由此可否推出有限的或无穷的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在?

提示 不能.例如,函数 $f(x)=\cos(\ln x)$,在 $(0,+\infty)$ 上.

解 不能.例如,

$$f(x)=\cos(\ln x),$$

它在 $(0,+\infty)$ 上有界且可微,其导数为 $f'(x)=-\frac{\sin(\ln x)}{x}$,同时有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.然而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在.

【1030】 矩形的一边 $x=20\mathrm{m}$,另一边 $y=15\mathrm{m}$.若第一边以 $1\mathrm{m/s}$ 的速度减少,而第二边以 $2\mathrm{m/s}$ 的速度增加,问这矩形的面积和对角线变化的速度如何?

解 面积 $S=xy$,对角线 $l=\sqrt{x^2+y^2}$ $(x>0,y>0)$,对 t 求导数,即得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\quad 及\quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

按题设,有 $x=20,y=15,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2$,代入上面两式,得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=20\cdot 2+(-1)\cdot 15=25,\quad \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{-20+2\cdot 15}{\sqrt{20^2+15^2}}=0.4.$$

于是,该矩形的面积的变化率为 $25\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$,而对角线的变化率为 $0.4\mathrm{m/s}$.

§2. 反函数的导数.用参数形式给出的函数的导数.隐函数的导数

1° **反函数的导数** 导数 $f'(x)\neq0$ 的可微函数 $y=f(x)(a<x<b)$ 具有单值连续的反函数 $x=f^{-1}(y)$,此反函数也可微,并且成立公式

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}.$$

2° **用参数形式给出的函数的导数** 若方程组

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad(\alpha<t<\beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微函数,且 $\varphi'(t)\neq0$,在某区域内确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导数可用公式 $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ 求出.

3° **隐函数的导数** 若可微函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

则此隐函数之导数 $y'=y'(x)$ 可从以下方程求得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F(x,y)]=0,$$

其中 $F(x,y)$ 是变量 x 的复合函数．

【1034】 证明：由方程 $y^3+3y=x$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在，并求它的导数 y'_x．

证 对函数 $x=f(y)=y^3+3y$ 有

$$f'(y)=3y^2+3=3(y^2+1)>0$$

其中 y 为任意实数，故 $f(y)$ 是严格增大的(在 $-\infty<y<+\infty$)，因此存在单值的反函数 $y=y(x)(-\infty<x<+\infty)$，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

【1035】 证明：由方程 $y-\varepsilon\sin y=x$ $(0\leqslant\varepsilon<1)$ 确定的单值函数 $y=y(x)$ 存在，并求其导数 y'_x．

提示 仿 1034 题的证明，并利用反函数的求导公式．

证 对于函数 $x=f(y)=y-\varepsilon\sin y$ 有

$$f'(y)=1-\varepsilon\cos y>0\quad(0\leqslant\varepsilon<1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格增大的，从而反函数 $y=y(x)$ 存在且是单值的，且

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

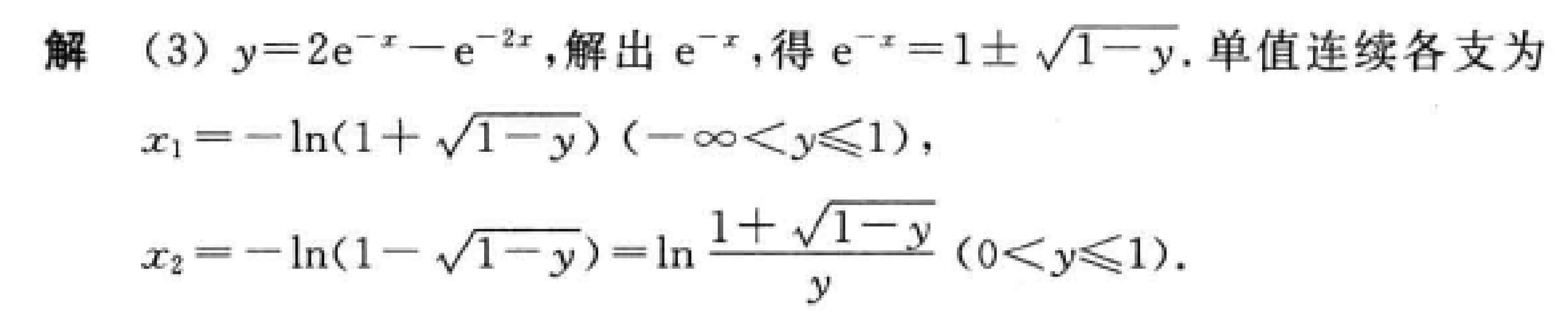
【1036】 设：(3) $y=\mathrm{sh}x$．求它的反函数 $x=x(y)$ 的存在域，并求它的导数．

解 (3) 由 $y'_x=\mathrm{ch}x>0$ 知有单值连续反函数 $x=x(y)$，其存在域为 $-\infty<y<+\infty$，而导数

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

其中因为 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$，所以，$\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}=2\sqrt{1+y^2}$．

【1037】 设：(3) $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$．选出反函数 $x=x(y)$ 的单值连续的各支，求它们的导数并作其图像．



解 (3) $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$，解出 e^{-x}，得 $\mathrm{e}^{-x}=1\pm\sqrt{1-y}$．单值连续各支为

$$x_1=-\ln(1+\sqrt{1-y})\ (-\infty<y\leqslant1),$$

$$x_2=-\ln(1-\sqrt{1-y})=\ln\frac{1+\sqrt{1-y}}{y}\ (0<y\leqslant1).$$

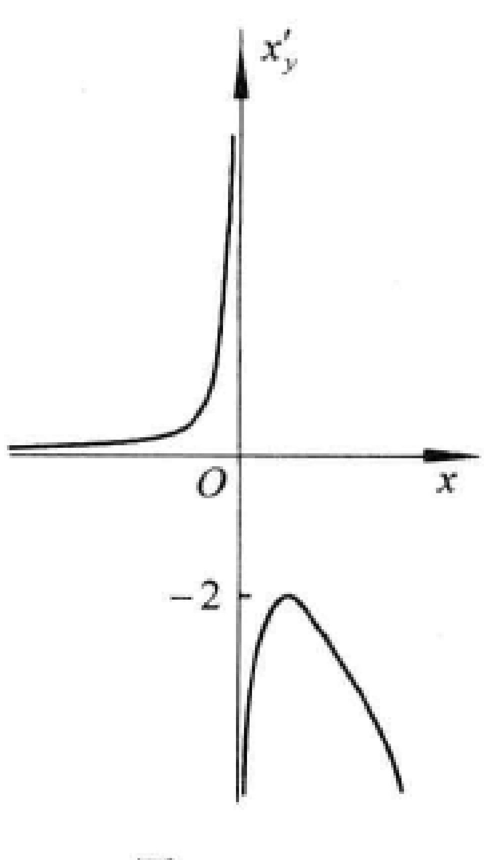


图 1037

由 $y=2\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$，对 y 求导数，得 $1=-2\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+2\mathrm{e}^{-2x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，所以，$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{2(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x})}\quad(i=1,2)$．

(图 1037)

【1038】 作出函数 $y=y(x)$ 的略图，并求其导数 y'_x．设：$x=-1+2t-t^2$，$y=2-3t+t^3$．当 $x=0$ 及 $x=-1$时，$y'_x(x)$等于什么？在何点 $M(x,y)$ 的导数 $y'_x(x)=0$?

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-3+3t^2}{2-2t}=-\frac{3}{2}(1+t).$$

当 $t=-1$，即 $x=-4$，$y=4$ 时．$y'_x(x)=0$．

当 $x=0$ 时，$t=1$，此时 $y'_x(x)=-3$；当 $x=-1$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y'_x(x)=-\frac{3}{2}$或 $y'_x(x)=-\frac{9}{2}$．

列表：

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t<-1$ 时，$\dfrac{dy}{dx}>0$，函数值 y 随自变量增加而增加，曲线上升.

当 $t>-1$ 时，$\dfrac{dy}{dx}<0$，曲线下降.

图像如图 1038 所示.

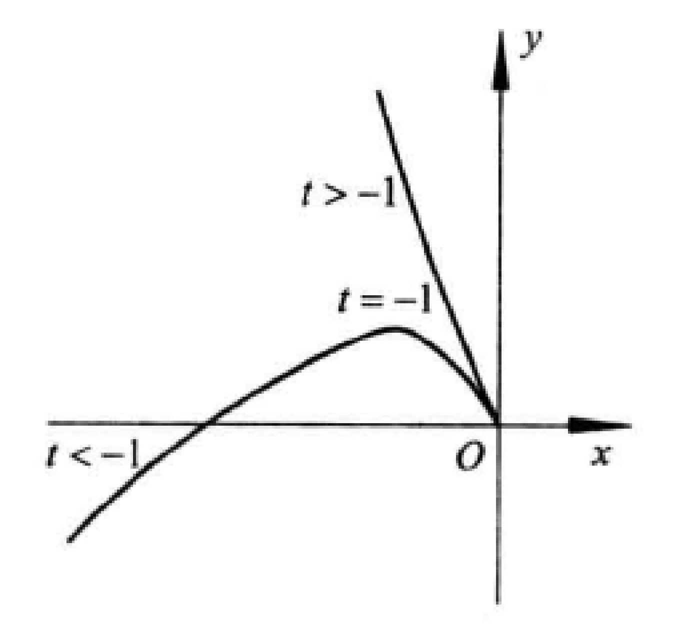


图 1038

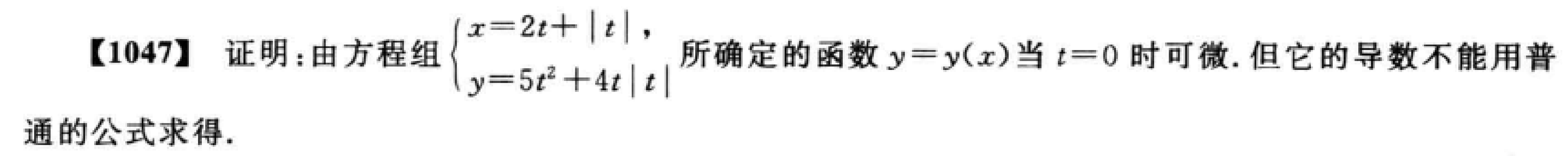
求导数 y'_x(参数是正数). 设：

【1046】 $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$

解 $$\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}}\left[-\frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2},$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{1+t^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}-\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}.$$

于是，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{\operatorname{sgn}t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=\operatorname{sgn}t\quad(0<|t|<+\infty).$



【1047】 证明：由方程组 $\begin{cases}x=2t+|t|,\\ y=5t^2+4t|t|\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微. 但它的导数不能用普通的公式求得.

提示 易知 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{t=0}=\begin{cases}3\Delta t, & \Delta t>0,\\ \Delta t, & \Delta t<0.\end{cases}$ 再注意到 $|t|$ 在 $t=0$ 处不可微，即知 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $t=0$ 处不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时，x 由 0 变化到 $\Delta x=2\Delta t+|\Delta t|$，$y$ 由 0 变化到 $\Delta y=5(\Delta t)^2+4\Delta t\cdot|\Delta t|$. 于是，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{t=0}=\frac{5(\Delta t)^2+4\Delta t|\Delta t|}{2\Delta t+|\Delta t|}=\begin{cases}3\Delta t, & \Delta t>0,\\ \Delta t, & \Delta t<0,\end{cases}$$

从而，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\to 0\ (\Delta t\to 0)$. 即 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可微. 但由于 $|t|$ 当 $t=0$ 时不可微，因而 $\dfrac{dx}{dt}$ 及 $\dfrac{dy}{dt}$ 当 $t=0$ 时不存在. 所以，导数 $\dfrac{dy}{dx}$ 当 $t=0$ 的值不能用普通公式求得.

求下列隐函数的导数 y'_x：

【1053】 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$（对数螺线）.

解 两端对 x 求导，得 $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{xy'_x-y}{x^2}=\dfrac{x+yy'_x}{x^2+y^2}$. 于是，$y'_x=\dfrac{x+y}{x-y}\quad(x\neq y,\ x\neq 0).$

【1054】 求 y'_x，设：(3) $r=ae^{m\varphi}$（对数螺线），其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $\varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$ 是极坐标.

提示 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,其中 $r=r(\varphi)$.利用参数方程所确定的函数的求导方式,可得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{r\cos\varphi+\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}}{-r\sin\varphi+\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}}.$$

解 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,其中 $r=r(\varphi)$.于是,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\frac{dr}{d\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi}. \tag{1}$$

(3) $\frac{dr}{d\varphi}=mae^{m\varphi}$,代入(1)式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi+ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi-ae^{m\varphi}\sin\varphi}=\frac{m\sin\varphi+\cos\varphi}{m\cos\varphi-\sin\varphi}=\tan\left(\varphi+\arctan\frac{1}{m}\right).$$

§3. 导数的几何意义

1° **切线和法线的方程** 可微函数 $y=f(x)$在其图像上之一点$M(x,y)$(图 2-3(1))处的**切线** MT 和**法线** MN 的方程分别具有以下形式:

$$Y-y=y'(X-x) \quad 及 \quad Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 X,Y 为切线或法线上的点的坐标,而 $y'=f'(x)$为切点处导数的值.

2° **切线长和法线长** 对于与切线和法线有关的一些线段:PT 为次切线,PN 为次法线,MT 为切线,MN 为法线.考虑到 $\tan\alpha=y'$(图 2-3(1)).我们得到下列值:

$$PT=\left|\frac{y}{y'}\right|, \quad PN=|yy'|, \quad MT=\left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2}, \quad MN=|y|\sqrt{1+y'^2}.$$

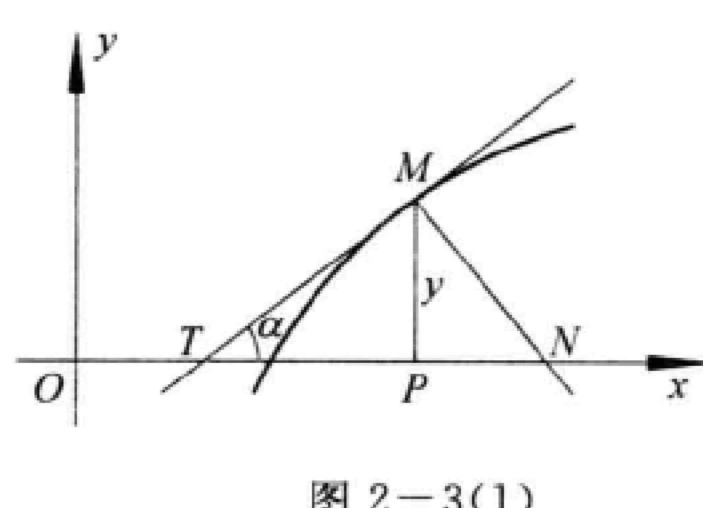


图 2-3(1)

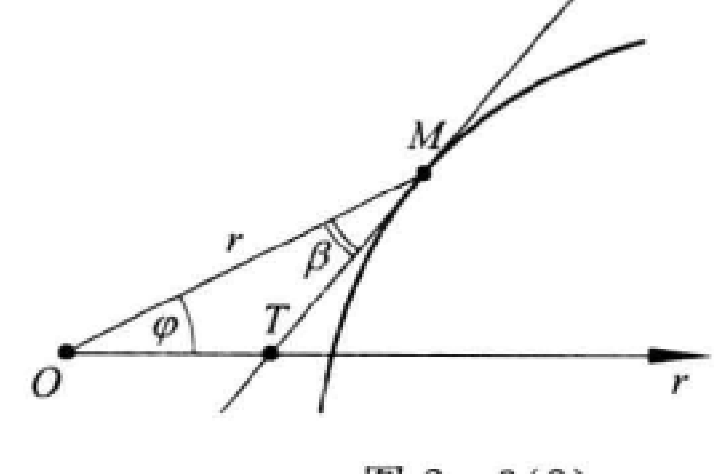


图 2-3(2)

3° **切线与切点的径向量间的夹角** 若 $r=f(\varphi)$为曲线的极坐标方程,β 为切线 MT 与切点 M 的径向量 OM 所成的角(图 2-3(2)),则 $\tan\beta=\frac{r}{r'}$.

【1055】 写出曲线 $y=(x+1)\sqrt[3]{3-x}$在下列各点处的切线和法线方程:

(1) $A(-1,0)$; (2) $B(2,3)$; (3)$C(3,0)$.

解 由于

$$y'=\sqrt[3]{3-x}-\frac{x+1}{3\sqrt[3]{(3-x)^2}},$$

所以,在 A 点的切线方程为

$$y-0=y'|_{x=-1}(x+1), \quad 即 \quad y=\sqrt[3]{4}(x+1);$$

法线方程为

$$y-0=-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1), \quad 即\ y=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x+1).$$

在 B 点的切线方程为 $y-3=y'|_{x=2}(x-2)$，即 $y=3$；法线方程为 $x=2$.

在 C 点，由于 y' 为无穷，故切线方程为 $x=3$；法线方程为 $y=0$.

【1057】 证明：抛物线

$$y=a(x-x_1)(x-x_2) \quad (a\neq 0,\ x_1<x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 $\beta\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

提示 先求出抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$；其次，再求得抛物线在点 A 及点 B 处切线的斜率分别为

$$k_A=y'\Big|_{x=x_1} \quad 及 \quad k_B=y'\Big|_{x=x_2}.$$

由此即易证明 $\alpha=\beta$.

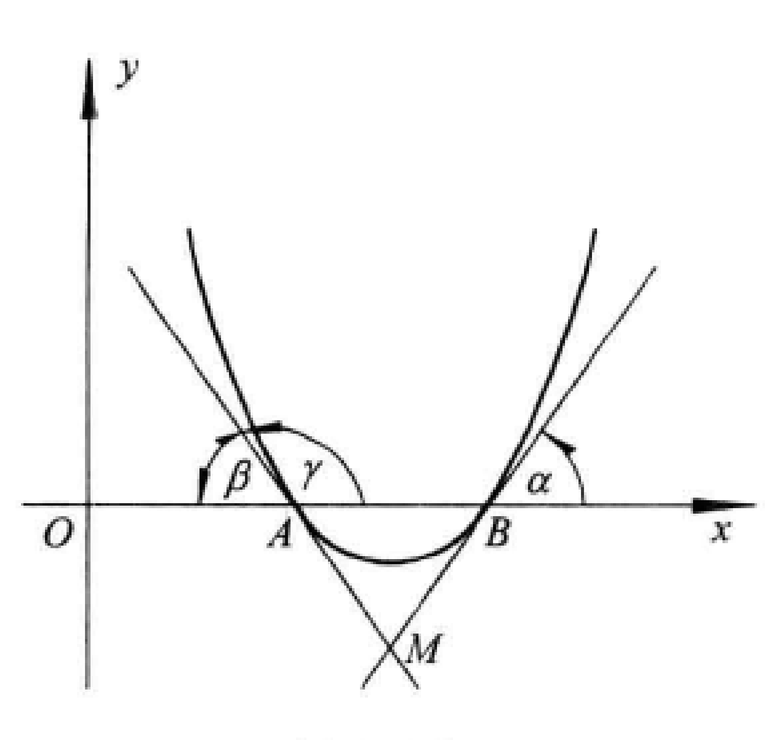


图 1057

解 如图 1057 所示，显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$. 由于 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$，故在点 A、B 处切线的斜率分别为

$$k_A=y'\Big|_{x=x_1}=2ax_1-a(x_1+x_2)=a(x_1-x_2)=\tan\gamma=\tan(\pi-\beta), \tag{1}$$

$$k_B=y'\Big|_{x=x_2}=2ax_2-a(x_1+x_2)=a(x_2-x_1)=\tan\alpha. \tag{2}$$

由(2)式得

$$\tan(\pi-\alpha)=a(x_1-x_2). \tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得 $\alpha=\beta$.

【1062】 曲线 $y=\sin x$ 及 $y=\cos x$ 相交的角如何？

解 先求交点. 解 $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\cos x \end{cases}$ 得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ （k 为整数）.

其次，求两曲线在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处切线的斜率：

$$k_1=(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k_2=(\cos x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}=(-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ 处，交角 θ（今取锐角，即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）满足

$$\tan\theta=\left|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}\right|=\left|(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}\right|=2\sqrt{2}.$$

于是，$\theta=\arctan 2\sqrt{2}\approx 70°32'$.

【1064】 求出曲线：(1) $y=\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x=0$ 处，(2) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x=1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

提示 (1) $y'_-(0)=-|a|$，$y'_+(0)=|a|$. 于是，夹角 θ 满足 $\tan\theta=\frac{2|a|}{|a|^2-1}$.

(2) $y'_-(1)=1$，$y'_+(1)=-1$. 于是，夹角为 $90°$.

解 (1)函数的左、右导数分别为

$$y'_-(0)=\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to-0}\left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}\right]=-|a|,$$

$$y'_+(0)=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1-e^{-a^2x^2}}}{x}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2}-1}{-a^2x^2}\cdot a^2}=|a|.$$

所以，于点 $x=0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\tan\theta=\frac{2|a|}{|a|^2-1},\quad 即\ \theta=2\arctan\frac{1}{|a|}.$$

(2) 函数的左、右导数分别为

$$y'_-(1)=\lim_{x\to1-0}\frac{\arcsin\frac{2x}{1+x^2}-\arcsin1}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{-\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x}=1,$$

同理， $y'_+(1)=-1$.

因此，左、右切线的斜率互为负倒数，所以，夹角为 $90°$.

【1070】 证明：星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证明思路 对于星形线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq0)$ 处，容易求得其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}\ (x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\ 及\ l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是，切线介于坐标轴间部分的长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$，经计算得 $l=a$. 从而命题获证.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 $(x_0,y_0)(x_0\neq0)$ 处，其切线方程为

$$y-y_0=-\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}\ (x-x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x=x_0+\sqrt[3]{x_0y_0^2}\quad 及\quad l_y=y_0+\sqrt[3]{x_0^2y_0}.$$

于是，切线在两坐标轴间的部分长为 $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}$. 由于

$$\begin{aligned}l_x^2+l_y^2&=x_0^2+y_0^2+3x_0\sqrt[3]{x_0y_0^2}+3y_0\sqrt[3]{x_0^2y_0}=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{x_0^2y_0^2}(\sqrt[3]{x_0^2}+\sqrt[3]{y_0^2})\\&=x_0^2+y_0^2+3\sqrt[3]{a^2x_0^2y_0^2}=(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})^3+y_0^2+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3a^{\frac{4}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{4}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2-3a^{\frac{2}{3}}y_0^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}})+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}\\&=a^2-3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}+3(ax_0y_0)^{\frac{2}{3}}=a^2,\end{aligned}$$

故 $l=a$，即星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

【1072】 在什么条件下，立方抛物线 $y=x^3+px+q$ 与 Ox 轴相切？

提示 切点的横坐标满足 $y'=0$ 及 $y=0$，由 $y'=0$ 及 $y=0$ 可得 $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$.

解 由方程 $y=x^3+px+q$ 求得 $y'=3x^2+p$. 要此曲线与 Ox 轴相切，必须满足

$$\begin{cases}3x^2+p=0, & (1)\\ x^3+px+q=0. & (2)\end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2+p)=-q$，两端平方，则

$$x^2(x^2+p)^2=q^2. \tag{3}$$

将(1)式代入(3)式，得

$$-\frac{p}{3}\cdot\left(-\frac{p}{3}+p\right)^2=q^2,\quad 即\quad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0,$$

此即所求的条件.

【1075】 证明：双曲线族 $x^2-y^2=a$ 及 $xy=b$ 形成一**正交网**，就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2-y^2=a$ 与双曲线 $xy=b$ 相交于点 $P(x,y)$，则在此点双曲线 $x^2-y^2=a$ 的切线的斜率 k_1 满足：$2x-2yk_1=0$，所以，

$$k_1=\frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy=b$ 的切线的斜率 k_2 满足：$y+xk_2=0$，所以，

$$k_2=-\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1k_2=\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{x}\right)=-1.$$

因此，两双曲线交成直角，故此两曲线族形成一正交网.

§4. 函数的微分

1° **函数的微分** 若自变量为 x 的函数 $y=f(x)$ 之增量可表为以下形式：

$$\Delta y=A(x)\mathrm{d}x+o(\mathrm{d}x),$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$，则此增量的线性部分称为*函数 y 的微分*：

$$\mathrm{d}y=A(x)\mathrm{d}x.$$

函数 $y=f(x)$ 的微分存在的充分必要条件为存在有限的导数 $y'=f'(x)$，这时我们有

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若自变量 x 为另一自变量的函数，公式(1)于这种情形下仍然有效(*一阶微分的不变性*).

2° **函数的微小增量的估计** 为了计算可微函数 $f(x)$ 的微小增量，可利用公式

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x)\neq 0$，则当 $|\Delta x|$ 充分小时，它的相对误差可以任意地小.

例如，若自变量 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$，则函数 $y=f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 可用下列公式近似地表示出来：

$$|\Delta y|=|f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y=|[\ln f(x)]'\Delta x|=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x\right|.$$

求下列函数 y 的微分：

【1089】 $y=\arcsin\dfrac{x}{a}\quad(a\neq 0)$.

解 $y'=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{\mathrm{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$\mathrm{d}y=\dfrac{\mathrm{sgn}a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\quad(|x|<|a|)$.

【1096】 求：(1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^+$.

提示 (2) 由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故不妨设 $x>0$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right).$$

解 (1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}(x^3-2x^6-x^9)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^3}[x^3-2(x^3)^2-(x^3)^3]=1-4x^3-3x^6$；

(2) 由于 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为偶函数，故不妨设 $x>0$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\sin\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2x}\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3},$$

显然,上述结果对于也 $x<0$ 是正确的($x\neq0$).

【1097】 有半径为 $R=100\text{cm}$ 及圆心角 $\alpha=60^\circ$ 的扇形.若(1)其半径 R 增加 1cm;(2)角 α 减小 $30'$,则扇形面积的变化如何?求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A=\frac{1}{2}R^2\alpha$,其增量

$$\Delta A=\frac{\alpha}{2}[(R+\Delta R)^2-R^2]=\alpha R\Delta R+\frac{1}{2}\alpha(\Delta R)^2,\quad 或\quad \Delta A=\frac{1}{2}R^2\Delta\alpha.$$

扇形面积的微分

$$\mathrm{d}A=R\alpha\mathrm{d}R,\quad 或\quad \mathrm{d}A=\frac{1}{2}R^2\mathrm{d}\alpha.$$

增量是精确的解,微分是近似的解.

(1) 当 $R=100,\alpha=\frac{\pi}{3},\Delta R=1$ 时,

$\Delta A=\frac{\pi}{6}(200+1)=105.2\text{cm}^2$, $\mathrm{d}A=100\cdot\frac{\pi}{3}=104.7\text{cm}^2$(增加).

(2) 当 $\Delta\alpha=-\frac{\pi}{360}$时,

$\Delta A=\frac{1}{2}\cdot100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\text{cm}^2$, $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}\cdot100^2\cdot\left(-\frac{\pi}{360}\right)=-43.6\text{cm}^2$(减少).

利用函数之微分代替函数的增量,求下列各式之近似值:

【1102】 arctan1.05.

解 设 $f(x)=\arctan x$, $x_0=1$, $\Delta x=0.05$, 则

$$\arctan1.05\approx\arctan1+0.05\cdot\frac{1}{2}=0.8104(\text{弳})=46^\circ26'.$$

【1104】 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad(a>0),$$

其中 $|x|\ll a$ (正数 A 和 B 之间的关系式 $A\ll B$ 表示 A 远小于 B).

利用这个公式近似地计算:(3) $\sqrt{120}$.并与平方表中的数值比较.

证 设 $f(y)=\sqrt{y}$, $y_0=a^2$, $\Delta y=x$,则

$$\sqrt{y_0+\Delta y}\approx\sqrt{y_0}+\frac{1}{2\sqrt{y_0}}\Delta y\quad(当\ |\Delta y|\ll\sqrt{y_0}\ 时).$$

于是,$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}$ (当 $|x|\ll a$ 时).

(3) $\sqrt{120}=\sqrt{11^2-1}\approx11-\frac{1}{2\cdot11}=10.9546$,查表:$\sqrt{120}=10.9545$.

【1105】 证明近似公式:

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(a>0).$$

其中 $|x|\ll a$.利用此公式近似地计算:(4) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y)=\sqrt[n]{y}$, $y_0=a^n$, $\Delta y=x$, 则

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx\sqrt[n]{a^n}+\frac{x}{n\sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}}=a+\frac{x}{na^{n-1}}\quad(当\ |x|\ll a\ 时).$$

(4) $\sqrt[10]{1000}=\sqrt[10]{2^{10}-24}\approx 2-\frac{24}{10\cdot 2^9}=1.9953$，查表：$\sqrt[10]{1000}=1.9953$.

【1108】 为了确定重力加速度，可以利用摆的振动公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$，其中 l 为摆长，T 为振动周期. 当测量(1)摆长 l，(2)周期 T 时，相对误差 δ 如何影响 g 的值？

解 (1) $\delta_g=\left|\frac{\mathrm{d}g}{g}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}l}{l}\right|$，于是，$\delta_g=\delta_l$，即 g 的相对误差等于摆长 l 的相对误差.

(2) $\delta_g=\left|\frac{-8\pi^2 l\cdot T^2\mathrm{d}T}{T^3\cdot 4\pi^2 l}\right|=2\left|\frac{\mathrm{d}T}{T}\right|$，于是，$\delta_g=2\delta_T$，即 g 的相对误差是周期 T 的相对误差的 2 倍.

§5. 高阶的导数和微分

1° **基本定义** 函数 $y=f(x)$ 的高阶导数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!)：

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n=2,3,\cdots).$$

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有连续的导数 $f^{(n)}(x)$，则简写为：$f(x)\in C^{(n)}(a,b)$. 特别地，若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有各阶导数，并且这些导数是连续的，则使用记号：$f(x)\in C^{(\infty)}(a,b)$.

函数 $y=f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的：

$$\mathrm{d}^n y=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y) \quad (n=2,3,\cdots),$$

其中认为 $\mathrm{d}^1 y=\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$.

若 x 为自变量，则认为：

$$\mathrm{d}^2 x=\mathrm{d}^3 x=\cdots=0.$$

这时成立公式

$$\mathrm{d}^n y=y^{(n)}\mathrm{d}x^n \quad 及 \quad y^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}.$$

2° **基本公式** ：

Ⅰ. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a \quad (a>0)$； $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$；

Ⅱ. $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

Ⅲ. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$；

Ⅳ. $(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；

Ⅴ. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

3° **莱布尼茨公式** 若函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 有 n 阶导数(n 阶可微)，则

$$(uv)^{(n)}=\sum_{i=0}^{n}C_n^i u^{(i)}v^{(n-i)},$$

其中 $u^{(0)}=u$，$v^{(0)}=v$，C_n^i 为由 n 个元素每次取 i 个的组合数.

类似地对于微分 $\mathrm{d}^n(uv)$ 得：

$$\mathrm{d}^n(uv)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i\mathrm{d}^{n-i}u\,\mathrm{d}^i v,$$

其中认为 $\mathrm{d}^0 u=u$ 及 $\mathrm{d}^0 v=v$.

求 y''，设：

【1118】 $y=\ln f(x)$.

解 $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$， $y''=\frac{f(x)f''(x)-f'^2(x)}{f^2(x)} \quad (f(x)>0)$.

【1119】 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\cdot\frac{1}{x}[\cos(\ln x)-\sin(\ln x)]=2\cos(\ln x)$,

$y''=-\frac{2\sin(\ln x)}{x}\quad(x>0)$.

设 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 为二阶可微函数,求 y'',设:

【1124】 $y=u^v\quad(u>0)$.

解 $y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$,

$$y''=u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)^2+u^v\left[v''\ln u+\frac{u'v'}{u}+\frac{(u'v'+vu'')u-vu'^2}{u^2}\right]$$

$$=u^v\left[\left(v'\ln u+\frac{u'}{u}v\right)^2+v''\ln u+\frac{2u'v'}{u}+\frac{v}{u^2}(uu''-u'^2)\right].$$

设 $f(x)$ 为三阶可微函数,求 y'' 及 y''',设:

【1128】 $y=f(\ln x)$.

解 $y'=\frac{1}{x}f'(\ln x)$,

$y''=-\frac{1}{x^2}f'(\ln x)+\frac{1}{x^2}f''(\ln x)=\frac{1}{x^2}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]$,

$y'''=-\frac{2}{x^3}[f''(\ln x)-f'(\ln x)]+\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-f''(\ln x)]=\frac{1}{x^3}[f'''(\ln x)-3f''(\ln x)+2f'(\ln x)]$

$(x>0)$.

【1130】 对于以下两种情形:(1)x 为自变量,(2)x 为中间变量,求函数 $y=e^x$ 的 d^2y.

解 (1) $dy=e^x dx$, $d^2y=e^x dx^2$;

(2) $dy=e^x dx$, $d^2y=e^x d^2x+e^x dx^2$.

若 x 为自变量,求 d^2y,设:

【1133】 $y=x^x$.

解 $y'=x^x(1+\ln x)$, $y''=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$,于是,$d^2y=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2\quad(x>0)$.

令 u 及 v 为变量 x 的二阶可微函数,求 d^2y,设:

【1134】 $y=uv$.

解 $dy=udv+vdu$,

$d^2y=dudv+ud^2v+dvdu+vd^2u=ud^2v+2dudv+vd^2u$.

【1137】 $y=a^u\quad(a>0)$.

解 $dy=a^u\ln a\,du$,

$d^2y=a^u\ln^2a\cdot du^2+a^u\ln a\cdot d^2u=a^u\ln a(\ln a\cdot du^2+d^2u)\quad(a>0)$.

求以参数形式给出的函数 $y=y(x)$ 的导数 $y'_x,y''_{x^2},y'''_{x^3}$,设:

【1142】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

解 $y'_x=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2}$, $y''_{x^2}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}$,

$$y'''_{x^3}=\frac{\dfrac{\cos\dfrac{t}{2}}{2a\sin^5\dfrac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}\quad(t\neq 2k\pi,\ k\text{ 为整数}).$$

【1144】 $x=f'(t)$, $y=tf'(t)-f(t)$.

解 $y'_x=\dfrac{tf''(t)}{f''(t)}=t$, $y''_{x^2}=\dfrac{1}{f''(t)}$, $y'''_{x^3}=-\dfrac{\dfrac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\dfrac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$ $(f''(t)\neq 0)$.

求由下列隐函数给出的 $y=y(x)$ 的 y'_x, y''_{x^2} 及 y'''_{x^3}：

【1148】 $x^2-xy+y^2=1$.

解 对 x 求导，得

$$2x-y-xy'+2yy'=0,\tag{1}$$

$$y'=\frac{2x-y}{x-2y}.\tag{2}$$

将(1)式两端再对 x 求导，得

$$2-2y'-xy''+2y'^2+2yy''=0,\tag{3}$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式，得

$$y''=\frac{6}{(x-2y)^3}.\tag{4}$$

将(3)式两端对 x 求导，得

$$-3y''-xy'''+6y'y''+2yy'''=0,\tag{5}$$

将(2)式及(4)式代入(5)式，得 $y'''=\dfrac{54x}{(x-2y)^5}$ $(x\neq 2y)$.

【1151】 设函数 $f(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且二阶可微. 应当如何选择系数 a,b 及 c，使函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

是二阶可微函数？

提示 注意 $F(x_0-0)=F(x_0+0)=F(x_0)$, $F'_-(x_0)=F'_+(x_0)$ 及 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$.

解 按题设 $F'(x)$ 存在，所以，$F(x)$ 在点 x_0 连续，即

$$\lim_{x\to x_0-0}F(x)=\lim_{x\to x_0+0}F(x)=F(x_0),$$

也即

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=f(x_0).$$

于是，$c=f(x_0)$. 其次，由 $F'(x_0-0)=F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\Big|_{x=x_0}=b,$$

再由 $F''(x_0-0)=F''(x_0+0)$ 得 $f''(x_0)=2a$，于是，$a=\dfrac{1}{2}f''(x_0)$.

【1154】 在重力场中，质点 $M(x,y)$ 在竖直平面 Oxy 内以初速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛出. 建立运动方程(忽略空气阻力)并计算速度 v、加速度 w 的大小及运动轨迹. 质点的最大上升高度和射程等于多少？

解 若不考虑空气的阻力，则有

$$\begin{cases}x=v_0t\cos\alpha,\\ y=v_0t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2.\end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程,得

$$y=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

即轨迹为一抛物线. 速度

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_0^2\cos^2\alpha+(v_0\sin\alpha-gt)^2}=\sqrt{v_0^2+g^2t^2-2v_0gt\sin\alpha},$$

而加速度

$$w=\sqrt{w_x^2+w_y^2}=\sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2}=\sqrt{0+(-g)^2}=g.$$

又 $\frac{dy}{dx}=\tan\alpha-\frac{gx}{v_0^2\cos^2\alpha}$,在最大高度处,$\frac{dy}{dx}=0$. 此时

$$x=\frac{v_0^2\cos^2\alpha\tan\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

于是,最大上升高度为

$$H_{\max}=\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\tan\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\cdot\frac{v_0^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2}=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt}=0$ 解出 $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$,再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有:$y=0$. 于是,

$$x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0,\quad \text{解得}\quad x=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}.$$

从而,最大射程为 $\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$.

求下列指定阶的导数:

【1159】 $y=\frac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

解 $y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-(x+1)+\frac{1}{1-x}$,

$$y'=-1+\frac{1}{(1-x)^2},\quad y''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad y'''=\frac{2\cdot3}{(1-x)^4},\quad\cdots,\quad y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}\quad(x\neq1).$$

【1167】 $y=\sin x\sin2x\sin3x$,求 $y^{(10)}$.

提示 利用三角公式易得 $y=\frac{1}{4}\sin4x-\frac{1}{4}\sin6x+\frac{1}{4}\sin2x$.

解 利用三角函数和、差与其积的互化公式,将 y 化简得

$$y=\frac{1}{4}\sin4x-\frac{1}{4}\sin6x+\frac{1}{4}\sin2x.$$

于是,

$$\begin{aligned}y^{(10)}&=\frac{1}{4}\cdot4^{10}\sin\left(4x+\frac{10}{2}\pi\right)-\frac{1}{4}\cdot6^{10}\sin\left(6x+\frac{10}{2}\pi\right)+\frac{1}{4}\cdot2^{10}\sin\left(2x+\frac{10}{2}\pi\right)\\&=-2^{18}\sin4x+2^8\cdot3^{10}\sin6x-2^8\sin2x.\end{aligned}$$

在下列各例中,视 x 为自变量,求指定阶的微分.

【1174】 $y=e^x\ln x$, 求 d^4y.

解 $d^4y=(e^x\ln x)^{(4)}dx^4=e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

设 u 为 x 的充分多次可微函数,在下列各例中求指定阶的微分.

【1178】 $y=\ln u$, 求 d^3y.

解　$dy=\frac{1}{u}du$,

$$d^2y=-\frac{1}{u^2}du^2+\frac{1}{u}d^2u,$$

$$d^3y=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{2}{u^2}dud^2u-\frac{1}{u^2}d^2udu+\frac{1}{u}d^3u=\frac{2}{u^3}du^3-\frac{3}{u^2}dud^2u+\frac{1}{u}d^3u.$$

【1180】　以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y=f(x)$ 的导数 y'' 及 y'''，但不假定 x 为自变量.

解　$y'=\frac{dy}{dx}$,

$$y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}=\frac{\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y'''=\frac{d\left(\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}\right)}{dx}=\frac{dx\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^3x & d^3y\end{vmatrix}-3d^2x\begin{vmatrix}dx & dy\\ d^2x & d^2y\end{vmatrix}}{dx^5}.$$

求 $y^{(n)}$，设：

【1188】　$y=\frac{ax+b}{cx+d}$.

提示　$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$，$y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$. 利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\quad\left(x\neq-\frac{d}{c},\ c\neq0\right).$$

解　$y'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$；　$y''=-\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$；

利用数学归纳法，可证得

$$y^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\quad\left(x\neq-\frac{d}{c},\ c\neq0\right).$$

事实上，对于 $n=2$ 等式成立，设对于 n 等式成立，则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)}=\frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n\cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}=\frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立，于是得证.

【1190】　$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$.

提示　$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.

解　$y=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$.

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\quad(x\neq1,\ x\neq2).$$

【1195】　$y=\sin^3x$.

提示　$y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin3x$.

解　$y=\sin x\sin^2x=\frac{1}{2}\sin x(1-\cos2x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\sin x\cos2x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin3x$.

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

【1205】　$y=\frac{e^x}{x}$.

解 $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=e^x\left\{\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}}\right\}$.

【1206】 $y=e^x\cos x$.

解 $y'=e^x(\cos x-\sin x)=2^{\frac{1}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

$$y''=2^{\frac{1}{2}}e^x\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=2^{\frac{2}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{2\pi}{4}\right),$$

利用数学归纳法可证得 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$.

求 d^ny,设:

【1212】 $y=\frac{\ln x}{x}$.

解 $d^ny=y^{(n)}dx^n=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\cdot\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]dx^n$

$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right]dx^n\quad(x>0).$$

【1215】 将函数 $f(x)=\sin^{2p}x$,其中 p 为正整数,化为三角多项式:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

提示 令 $t=\cos x+i\sin x$.

解 设 $t=\cos x+i\sin x$,则 $\sin x=\frac{1}{2i}(t-\bar{t})$其中 $\bar{t}$ 为 t 的共轭复数. 于是,

$$\sin^{2p}x=\frac{1}{(2i)^{2p}}(t-\bar{t})^{2p}=\frac{1}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^k t^{2p-k}(-1)^k\bar{t}^{\,k}$$

$$=(-1)^p\frac{1}{(2i)^{2p}}C_{2p}^p+\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k\cos(2p-2k)x.$$

所以,

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{2}{(2i)^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}C_{2p}^k(-1)^k(2p-2k)^n\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p+k}2^{n-2p+1}(p-k)^nC_{2p}^k\cos\left[(2p-2k)x+\frac{n}{2}\pi\right].$$

【1223】 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$,其中函数 $\varphi(x)$在点 a 的邻区内有$(n-1)$阶的连续导数,求 $f^{(n)}(a)$.

提示 由莱布尼茨公式求得 $f^{(n-1)}(x)$,再由导数定义即易得 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼茨公式,得

$$f^{(n-1)}(x)=(x-a)^n\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)^2\varphi'(x)+n!(x-a)\varphi(x).$$

于是,$f^{(n-1)}(a)=0$.

按导数定义,即得

$$f^{(n)}(a)=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[(x-a)^{n-1}\varphi^{(n-1)}(x)+C_{n-1}^1n(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-2)}(x)+\cdots+C_{n-1}^{n-2}n(n-1)\cdots3(x-a)\varphi'(x)+n!\varphi(x)\right]$$

$$=n!\varphi(a).$$

【1226】 证明:切比雪夫多项式 $T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 满足方程

$$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

证 $T'_m(x)=\frac{m}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)\quad(|x|<1)$,

$$T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(m\arccos x).$$

于是,

$$(1-x^2)T''_m(x)=-\frac{m^2}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)+\frac{mx}{2^{m-1}\sqrt{1-x^2}}\sin(m\arccos x)=-m^2T_m(x)+xT'_m(x),$$

即$(1-x^2)T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0$.

【1227】 证明:勒让德多项式 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}[(x^2-1)^m]^{(m)}$ $(m=0,1,2,\cdots)$ 满足方程

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

提示 令 $y=(x^2-1)^m$,可得$(x^2-1)y'=2mxy$,并利用莱布尼茨公式.

证 设 $y=(x^2-1)^m$,就有

$$y'=2mx(x^2-1)^{m-1}\quad 或 \quad (x^2-1)y'=2mxy.$$

对上式两端各取$(m+1)$阶导数,按莱布尼茨公式,即得

$$(x^2-1)y^{(m+2)}+2(m+1)xy^{(m+1)}+m(m+1)y^{(m)}=2mxy^{(m+1)}+2m(m+1)y^{(m)}.$$

于是,$(x^2-1)y^{(m+2)}+2xy^{(m+1)}-m(m+1)y^{(m)}=0$.

两端再以$\frac{1}{2^m m!}$乘之,并以 $P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}y^{(m)}$ 代入,即得所要证明的等式

$$(1-x^2)P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)P_m(x)=0.$$

【1233】 设$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=D$ 表示微分算子,$f(D)=\sum\limits_{k=0}^{n}p_k(x)D^k$ 为微分符号的多项式,其中 $p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$为 x 的某连续函数. 证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼茨公式,有

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=[e^{\lambda x}u(x)]^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i(e^{\lambda x})^{(i)}u^{(k-i)}(x)=e^{\lambda x}\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{k-i}(x).$$

另一方面,有

$$(D+\lambda)^k u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i D^{(k-i)}u(x)=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

因而,得

$$D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

于是,

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=\sum_{k=0}^{n}p_k(x)D^k\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{n}p_k(x)(D+\lambda)^k u(x)=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

即 $f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\}=e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x)$.

§6. 罗尔定理、拉格朗日定理和柯西定理

1° **罗尔定理** 若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在此区间内有有限的导数 $f'(x)$;(3)$f(a)=f(b)$,则在区间(a,b)内至少存在一个数 c,使

$$f'(c)=0.$$

2° **拉格朗日定理** 若函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在区间(a,b)内有有限的导数 $f'(x)$,则

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c),\quad 其中\ a<c<b$$

(有限增量公式).

3° **柯西定理** 若函数 $f(x)$及 $g(x)$:(1)在闭区间$[a,b]$上有定义并且是连续的;(2)在(a,b)内 $f(x)$及 $g(x)$有有限的导数 $f'(x)$及$g'(x)$;(3)当 $a<x<b$,$f'^2(x)+g'^2(x)\neq0$;(4)$g(a)\neq g(b)$,则

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(d)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a<c<b$.

【1237】 设函数 $f(x)$在有限的或无穷的区间(a,b)中的任意一点有有限的导数 $f'(x)$,且

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

证明:$f'(c)=0$,其中 c 为区间(a,b)中的某点.

证明思路 当(a,b)为有限区间时,可令

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ A, & x=a 与 b.\end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

然后对 $F(x)$使用罗尔定理.当(a,b)为无穷区间时,

(1)若 $a=-\infty,b=+\infty$,可令 $x=\tan t\ \left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$,对复合函数 $g(t)=f(\tan t)$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内仿前讨论.

(2)若 a 为有限数,$b=+\infty$,则可取 $b_0>\max(a,0)$,令 $x=\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}$,对 $g(t)=f\left(\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right)$在$(a,b_0)$内仿前讨论.

(3)当 $a=-\infty$,b 为有限数,类似地讨论.

证 当(a,b)为有限区间时,设

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ A, & x=a 与 b\end{cases}$$

其中 $A=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

显然 $F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且有 $F(a)=F(b)$.故由罗尔定理可知,在(a,b)内至少存在一点 c,使 $F'(c)=0$.而在(a,b)内,$F'(x)=f'(x)$,所以,$f'(c)=0$.

下设(a,b)为无穷区间.若 $a=-\infty,b=+\infty$,可设

$$x=\tan t\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right),$$

则对由函数 $f(x)$与 $x=\tan t$ 组成的复合函数 $g(t)=f(\tan t)$在有限区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内仿前讨论可知:至少存在一点 $t_0\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\sec^2t_0=0,$$

其中 $c=\tan t_0$.由于 $\sec^2t_0\neq0$,故 $f'(c)=0$.

若 a 为有限数,$b=+\infty$则可取 $b_0>\max\{a,0\}$,而令

$$x=\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}.$$

于是,对复合函数 $g(t)=f\left(\frac{(b_0-a)t}{b_0-t}\right)$在有限区间$(a,b_0)$上仿前讨论,可知:存在 $t_0\in(a,b_0)$使

$$g'(t_0)=f'(c)\cdot\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}=0,$$

其中 $c=\frac{(b_0-a)t_0}{b_0-t_0}$. 显然 $a<c<+\infty$. 由于$\frac{b_0(b_0-a)}{(b_0-t_0)^2}>0$,故 $f'(c)=0$.

对于 $a=-\infty$,b 为有限数的情形,可类似地进行讨论. 证毕.

【1238】 设函数 $f(x)$:(1)在闭区间$[x_0,x_n]$上有定义且有$(n-1)$阶的连续导数 $f^{(n-1)}(x)$;(2)在区间(x_0,x_n)内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$;(3)下面的等式成立:

$$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(x_0<x_1<\cdots<x_n).$$

证明:在区间(x_0,x_n)内至少存在一点 ξ,使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

提示 累次应用罗尔定理.

证 在每一个闭区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{k-1},x_k],\cdots,[x_{n-1},x_n]$$

上,函数 $f(x)$满足罗尔定理的条件. 因此,存在 n 个点

$$x_1',x_2',\cdots,x_k',\cdots,x_n',$$

其中 $x_k'\in(x_{k-1},x_k)(k=1,2,\cdots,n)$,使

$$f'(x_k')=0\quad(k=1,2,\cdots,n).$$

于是,在每个区间$[x_k',x_{k+1}'](k=1,2,\cdots,n-1)$上,函数$f'(x)$满足罗尔定理的条件. 因此存在点 x_k'' 属于(x_k',x_{k+1}') $(k=1,2,\cdots,n-1)$,使

$$f''(x_k'')=0\quad(k=1,2,\cdots,n-1).$$

继续上述步骤,经$(n-1)$次后,得出一个区间$[x_1^{n-1},x_2^{n-1}]\subset(x_0,x_n)$,满足 $f^{(n-1)}(x_k^{n-1})=0(k=1,2)$. 于是在此区间上,函数 $f^{n-1}(x)$满足罗尔定理的条件. 所以,至少存在一点$\xi\in(x_1^{n-1},x_2^{n-1})$,使 $f^{(n)}(\xi)=0$.

【1247】 证明:若 $x\geqslant 0$,则

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)\leqslant\frac{1}{2}$,并且$\lim\limits_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

证 当 $x\geqslant 0$ 时,对函数$\sqrt{x}$施用有限增量公式,即得

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之,得

$$\theta(x)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)}-x].$$

当 $x=0$ 时,$\theta=\frac{1}{4}$. 当 $x>0$ 时,有

$$0\leqslant\sqrt{x(x+1)}-x=\frac{x}{\sqrt{x(x+1)}+x}<\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

于是,

$$\frac{1}{4}\leqslant\theta(x)<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x\to+0}\theta(x)=\frac{1}{4},\quad\lim_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\frac{1}{4}+\frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)}+x]}\right\}=\frac{1}{2}.$$

【1250】 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有连续的导数$f'(x)$. 对于区间(a,b)内任何一点 ξ,可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2,使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\quad(x_1<\xi<x_2)?$$

提示 研究函数 $f(x)=x^3(-1<x<1)$，它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 及 x_2.

解 一般地说，不可以. 例如，研究函数

$$f(x)=x^3\quad(-1<x<1),$$

它对于 $\xi=0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2，使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

事实上，$f'(\xi)=3\xi^2=0$，而当 $x_1<0<x_2$ 时，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1x_2+x_1^2=x_2^2+x_1^2-|x_1||x_2|>x_2^2+x_1^2-2|x_1||x_2|$$
$$=(|x_1|-|x_2|)^2>0.$$

【1251】 证明下列不等式：

(3) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$； (4) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$，设 $0<b<a$.

证 (3) $|\arctan a-\arctan b|=\left|\frac{a-b}{1+\xi^2}\right|\leqslant|a-b|$.

(4) $\ln a-\ln b=\frac{a-b}{\xi}$，其中 $0<b<\xi<a$. 于是，$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$.

【1252】 说明在闭区间$[-1,1]$上柯西定理对于函数 $f(x)=x^2$ 及 $g(x)=x^3$ 何以不真？

提示 注意当 $x=0$ 时，$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=0$.

解 $f(x)$及 $g(x)$在$[-1,1]$上虽有连续的导数，且$g(-1)\neq g(1)$，但是，当 $x=0$ 时，

$$[f'(x)]^2+[g'(x)]^2=4x^2+9x^4=0,$$

因此，对于函数 $f(x)$及 $g(x)$不满足柯西定理的条件，所以结论可以不真. 事实上，

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{3\xi^2}\neq 0,\quad \xi\in(-1,1),\quad \xi\neq 0,$$

它们是不相等的.

【1253】 设函数 $f(x)$在闭区间$[x_1,x_2]$上可微，并且 $x_1x_2>0$，证明：

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

其中 $x_1<\xi<x_2$.

证明思路 令 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，注意由于 $x_1x_2>0$，故 $x=0$ 在$[x_1,x_2]$之外. 对于$F(x)$和 $g(x)$应用柯西定理.

证 设 $g(x)=\frac{1}{x}$，$F(x)=\frac{f(x)}{x}$，由于 $x_1x_2>0$，故 $x=0$ 在$[x_1,x_2]$之外. 从而，$g(x)$和 $F(x)$均在$[x_1,x_2]$上可微，且有

$$[g'(x)]^2+[F'(x)]^2=\frac{1}{x^4}\{1+[xf'(x)-f(x)]^2\}\neq 0\quad 及\quad g(x_1)\neq g(x_2).$$

因此，对于函数 $F(x)$和 $g(x)$满足柯西定理的条件，故在(x_1,x_2)内至少存在一点 ξ，使有

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},\quad 即\quad \frac{\frac{f(x_2)}{x_2}-\frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理,即得

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

【1254】 证明:若函数 $f(x)$ 在有限的区间 (a,b) 内可微,但无界,则其导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 内也无界.逆定理不真(举出例子).

提示 用反证法及拉格朗日定理.其逆不真,例如,$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(0<x<\frac{1}{2})$.

证 在开区间 (a,b) 内,由于导数存在,因此,$f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

现在假定 $|f'(x)|<N$ $(a<x<b)$,即 $f'(x)$ 是有界的.取定 $c\in(a,b)$,则按有限增量公式可知,对任何 $a<x<b$,均有

$$|f(x)-f(c)|=|x-c|\,|f'(\xi)|<N(b-a).$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间,从而属于 (a,b).

因为 $|f(x)-f(c)|\geqslant|f(x)|-|f(c)|$,所以,$|f(x)|<|f(c)|+N(b-a)$.此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾,所以 $f'(x)$ 是无界的.

反之不一定正确.例如,函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内有界,但其导数却是无界的.

注意 在无限区间内无界的函数的导数可能有界.例如,函数 $f(x)=\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 内无界,但其导数 $f'(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内却是有界的.

【1255】 证明:若函数 $f(x)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 内有有界的导数 $f'(x)$,则 $f(x)$ 在 (a,b) 中一致连续.

提示 利用拉格朗日定理.

证 设当 $x\in(a,b)$ 时,$|f'(x)|\leqslant M$.对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$,则当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|\,|f'(\xi)|\leqslant M|x_1-x_2|<\varepsilon,\quad(\xi\text{ 在 }x_1\text{ 与 }x_2\text{ 之间}),$$

于是,$f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

【1265】 证明:若函数 $f(x)$ (1)在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的;(2)在此区间内有有限的导数 $f'(x)$;(3)不是线性函数,则在区间 (a,b) 内至少能找到一点 c,使得

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

给出这个事实的几何解释.

证 当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时,设 $\quad F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$

易知 $F(a)=F(b)=0$,且当 $a<x<b$ 时,$F(x)\neq0$ (因为 $f(x)$ 为非线性函数).设在 c_1 $(a<c_1<b)$ 点,$F(c_1)\neq0$,不妨设 $F(c_1)>0$,在区间 $[a,c_1]$ 与 $[c_1,b]$ 上分别应用拉格朗日定理,可知存在 $\xi_1\in(a,c_1)$ 使

$$F'(\xi_1)=\frac{F(c_1)-F(a)}{c_1-a}=\frac{F(c_1)}{c_1-a}>0;$$

存在 $\xi_2\in(c_1,b)$,使

$$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c_1)}{b-c_1}=-\frac{F(c_1)}{b-c_1}<0.$$

因而,

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad(1)$$

$$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad(2)$$

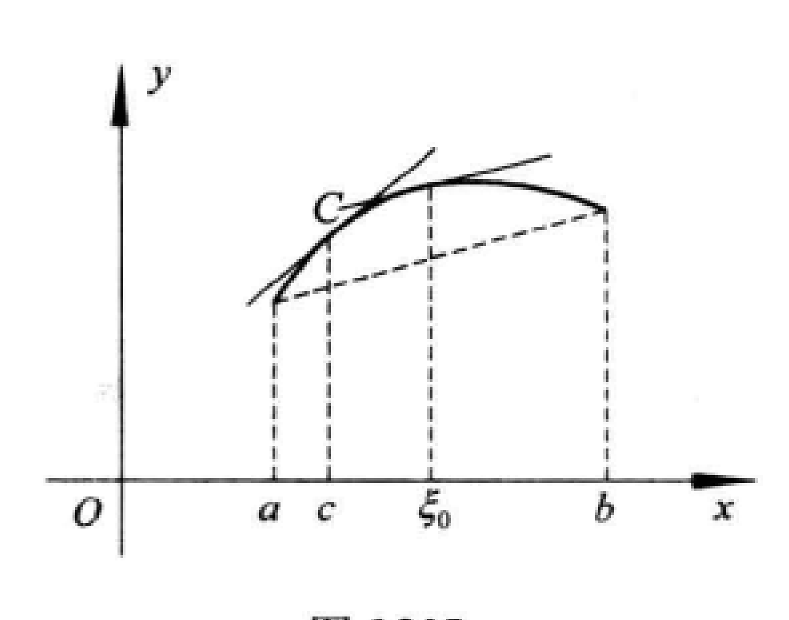


图 1265

由此可知：

当$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\geqslant 0$时，由(1)，$|f'(\xi_1)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$；

当$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<0$时，由(2)，$|f'(\xi_2)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

于是，命题得证.

这个事实的几何意义是：对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线)，在曲线上至少存在一点 C，使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点$(a,f(a))$和$(b,f(b))$的弦的斜率的绝对值，换句话说，此切线比此弦"陡"，如图 1265 所示.

【1266】 证明：若函数 $f(x)$：(1)在区间$[a,b]$上有二阶导数 $f''(x)$； (2)$f'(a)=f'(b)=0$，则在区间(a,b)内至少存在一点 c，使得$|f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证 设 x_0 是$[a,b]$中任意固定的一点，两次应用柯西定理*，即得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi),\tag{1}$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0\leqslant\xi\leqslant x$)，$x$ 为$[a,b]$中任意点. 特别，在(1)式中取 $x_0=a$，$x=\frac{a+b}{2}$，并利用已知条件 $f'(a)=0$，则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a<c_1<\frac{a+b}{2}$.

同理，在(1)式中取 $x_0=b$，$x=\frac{a+b}{2}$，并利用已知条件$f'(b)=0$，则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{(b-a)^2}{8}f''(c_2),$$

其中 c_2 满足$\frac{a+b}{2}<c_2<b$. 于是，

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\left|f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right|=\frac{(b-a)^2}{8}\{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|\}.\tag{2}$$

取 c 如下：若$|f''(c_1)|\geqslant|f''(c_2)|$，则令 $c=c_1$；若$|f''(c_1)|<|f''(c_2)|$，则令 $c=c_2$. 于是，$a<c<b$ 且$|f''(c)|=\max\left\{|f''(c_1)|,|f''(c_2)|\right\}$. 由此，根据(2)，即得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}|f''(c)|.\quad 从而，\quad |f''(c)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

---

* 仅考虑 $x>x_0$($x<x_0$ 时可类似地讨论). 令

$$F(x)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]\qquad G(x)=(x-x_0)^2,$$

那么有 $F(x_0)=G(x_0)=0$，$F'(x)=f'(x)-f'(x_0)$ (记为 $F_1(x)$)，$G'(x)=2(x-x_0)$ (记为 $G_1(x)$)，并且 $F'(x_0)=G'(x_0)=0$，(即 $F_1(x_0)=G_1(x_0)=0$)，但当 $x\neq x_0$，$G'(x)\neq 0$. 而

$$F_1'(x)=F''(x)=f''(x),\quad G_1'(x)=G''(x)=2.$$

应用柯西定理，得 $$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{F_1(c)-F_1(x_0)}{G_1(c)-G_1(x_0)}=\frac{F_1'(\xi)}{G_1'(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{2},$$

此处 $\xi\in(x_0,c)$，而 $c\in(x_0,x)$，从而知 $\xi\in(x_0,x)$. 因此，有 $F(x)=\frac{1}{2}G(x)f''(\xi)$也即有公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi).$$

其中 $x_0<\xi<x$ (以后即将看到，这就是所谓的泰勒公式，这里就顺便给出了一个关于二阶的泰勒公式的另一种推论方法).

§7. 增函数与减函数. 不等式

1° **增函数与减函数** 若

$$当\ a\leqslant x_1<x_2\leqslant b\ 时，\quad f(x_2)>f(x_1)$$

[或当 $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$ 时，$f(x_2)<f(x_1)$]，则称函数 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的**增函数**(或**减函数**).

若可微函数 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的增函数(或减函数)，则

$$当\ a\leqslant x\leqslant b\ 时，\quad f'(x)\geqslant 0$$

[或当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，$f'(x)\leqslant 0$].

2° **函数递增(或递减)的充分条件** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的；并且在其内有正的(或负的)导数 $f'(x)$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内递增(或递减).

求下列函数的严格单调(增或减)区间：

【1273】 $y=x+|\sin 2x|$.

解 $y'=1+2\dfrac{|\sin 2x|}{\sin 2x}\cos 2x\quad\left(x\neq\dfrac{k\pi}{2};\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$.

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$时，$y'>0$，函数递增；

当 $x\in\left(\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$y'<0$，函数递减，其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

【1278】 $f(x)=\begin{cases}x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sin\ln x\right), & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 $f'(x)=\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sin\ln x+\cos\ln x=\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln x\right)\ (x>0)$.

令 $f'(x)=0$，得 $\sin\left(\ln x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 解上述方程得

$$x=e^{-\frac{11}{12}\pi+2k\pi},\ x=e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi}\quad 或\quad x=e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ x=e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

当 $x\in(e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi})$时，$f'(x)>0$，函数递增；当 $x\in(e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi})$时，$f'(x)<0$，函数递减.

【1280】 证明：函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 及 $(0,+\infty)$ 内递增.

证 设 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$，则 $y'=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

由于当 $x\in(-\infty,-1)$时，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x>0$，因此要看 y' 为正或为负，只需看 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z=\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}$，则 $z'=-\dfrac{1}{x(1+x)^2}>0,\quad x\in(-\infty,-1)$，

故当 $-\infty<x<-1$ 时 z 递增，又 $\lim\limits_{x\to-\infty}z=0$，因而 $z>0$. 于是，在 $(-\infty,-1)$ 内 $y'>0$，因此，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 内递增.

同理可证，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内递增.

【1284】 证明：若 $\varphi(x)$ 为可微的单调增函数，且当 $x\geqslant x_0$ 时，$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$，则当 $x\geqslant x_0$ 时，

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0).$$

给出这个事实的几何解释.

证明思路 分别令

$$\psi(x)=\varphi(x)-f(x),\quad \psi_1(x)=\varphi(x)+f(x).$$

对 $\psi(x)$ 及 $\psi_1(x)$ 在 $[x_0,x]$ 上应用拉格朗日定理.

证 令 $\psi(x)=\varphi(x)-f(x)$，由拉格朗日定理知

$$\psi(x)-\psi(x_0)=\psi'(\xi)(x-x_0)\quad (x_0<\xi<x).$$

由 $|f'(x)|\leqslant\varphi'(x)$ 知 $\psi'(\xi)=\varphi'(\xi)-f'(\xi)\geqslant 0$. 从而，$\psi(x)-\psi(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x)-f(x_0). \tag{1}$$

再令 $\psi_1(x)=\varphi(x)+f(x)$，同理有 $\psi_1(x)-\psi_1(x_0)\geqslant 0$（当 $x\geqslant x_0$ 时），由此得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant f(x_0)-f(x). \tag{2}$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)\geqslant |f(x)-f(x_0)|.$$

其几何意义就是：若一单调上升曲线上各点的切线都比另一曲线上对应的点的切线"陡"，则此曲线上每条弦必比另一曲线上对应的弦"陡". 如图 1284 所示.

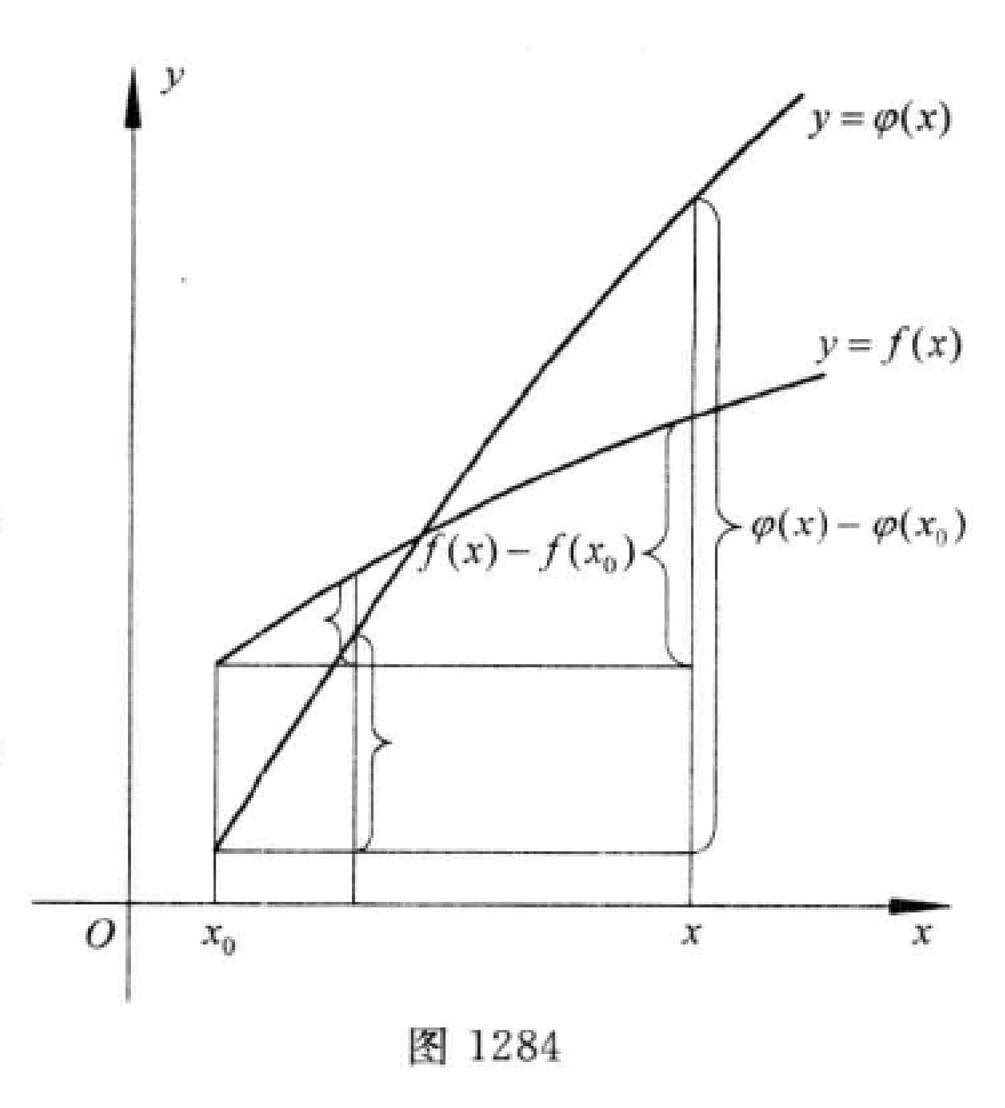


图 1284

【1285】 设函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 内连续，而且当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$，其中 k 为常数. 证明：若 $f(a)<0$，则在区间 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根.

证明思路 先利用拉格朗日定理证明 $f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)>0$，再根据连续函数的介值定理及函数的单调性，命题易获证.

证 由有限增量公式，有

$$f\left(a-\frac{f(a)}{k}\right)-f(a)=-\frac{f(a)}{k}f'(\xi)>-\frac{f(a)}{k}\cdot k=-f(a).$$

于是，$f\left(a-\dfrac{f(a)}{k}\right)>0$. 又 $f(a)<0$，故根据连续函数的介值定理知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根. 又因为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内递增，由此可知，方程 $f(x)=0$ 在 $\left(a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right)$ 内有且仅有一个实根.

【1286】 若于某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内，函数增量 $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$ 的符号与自变量增量 $\Delta x_0=x-x_0$ 的符号相同，称函数 $f(x)$ 为在 x_0 点的增函数.

证明：若函数 $f(x)(a<x<b)$ 在有限或无穷的区间 (a,b) 内的每一点皆为增函数，则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1<x_2(a<x_1<x_2<b)$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$. 对 $[x_1,x_2]$ 中每一点 c，由假定都存在开区间 $\Delta_c=(c-\delta_c,c+\delta_c)$ 使当 $0<|x-c|<\delta_c$ 时，$\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}>0$. 于是，诸区间 $\{\Delta_c\}$（c 取遍 $[x_1,x_2]$）形成 $[x_1,x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理，从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个，设为 $\Delta_{c_1},\Delta_{c_2}\cdots\Delta_{c_m}$，它们已经复盖了 $[x_1,x_2]$. 不妨设 $x_1<c_1<c_2<\cdots<c_m<x_2$，而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含（因若 $\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$，则可将 Δ_{c_i} 舍去）. 于是，必有 $x_1\in\Delta_{c_1}$（因若 x_1 不属于 Δ_{c_i}，而属于某 Δ_{c_j}，$j>1$，则显然有 $\Delta_{c_1}\subset\Delta_{c_j}$，此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾）. 另外，易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ 必有公共点 $\bar{x}_i$（因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点，则点 $c_i+\delta_{c_i}$ 必属于某 Δ_{c_j}，$j\neq i$，$j\neq i+1$，若 $j<i$，则 $\Delta_{c_i}\subset\Delta_{c_j}$，矛盾；若 $j>i+1$，则 $\Delta_{c_{i+1}}\subset\Delta_{c_j}$，也矛盾）. 显然可取公共点 $\bar{x}_i$ 满足 $c_i<\bar{x}_i<c_{i+1}$.

于是，$f(c_i)<f(\bar{x}_i)<f(c_{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$. 同理，可知 $x_2\in\Delta_{c_m}$. 于是，我们有 $f(x_1)<f(c_1)<f(c_2)<\cdots<f(c_m)<f(x_2)$. 证毕.

【1287】 证明：函数

$$f(x)=\begin{cases} x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 是增函数，但在包含这点的任何区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中并非增函数，其中 $\varepsilon>0$ 为任意小的数. 作出此函数的略图.

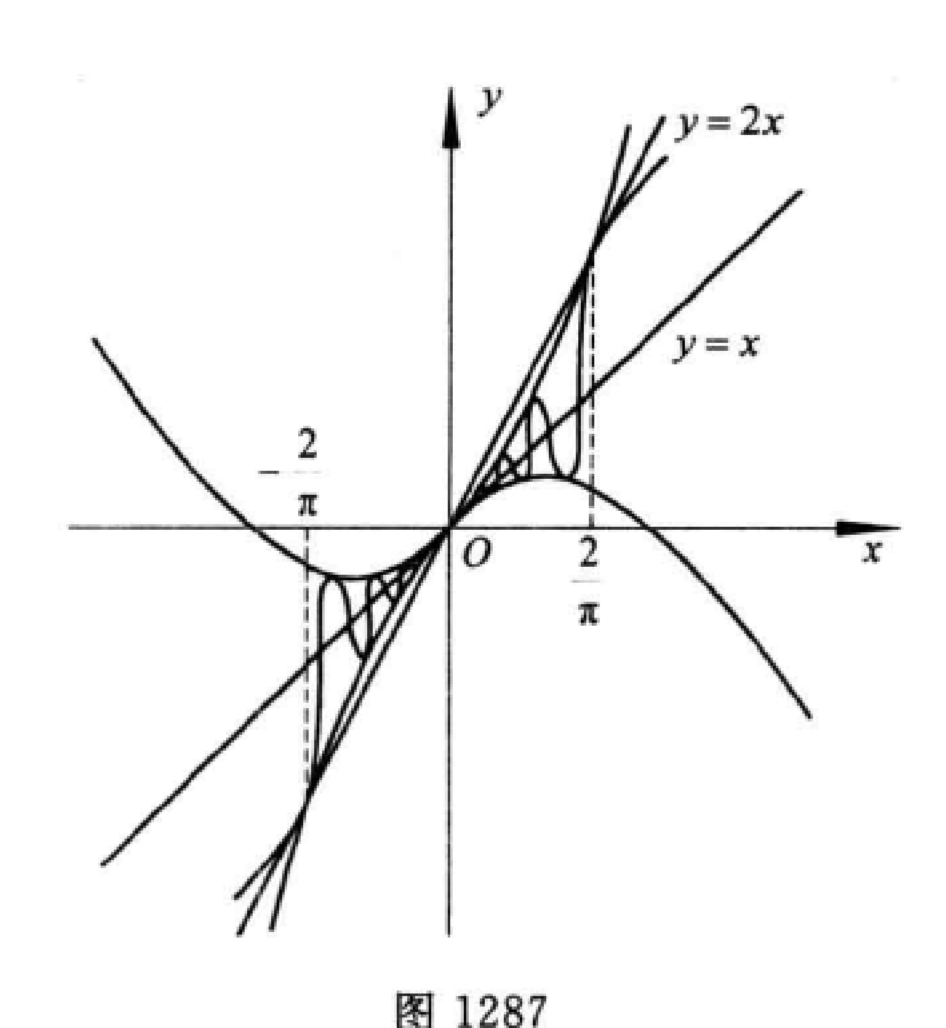


图 1287

证 当 $x\neq 0$ 时，

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$=1>0,$$

所以，$f(x)$ 在点 $x=0$ 是增函数. 又当 $x\neq 0$ 时，

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-4n\pi\begin{cases}<0, & n\text{ 为正整数},\\ >0, & n\text{ 为负整数}.\end{cases}$$

而 $f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=0$. 故 $f(x)$ 在点 $x_n=\frac{1}{2n\pi}(n=1,2,\cdots)$ 都达极大值. 由于 $x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是增函数(作无穷次振荡，如图 1287 所示).

【1288】 证明定理：设(1)函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 n 阶可微函数；(2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$；(3)当 $x>x_0$ 时，$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，则当 $x>x_0$ 时有不等式 $\varphi(x)>\psi(x)$.

证明思路 令 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由条件(3)可知 $F^{(n)}(x)>0$ $(x>x_0)$，从而，$F^{(n-1)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得 $F^{(n-1)}(x_0)=0$. 因此，当 $x>x_0$ 时，$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0$. 由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 反复应用条件(2)，命题可获证.

证 设 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$，则由于 $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$，所以，$F^{(n)}(x)=\varphi^{(n)}(x)-\psi^{(n)}(x)>0$ $(x>x_0)$. 因此，$F^{(n-1)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 又由条件(2)得 $F^{(n-1)}(x_0)=\varphi^{(n-1)}(x_0)-\psi^{(n-1)}(x_0)=0$，因此，

$$F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0 \quad (x>x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 当 $x>x_0$ 时是递增的. 再由条件(2)知

$$F^{n-2}(x_0)=\varphi^{(n-2)}(x_0)-\psi^{(n-2)}(x_0)=0, \quad \text{故} \quad F^{(n-2)}(x)>F^{(n-2)}(x_0)=0 \quad (x>x_0).$$

依此类推，最后得

$$F(x)>F(x_0)=0\ (x>x_0), \quad \text{即} \quad \varphi(x)>\psi(x)\ (x>x_0).$$

【1289】 证明下列不等式：

(2) 当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$；　　(4) 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{x^3}{3}$.

给出不等式(2)及(4)的几何解释.

证 (2) 设 $\varphi(x)=x$，$\psi(x)=\ln(1+x)$，则 $\varphi'(x)=1$，$\psi'(x)=\frac{1}{1+x}$.

当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)>\psi'(x)$，即 $\varphi'(x)-\psi'(x)>0$，且有 $\varphi(0)=\psi(0)=0$，从而，

$$\varphi(x)-\psi(x)>\varphi(0)-\psi(0)=0 \quad (x>0),$$

即

$$x-\ln(1+x)>0 \quad (x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$.

所以，当 $x>0$ 时，$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

此不等式表示对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的图像介于抛物线 $y=x-\frac{x^2}{2}$ 和直线 $y=x$ 之间($x>0$). 如图 1289－1 所示.

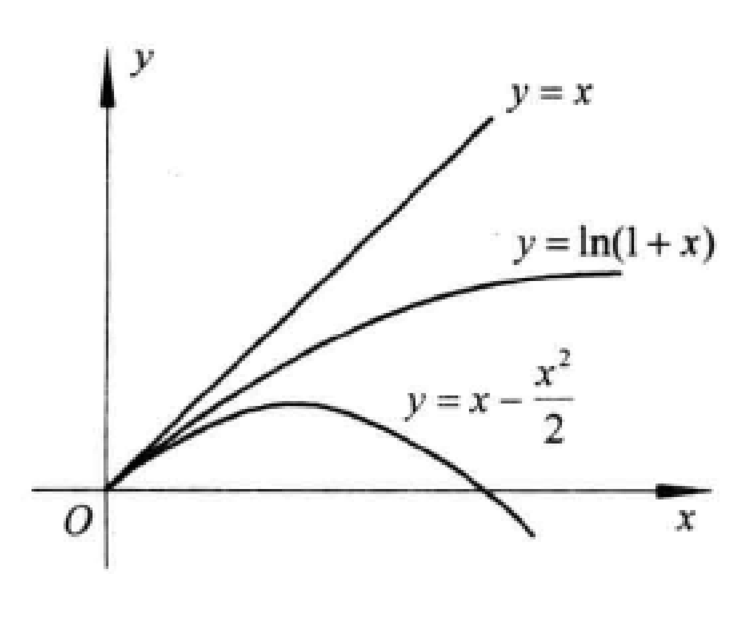


图 1289－1

(4) 令 $f(x)=\tan x-(x+\frac{x^3}{3})$，则 $f(0)=0$. 又

$$f'(x)=\frac{1-\cos^2 x-x^2\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(\sin x+x\cos x)(\sin x-x\cos x)}{\cos^2 x}$$

显然有 $$\sin x-x\cos x>0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

故 $$f'(x)>0,\ x\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

从而，$f(x)>0$，即 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}$.

此不等式表示，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内，曲线 $y=\tan x$ 在曲线 $y=x+\frac{x^3}{3}$ 的上方. 如图 1289－2 所示.

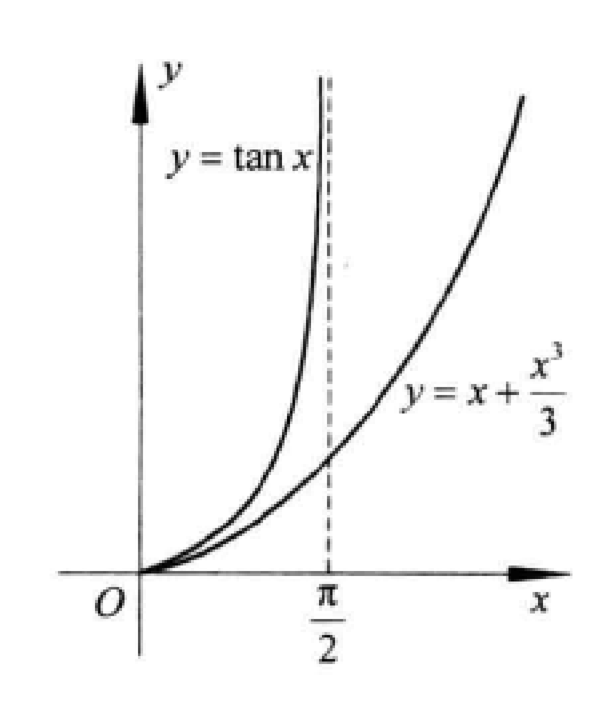


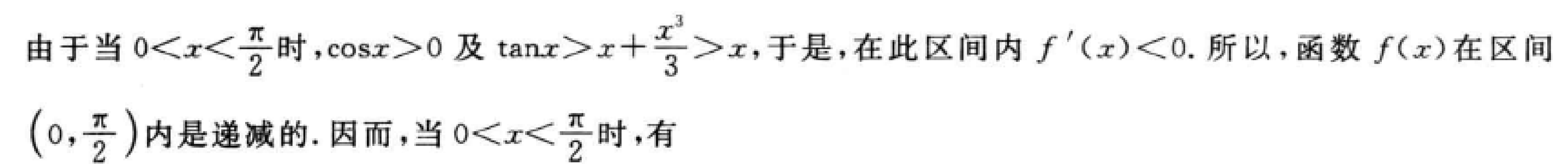
图 1289－2

【1290】 证明：不等式 $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时成立.

证 不等式的后半部分易证(略)，我们仅证其前半部分.

设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，显然有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$. 而

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x),$$


由于当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos x>0$ 及 $\tan x>x+\frac{x^3}{3}>x$，于是，在此区间内 $f'(x)<0$. 所以，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内是递减的. 因而，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，有

$$f(x)>f\left(\frac{\pi}{2}\right),\quad 即\quad \frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}\quad (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

所以，$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$.

【1291】 证明：当 $x>0$ 时有不等式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

证 由于当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 递增(利用 1280 题的结果)，并且有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，所以，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e\quad(x>0).$$

同理可证，当 $x>0$ 时，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 递减，并且有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}=e,$$

所以，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}>e\quad(x>0)$.

【1293】 用不等式 $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k x+b_k)^2\geqslant 0$，其中 $x,a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 为实数，来证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

提示 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)x^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 均成立,由其判别式不能为正,命题即可获证.

证 由于

$$\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)x^2+2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)x+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0,$$

对任何 x 都成立,故上述二次式的判别式不能为正,即

$$4\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2-4\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)\leqslant 0,$$

也即

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

【1294】 证明:正数的算术平均值的平方不大于这些数的平方平均值,即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2}.$$

提示 利用 1293 题的结果,并令 $a_k=x_k$, $b_k=\dfrac{1}{n}$.

证 利用 1293 题的结果,设 $a_k=x_k$, $b_k=\dfrac{1}{n}$,则有

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

所以,$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2}$.

【1297】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 为二阶可微函数及 $M_k=\sup\limits_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty\ (k=0,1,2)$. 证明不等式:$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证 运用 1266 题附注的公式(对任何 h)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi_1)}{2}h^2\quad(x\leqq\xi_1\leqq x+h),\tag{1}$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(\xi_2)}{2}h^2\quad(x-h\leqq\xi_2\leqq x),\tag{2}$$

(1)减(2),得

$$f(x+h)-f(x-h)=2f'(x)h+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)],$$

即

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

所以,

$$2h|f'(x)|\leqslant|2hf'(x)|\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$

$$\leqslant 2M_0+h^2M_2,$$

即 $M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geqslant 0$.

由于此式对任何 h 都成立,故此二次式的判别式必非正:

$$4|f'(x)|^2-4M_2(2M_0)\leqslant 0,$$

即 $|f'(x)|^2\leqslant 2M_0M_2$.

由此可得 $M_1^2\leqslant 2M_0M_2$. 证毕.

§8. 凹凸性．拐点

1° **凹凸性的充分条件** 若曲线 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 的一段，位于其任意一点的切线之上（或之下），则称这个可微函数 $y=f(x)$ 的图像在闭区间 $[a,b]$ 上是凹（或对应地，凸）的．在假设二阶导数 $f''(x)$ 存在的情况下，当 $a<x<b$ 时不等式

$$f''(x)>0 \quad [\text{或对应地 } f''(x)<0]$$

成立，为图像是凹（或对应地，凸）的充分条件．

2° **拐点的充分条件** 若函数的图像在某点的凹凸性改变，则称此点为**拐点**．

若在点 x_0 有 $f''(x_0)=0$，或者 $f''(x_0)$ 虽不存在但 $f'(x_0)$ 有意义，并且无论在哪种情形下，$f''(x)$ 在 x 经过 x_0 时改变符号，则 x_0 是拐点．

求下列函数的图像的凹或凸的区间及拐点：

【1303】 $y=x+\sin x$.

解 $y'=1+\cos x$, $y''=-\sin x$.

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；当 $(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；$x=k\pi$ 是拐点（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）．

【1306】 $y=x\sin(\ln x)\quad(x>0)$.

解 $y'=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$, $y''=\dfrac{\sqrt{2}}{x}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\ln x\right)$.

令 $y''=0$，得 $x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

当 $e^{2k\pi-\frac{3\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 时，$y''>0$，故图像是凹的；当 $e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<x<e^{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}$ 时，$y''<0$，故图像是凸的；$x=e^{k\pi+\frac{\pi}{4}}$ 是拐点（$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）．

【1308】 证明：曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于同一直线上的三个拐点．作出这个函数的图像．

证 $y'=\dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$, $y''=\dfrac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$.

令 $y''=0$ 得 $x_1=-2-\sqrt{3}$，$x_2=-2+\sqrt{3}$，$x_3=1$，

对应的函数值为 $y_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$，$y_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$，$y_3=1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \\ 1 & \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} & \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \end{vmatrix}=0$$

所以，拐点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 及 $C(x_3,y_3)$ 在一条直线上（图 1308）．

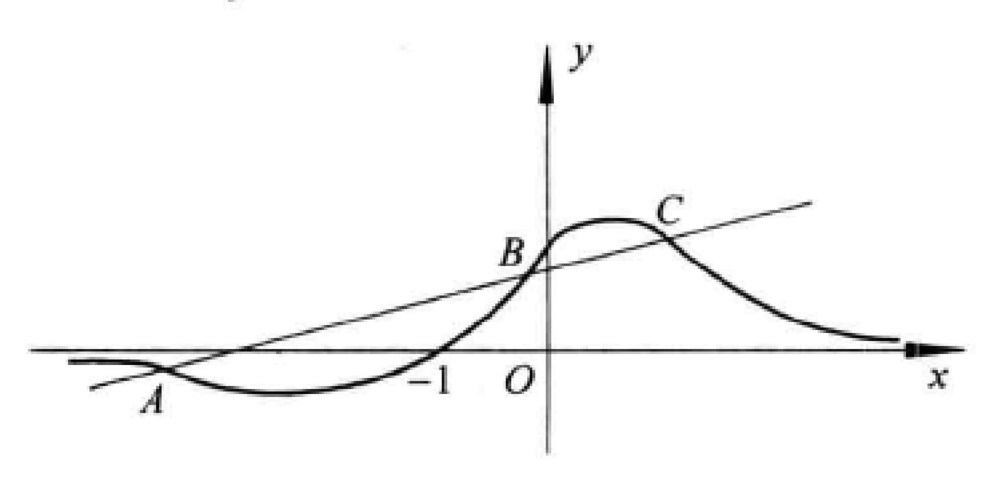


图 1308

【1309】 如何选择参量 h,可使"概率曲线"$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$ $(h>0)$有拐点 $x=\pm\sigma$?

解 $y'=\frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $y''=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(4h^4x^2-2h^2)$.

令 $y''=0$,得 $x^2=\frac{1}{2h^2}$. 由于拐点为 $x=\pm\sigma$,故有 $h^2=\frac{1}{2\sigma^2}$,即 $h=\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$ $(\sigma>0)$.

【1311】 设函数 $f(x)$于区间 $a\leqslant x<+\infty$中二阶可微,并且:

(1) $f(a)=A>0$; (2) $f'(a)<0$; (3) 当 $x>a$, $f''(x)\leqslant 0$.

证明:在区间$(a,+\infty)$内方程 $f(x)=0$ 有而且仅有一个实根.

证 由于 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上连续且当 $a<x<+\infty$时 $f''(x)\leqslant 0$,故函数 $f'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的,于是,当 $a\leqslant x<+\infty$时,$f'(x)\leqslant f'(a)<0$;由此又知函数 $f(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的. 因此,在$(a,+\infty)$上至多有一点使 $f(x)=0$,即在$(a,+\infty)$上方程 $f(x)=0$ 至多有一(实)根.

下面再证明必有点 $a<x_0<+\infty$存在,使 $f(x_0)=0$. 考虑函数 $F(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$ $(a\leqslant x<+\infty)$,则

$$F'(x)=f'(x)-f'(a),\quad F''(x)=f''(x)\quad (a\leqslant x<+\infty).$$

于是,当 $a<x<+\infty$时 $F''(x)\leqslant 0$,从而 $F'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的,但 $F'(a)=0$,故当 $a\leqslant x<+\infty$时,$F'(x)\leqslant F'(a)=0$;由此又知 $F(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上是递减的,但$F(a)=0$,因此,当 $a\leqslant x<+\infty$时,恒有 $F(x)\leqslant F(a)=0$.

令 $x^*=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a)>0$, $f'(a)<0$,故 $x^*>a$. 显然,

$$F(x^*)=f(x^*)-f(a)-f'(a)\left[-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]=f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*)\leqslant 0$,故 $f(x^*)\leqslant 0$. 于是,根据连续函数的中间值定理,知必有 $a<x_0\leqslant x^*$存在,使$f(x_0)=0$. 证毕.

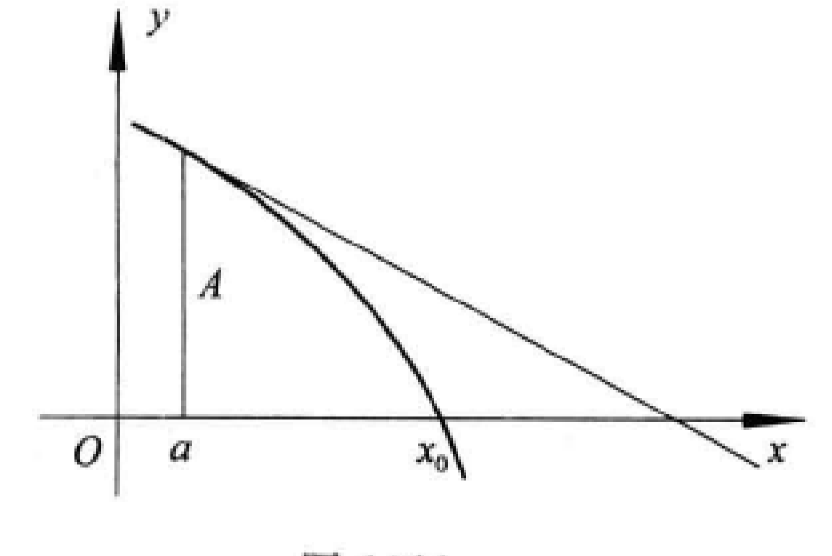


图 1311

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$代表曲线 $y=f(x)$(它是凸的)上的纵坐标与在点$(a,f(a))$处的切线

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

上的纵坐标之差,点 $x^*=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$即是此切线与 Ox 轴的交点(图 1311).

【1313】 证明:函数 $x^n(n>1)$, e^x, $x\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上是凹的;而函数 $x^n(0<n<1)$, $\ln x$ 在区间$(0,+\infty)$上是凸的.

证 (1) 设 $y=x^n(n>1)$,则 $y''=n(n-1)x^{n-2}$,它在$(0,+\infty)$上是大于零的,因此,图像是凹的.

但当 $0<n<1$ 时,则 $y''<0$,故此时图像是凸的.

(2) 对于函数 e^x,其二阶导数为 e^x,它始终为正,因此,图像是凹的.

(3) 对于函数 $x\ln x$,其二阶导数为$\frac{1}{x}$,它在$(0,+\infty)$内大于零,因此,图像是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$,其二阶导数为$-\frac{1}{x^2}$,它始终为负,因此,在$(0,+\infty)$内图像是凸的.

【1314】 证明下列不等式,并解释其几何意义:

(1)$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, $(x>0,y>0,x\neq y,n>1)$;

(3)$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$ $(x>0,y>0)$.

证明思路 我们已知:若函数 $f(x)$图像在区间(a,b)内是凹的,则对于(a,b)中的任意两点 x 和 y,满足

不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

分别令 $f(x)=x^n$, $(x>0, n>1)$, $f(x)=e^x$ $(-\infty<x<+\infty)$ 及 $f(x)=x\ln x$ $(x>0)$，对它们利用 1313 题的结果，不等式即获证.

证 我们已知，若函数 $f(x)$ 的图像在区间 (a,b) 内是凹的，则对于 (a,b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]>f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

于是，利用 1313 题的结果，我们有：

(1) 设 $f(x)=x^n$, $(x>0, n>1)$，则其图像是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(3) 设 $f(x)=x\ln x$，则对于 $x>0$ 图像是凹的. 于是，对于任意两点 x 和 y，得

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是：连接点 $(x,f(x))$ 及 $(y,f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点（具有相同横坐标）的上方.

【1315】 证明：有界的凸函数处处连续，并有左导数及右导数.

证 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凸的，并设 x_0 为 (a,b) 内的任一点，今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且有左导数及右导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x-x_0|<\delta$，使得这邻域全部都包含在 (a,b) 内，并记

$$M=\min\{f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)\}.$$

设 $0<|x-x_0|<\delta$. 记 $t=\dfrac{|x-x_0|}{\delta}$，则 $0<t<1$.

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $x=t(x_0+\delta)+(1-t)x_0$ 及 $x_0=\dfrac{1}{1+t}x+\dfrac{t}{1+t}(x_0-\delta)$. 由于 $f(x)$ 为凸函数，故有

$$f(x)>tf(x_0+\delta)+(1-t)f(x_0)\geqslant tM+(1-t)f(x_0) \tag{1}$$

及

$$f(x_0)>\frac{1}{1+t}f(x)+\frac{t}{1+t}f(x_0-\delta)\geqslant\frac{f(x)+tM}{1+t}. \tag{2}$$

由(1)，得
$$f(x)-f(x_0)>-t[f(x_0)-M];$$
由(2)，得
$$t[f(x_0)-M]>f(x)-f(x_0).$$
从而，$f(x_0)-M>0$，且

$$|f(x)-f(x_0)|<t[f(x_0)-M]=\frac{[f(x_0)-M]}{\delta}\cdot|x-x_0|. \tag{3}$$

当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，类似地也可导出(3)式，故当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，(3)式恒成立. 由此显然有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x=x_0+h$，则(3)式可改写为

$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}\quad(0<|h|<\delta). \tag{4}$$

引进函数

$$\varphi(h)=f(x_0+h)-f(x_0)\quad(-\delta<h<\delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数，且有 $\varphi(0)=0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2，设有 $0<t_1<t_2<\delta$，并改写为

$$t_1=\frac{t_1}{t_2}\cdot t_2+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质，有

$$\varphi(t_1)>\frac{t_1}{t_2}\cdot\varphi(t_2)+\left(1-\frac{t_1}{t_2}\right)\varphi(0)=\frac{t_1}{t_2}\varphi(t_2),$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1}>\frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t)=\frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个减函数. 如从 $h\to+0$ 方向看，则函数 $F(h)$ 递增. 但由(4)可知 $|F(h)|<\frac{|f(x_0)-M|}{\delta}$，即 $F(h)$ 在 $0<|h|<\delta$ 有界，故极限 $\lim\limits_{h\to+0}F(h)$ 存在，也即 x_0 的右导数

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在. 同理，可证左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中，对于区间是否有限无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界，证明中也未用到有界这个条件，参看 E. C. Tichmarsh, The Theory of Functions, § 5.31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\ (x_1\neq x_2)$ 作为凸函数的定义，则需加上凸函数有界这个条件，才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegø, Problems and Theorems in Analysis, Vol. Ⅰ ,70 题和 124 题.

【1317】 证明：若函数 $f(x)$ 在无穷的区间 $(x_0,+\infty)$ 内二阶可微，且

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

则在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，满足

$$f''(\xi)=0.$$

证 用反证法，即若不存在 ξ，使 $f''(\xi)=0$，则当 $x>x_0$ 时，或者 $f''(x)>0$，或者 $f''(x)<0$. 如果不是这样，即若存在点 a 与 b，使得 $f''(a)<0$ 及 $f''(b)>0$，则由达布定理*) 可知，在 a 与 b 之间必有 c 存在，使得 $f''(c)=0$，这与我们的反证假设矛盾. 因此，我们不妨设 $f''(x)>0$，从而，函数 $f(x)$ 的图像是凹的，且位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x\to x_0+0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

与 $f(x)$ 的可微性，利用 1237 题的结果，即知：在 $(x_0,+\infty)$ 中至少存在一点 c_1，使

$$f'(c_1)=0.$$

由 $f''(x)>0$ 易知 $f'(x)$ 递增，从而，当 $x>c_1$ 时，$f'(x)>0$. 取 $c_2>c_1$，则 $f'(c_2)>0$.

过点 $(c_2,f(c_2))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，其方程为

$$Y(x)=f(c_2)+f'(c_2)(x-c_2).$$

易知

$$\lim_{x\to+\infty}Y(x)=+\infty,$$

而 $f(x)-Y(x)>0$，从而应有

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$

这与原设条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 矛盾. 同样，对于 $f''(x)<0$ 的情况也可推出以上结论.

于是，在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

*) 达布定理指：若函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内有有限的导数，且 $g'(a)g'(b)<0$，则在 (a,b) 内至少有一点 c，使

$$g'(c)=0.$$

其证法是：不妨设 $g'(a)<0$，$g'(b)>0$，则在 a 右边且与 a 充分近的点 x，有 $g(a)>g(x)$；在 b 左边且与 b 充

分近的点 x，有 $g(x)<g(b)$；由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到，从而必有 $g'(c)=0$.

在本题中，可设 $g(x)=f'(x)$，则由 $g'(a)=f''(a)<0$ 及 $g'(b)=f''(b)>0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在，使 $g'(c)=0$，即 $f''(c)=0$.

§9. 不定式的求值法

洛必达法则 情形 1：不定式 $\frac{0}{0}$ 的求值法. 若：(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 a 的某邻域 U_ε 内 * 有定义并且连续（此处 a 为数或符号 ∞），并且当 $x\to a$ 时，这两个函数都趋于零：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0;$$

(2) 导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 在点 a 的邻域 U_ε 内存在（在点 a 本身可不存在），并且当 $x\neq a$ 时，二者不同时为零；(3) 有限或无穷的极限值 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在，则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

情形 2：不定式 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法. 若：(1) 当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都趋于无穷大：

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞；

(2) 对于异于 a 且属于点 a 的邻域 U_ε 的一切 x 值，导数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在，并且当 $x\in U_\varepsilon$ 及 $x\neq a$ 时，

$$f'^2(x)+g'^2(x)\neq 0;$$

(3) 有限或无穷的极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法，可使不定式 $0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$ 等的求值法化为

$$\frac{0}{0}\quad 与\quad \frac{\infty}{\infty}$$

这两个基本类型的不定式的求值法.

求出下列各式之值：

【1323】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\tan x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sec^2 x}{2x\tan x+x^2\sec^2 x}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2\tan^2 x+2x\tan x+x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+2\frac{x}{\tan x}+\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2}=-\frac{1}{3}.$$

【1337】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,n>0)$.

---

* 所谓点 a 的邻域 U_ε 系指满足下列不等式的数 x 的集合：

(1) $0<|x-a|<\varepsilon$，若 a 为一个数； (2) $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$，若 a 为符号 ∞.

解题思路 若 n 为正整数,利用洛必达法则求得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0$. 若 n 不是正整数,则

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\frac{x^n}{e^{ax}}<\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\quad(x>1),$$

利用上述结果及夹逼准则.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{ae^{ax}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{a^n e^{ax}}=0.$

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数,则$[n]<n<[n]+1$. 于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}}<\frac{x^n}{e^{ax}}<\frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}}\quad(x>1).$$

而左右两端当 $x\to+\infty$时,上面已证明它们的极限为零. 因此,中间的极限也为零. 于是,对于任意大于零的实数 a 和 n,均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0$.

【1341】 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x\quad(\varepsilon>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=-\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{\varepsilon}}{\varepsilon}=0.$

【1343】 $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}$

提示 利用 1341 题的结果.

解 $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(x^x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}.$

由于

$$\lim_{x\to+0}x\ln x=0^{*)},\quad \lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1\quad 及\quad \lim_{x\to+0}x\ln^2 x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-2x\ln x)=0,$$

故

$$\lim_{x\to+0}\{(e^{x\ln x}-1)\ln x\}=\lim_{x\to+0}\left\{\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot x\ln^2 x\right\}=1\cdot0=0.$$

于是, $\lim\limits_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim\limits_{x\to+0}e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}=e^0=1.$

*) 利用 1341 题的结果.

【1347】 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解 由于 $$\lim_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x-2}}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

所以, $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}=e^{\frac{2}{\pi}}$.

【1348】 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 由于 $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\tan2x\ln\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cot2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sec^2x}{\tan x}}{-2\csc^2 2x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin2x=-1,$$

所以, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan2x}=e^{-1}$.

【1354】 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{e^x(x+2)}=\dfrac{1}{2}.$

【1359】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{1}{x(1+x)}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$

$=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=-\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2(1+x)^2}=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

【1367】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\operatorname{ch}x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch}x}-\sqrt[n]{\operatorname{ch}x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{th}x}{\operatorname{sh}x\left[\dfrac{1}{m}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{m}-1}-\dfrac{1}{n}(\operatorname{ch}x)^{\frac{1}{n}-1}\right]}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}}=\dfrac{mn}{n-m}$.

【1373】 证明:若函数 $f(x)$的二阶导数 $f''(x)$存在,则

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

证明思路 注意到当 $h\to0$ 时,

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0 \quad 及 \quad h^2\to0,$$

且分子及分母(视为 h 的函数)都有导数,而分母的导数 $2h$ 又不为零($h\to0$,但 $h\neq0$),故对 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$可使用洛必达法则,得

$$原式=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h} \qquad (*)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

注意 若对(*)式再使用洛必达法则,得原式$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to0}[f''(x+h)+f''(x-h)]$. 由于$f''(x)$仅存在而没有假设连续,故无法获得 $f''(x)$的结果. 这一点必须引起读者的注意.

证 当 $h\to0$ 时,$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\to0$ 及 $h^2\to0$,且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数,又注意到分母的导数$2h\neq0$($h\to0$ 但 $h\neq0$),故对$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$可用洛必达法则,并且继续运算,最后得证

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

【1374】 研究运用洛必达法则于下列各例的可能性:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$; (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}(\cos x+2\sin x)+\mathrm{e}^{-x^2}\sin^2x}{\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)}$.

提示 (1)及(2)洛必达法则不适用,但是原极限均存在.(3)不符合运用洛必达法则的条件,且原极限不存在.

解 (1) 分子、分母分别求导数,得商为$\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$,

此函数当 $x\to0$ 时,极限不存在,因此洛必达法则不能适用. 但是,原极限是存在的. 事实上,函数

$$\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x},$$

当 $x\to 0$ 时，$\dfrac{x}{\sin x}\to 1$ 及 $x\sin\dfrac{1}{x}\to 0$，于是，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=0$.

(2) 分子、分母分别求导数，得商为 $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$，

当 $x\to\infty$ 时，上述函数的极限不存在，因此洛必达法则不能适用. 但是，原极限是存在的. 事实上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=1.$$

(3) 如果运用洛必达法则，就有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5e^{-2x}\sin x-2xe^{-x^2}\sin^2 x+e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}e^{-x}+xe^{-x^2+x}\sin x-e^{-x^2+x}\cos x\right)=0.$$

这个结果是错误的. 事实上，若取 $x_n=n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=+\infty$. 对于数列 $\{x_n\}$，原式的分母 $e^{-x_n}(\cos x_n+\sin x_n)=\sqrt{2}e^{-x_n}\cdot\sin\left(x_n+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{-(n\pi+\frac{3\pi}{4})}\sin(n+1)\pi=0$，而分子不为零，此时原式的极限不存在，从而对于 $x\to+\infty$，原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 时，虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为零，但其导数在数列 $x_n=n\pi(n=1,2,\cdots)$ 上两者同时出现了零点. 因此，一方面本题不符合运用洛必达法则的条件；另一方面也不允许在求极限过程中，用 $\sin x$ 作除数，上、下约分后再求极限.

【1375】 设有一弓形，其弦长为 b，拱高为 h，半径为 R，又有内接于此弓形的等腰三角形. 若当 R 不变时弓形的弧长趋于零，求弓形面积与内接三角形面积之比的极限. 利用所得结果推出弓形面积的近似公式：

$$S\approx\frac{2}{3}bh.$$

提示 设弓形所张的中心角为 α，则内接等腰三角形面积为

$$\frac{1}{2}bh=R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)，弓形面积为\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha).$$

解 如图 1375 所示. $AB=b$，$DC=h$，$\angle AOB=\alpha$，$\triangle ABC$ 为内接等腰三角形，其面积为

$$\frac{1}{2}bh=R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right).$$

弓形面积为 $\dfrac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$.

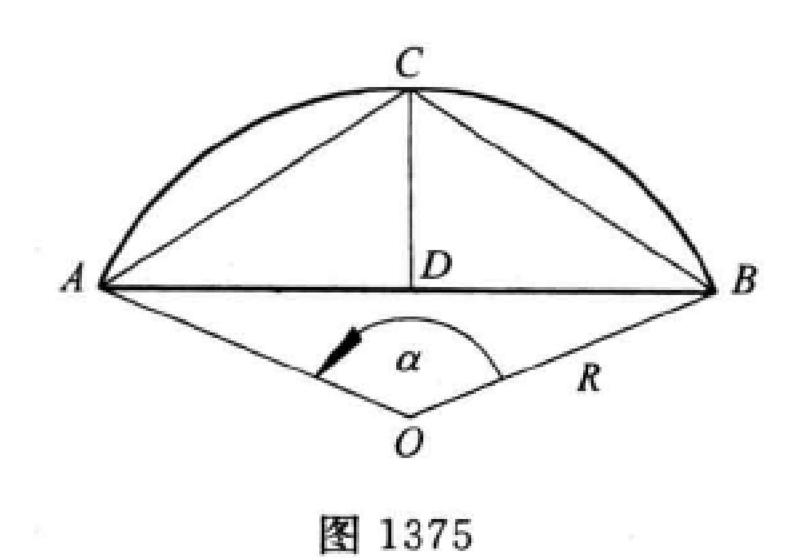


图 1375

当弧长趋于零时，α 趋于零，于是，弓形面积与内接等腰三角形面积之比的极限为

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\alpha\right)}$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\cdot\sin\frac{\alpha}{4}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4}\cdot\frac{\alpha}{4}}=\frac{4}{3}.$$

由此得弓形面积的近似公式为 $S\approx\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{2}bh=\dfrac{2}{3}bh$.

§10. 泰勒公式

1° **泰勒局部公式** 若:(1)函数 $f(x)$在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\varepsilon$ 内有定义;(2)在此邻域内有一直到$(n-1)$阶的导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$;(3)在点 x_0 存在 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\tag{1}$$

其中 $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $(k=0,1,\cdots,n)$. 特别地,当 $x_0=0$ 时,有:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o((x)^n).\tag{2}$$

在上述条件下,(1)式是唯一的.

若在点 x_0 存在导数 $f^{(n+1)}(x_0)$,则公式(1)中的余项可以取为 $o^*((x-x_0)^{n+1})$的形式.

从泰勒局部公式(2),得出下列5个重要的展开式:

Ⅰ. $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

Ⅱ. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$;

Ⅲ. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$;

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$;

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

2° **泰勒公式** 若:(1)函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有定义;(2)$f(x)$在此闭区间上有连续的导数 $f'(x),\cdots,f^{n-1}(x)$;(3)当 $a<x<b$ 时,存在有限的导数 $f^{(n)}(x)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^n\quad(0<\theta<1)\ (\text{拉格朗日余项}),$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}[a+\theta_1(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n\quad(0<\theta_1<1)\ (\text{柯西余项}).$$

【1376】 将多项式 $P(x)=1+3x+5x^2-2x^3$ 改写为二项式 $x+1$ 的非负整数次幂多项式.

解 $P'(x)=3+10x-6x^2$, $\quad P'(-1)=-13$.

$P''(x)=10-12x$, $\quad P''(-1)=22$.

$P'''(x)=-12$, $\quad P'''(-1)=-12$.

$P^{(4)}(x)=0$, $\quad P(-1)=5$.

按泰勒公式有

$$P(x)=P(-1)+\frac{P'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3+R_4(x),$$

这里 $R_4(x)=0$,即展开式中的余项为零,将上述结果代入,即得

$$P(x)=5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3.$$

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式，至含有所指阶数的项为止：

【1377】 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$到含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$等于什么？

解 $\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}=(1+x+x^2)\dfrac{(1+x)}{1+x^3}=(1+x)(1+x+x^2)\cdot[1-x^3+o(x^6)]$

$=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$.

$f^{(4)}(0)=4!\cdot(-2)=-48$.

【1382】 $\dfrac{x}{e^x-1}$到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时. 令$\dfrac{e^x-1}{x}=1+\Delta$,则有

$$\Delta=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是,$\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{1}{\frac{e^x-1}{x}}=\dfrac{1}{1+\Delta}=1-\Delta+\Delta^2-\Delta^3+\Delta^4+o(x^4)$.

注意到

$$\Delta^2=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{72}+o(x^4),\quad \Delta^3=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad \Delta^4=\frac{x^4}{16}+o(x^4),$$

则得$\dfrac{x}{e^x-1}=1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{x^4}{720}+o(x^4)$.

【1388】 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$按照 $x-1$ 的非负整数次幂展开式的前三项.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$. $f(1)=1$, $f'(1)=\dfrac{1}{2}$, $f''(1)=-\dfrac{1}{4}$.

于是,$\sqrt{x}=1+\dfrac{1}{2}(x-1)-\dfrac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)$.

【1391】 按分式$\dfrac{1}{x}$的非负整数次幂展开函数 $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x\ (x>0)$到含$\dfrac{1}{x^3}$的项.

解 由于
$$\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^4}\right)+o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是, $f(x)=\sqrt{1+x^2}-x=x\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}-x=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{8x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

【1393】 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$,且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$.

证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证明思路 将 $f(x+h)$展开到 h^{n+1},并与题设比较,可得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

再利用高阶导数的定义即获证.

证 按题设,我们有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0<\theta<1$. 又因 $f^{(n+1)}(x)$存在,故

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}).$$

比较上面两式,得

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),$$

从而有

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+n!\frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}.$$

由于$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=f^{(n+1)}(x)\neq 0$,故由上式知$\lim\limits_{h\to 0}\theta$存在,并且

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}=\frac{1}{n+1}.$$

【1394】 估计下列近似公式的绝对误差:(3) $\tan x\approx x+\dfrac{x^3}{3}$, 当 $|x|\leqslant 0.1$.

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

(3) 由 $f(x)=\tan x$,得

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x)=\frac{6}{\cos^4 x}-\frac{4}{\cos^2 x},\qquad f^{(4)}(x)=\frac{24\sin x}{\cos^5 x}-\frac{8\sin x}{\cos^3 x},$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{16}{\cos^2 x}+\frac{120\sin^2 x}{\cos^6 x},\qquad f^{(6)}(x)=\frac{32\sin x}{\cos^3 x}+\frac{240\sin x}{\cos^5 x}+\frac{720\sin^3 x}{\cos^7 x}.$$

因为 $f^{(5)}(x)$是偶函数,又当 $0\leqslant x\leqslant 0.1$ 时,$f^{(6)}(x)\geqslant 0$,所以,$f^{(5)}(x)$在 $x=\pm 0.1$ 处达到最大值,注意到

$$f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{(4)}(0)=0,$$

及

$$\cos^2 0.1=1-\sin^2 0.1>0.9,\quad |f^{(5)}(x)|\leqslant\frac{16}{0.9}+\frac{120\times 0.1^2}{0.9^3}<20.$$

于是,

$$|R_5(x)|\leqslant\frac{0.1^5}{5!}\times 20<2\times 10^{-6}.$$

【1396】 利用泰勒公式近似地计算并估计误差: (2) $\sqrt[5]{250}$; (5) $\sin 18°$.

解 (2) $\sqrt[5]{250}=3\left(1+\dfrac{7}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\approx 3\left[1+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{7}{243}+\dfrac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\left(\dfrac{7}{243}\right)^2\right]\approx 3.0171$;

$$\Delta<3\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\left(\frac{7}{243}\right)^3\approx 3.45\times 10^{-6}.$$

(5) $\sin 18°\approx\dfrac{\pi}{10}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^3+\dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)^5\approx 0.309017$,

$$\Delta<\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^7\approx 6\times 10^{-8}.$$

【1397】 计算: (1) e 精确到 10^{-9}; (5) lg11 精确到 10^{-5}.

解 (1)$\Delta=\dfrac{1}{(n+1)!}+\dfrac{1}{(n+2)!}+\cdots<\dfrac{1}{(n+1)!}\left(1+\dfrac{1}{n+1}+\cdots\right)=\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\dfrac{1}{n!n}$.

要 $\Delta<10^{-9}$,只要 $n!n>10^9$,即只要 $n\geqslant 11$. 于是,

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{11!}\approx 2.718281828.$$

(5) $\lg 11=1+\lg(1+0.1)$, $\Delta<\dfrac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}$.

要 $\Delta<10^{-5}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.1)^{n+1}<10^{-5}$，即只要 $n\geqslant 4$. 于是，

$$\lg 11\approx 1+\left[0.1-\frac{1}{2}(0.1)^2+\frac{1}{3}(0.1)^3-\frac{1}{4}(0.1)^4\right]\cdot\frac{1}{\ln 10}\approx 1.04139.$$

利用展开式 Ⅰ～Ⅴ，求下列极限：

【1398】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^5)\right]}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4\cdot 2!}\right)x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$.

【1402】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^3\left(1+\frac{1}{2x^6}-\frac{1}{8x^{12}}+o\left(\frac{1}{x^{12}}\right)\right)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{6}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\frac{1}{6}$.

当 $x\to 0$ 时，求出无穷小量 y 的形如 Cx^n（C 为常数）的主项，设：

【1408】 $y=(1+x)^x-1$

解 $y=e^{x\ln(1+x)}-1=e^{x\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}-1=e^{x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}-1$

$=1+\left[x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]+o\left(x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right)-1=x^2+o(x^2)$，

故主项为 x^2.

【1410】 当选择怎样的系数 a 与 b 时，量 $x-(a+b\cos x)\sin x$ 对于 x 为 5 阶无穷小？

提示 将量 $x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$ 展开到 x^5.

解 $x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+\frac{1}{5!}(2x)^5+o(x^6)\right]$

$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5)$.

要此量对于 x 为 5 阶无穷小，当且仅当

$$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \frac{a}{6}+\frac{2b}{3}=0.\end{cases}$$

解之，得　$a=\frac{4}{3}$，　$b=-\frac{1}{3}$.

【1412】 假设 x 的绝对值为小量，推出形如 $x=\alpha\sin x+\beta\tan x$ 且精确到 x^5 项的近似公式. 应用此公式近似地求小角度的弧长.

提示 仿 1410 题的解法.

解 $x=\alpha\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right]+\beta\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5)\right]$

$$=(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3+\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5),$$

所以

$$(1-\alpha-\beta)x+\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}\right)x^3-\left(\frac{\alpha}{120}+\frac{2\beta}{15}\right)x^5+o(x^5)=0.$$

要此近似公式精确到 x^5 项，当且仅当 $\begin{cases}1-\alpha-\beta=0,\\ \frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{3}=0.\end{cases}$ 解之，得 $\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{3}$.

于是，近似公式为

$$x\approx\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x;$$

弧长＝中心角×半径，设中心角为 x，半径为 R，则弧长 $=Rx\approx\frac{2R}{3}\sin x+\frac{R}{3}\tan x$，此即小角度的弧长的近似公式.

§11. 函数的极值．函数的最大值和最小值

1° **极值存在的必要条件** 若函数在点 x_0 的双侧邻域中有定义，并且对于某区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内的一切点 x，下列不等式分别成立：

$$f(x)<f(x_0) \quad 或 \quad f(x)>f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有**极值（极大值或极小值）**. 在有极值的点导数 $f'(x_0)=0$（若它存在）.

2° **极值存在的充分条件**

第一法则：若

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $|x-x_0|<\delta$ 内有定义并且是连续的，且在点 x_0，导数 $f'(x_0)=0$ 或不存在（临界点）；

(2) $f(x)$ 在区域 $0<|x-x_0|<\delta$ 内有有限的导数 $f'(x)$；

(3) 导数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质可用下表表示出来：

	导数的符号		结　论
	$x<x_0$	$x>x_0$	
Ⅰ	+	+	无极值
Ⅱ	+	−	极大值
Ⅲ	−	+	极小值
Ⅳ	−	−	无极值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导数 $f''(x)$，并且在点 x_0 下列条件成立：

$$f'(x_0)=0 \quad 与 \quad f''(x_0)\neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，并且当 $f''(x_0)<0$ 时有极大值，当 $f''(x_0)>0$ 时有极小值.

第三法则：设函数 $f(x)$ 在某区间 $|x-x_0|<\delta$ 内有导数 $f'(x),\cdots,f^{(n-1)}(x)$，在点 x_0 有导数 $f^{(n)}(x_0)$，并且

$$f^{(k)}(x_0)=0 \quad (k=1,\cdots,n-1), \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值，并且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时有极大值；当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值.

3° **绝对极值** 在闭区间$[a,b]$上,连续函数$f(x)$或者在其临界点(就是导数$f'(x)$等于零或不存在的点)达到最大(最小)值,或者在所给闭区间的端点a和b达到最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

【1417】 $y=x^m(1-x)^n$ (m及n为正整数)

解题思路 要区分下列四种情况:

(1)在$x=0$处,若m为偶数.

(2)在$x=0$处,若m为奇数.

(3)在$x=\dfrac{m}{m+n}$处,不论m、n是奇数还是偶数.

(4)在$x=1$处,若n为偶数或若n为奇数.

解 $y'=x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x]$,由$y'=0$得$x=0$, $x=1$, $x=\dfrac{m}{m+n}$.

(1) 若m为偶数,则当$0<x<\dfrac{m}{m+n}$时, $y'>0$,当$x<0$时, $y'<0$,所以,函数y在$x=0$处有极小值$y=0$.

(2) 若m为奇数,则y'在$x=0$邻近不变号,故无极值.

(3) 不论m、n是奇数还是偶数时,由于当$0<x<\dfrac{m}{m+n}$时, $y'>0$,当$\dfrac{m}{m+n}<x<1$时, $y'<0$,所以,函数y在$x=\dfrac{m}{m+n}$处有极大值$y=\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

(4) 同理,容易得知:若n为偶数时,则当$x=1$时有极小值$y=0$.若n为奇数,则当$x=1$时函数y无极值.

【1423】 设

$$f(x)=(x-x_0)^n\varphi(x) \quad (n\text{为正整数}),$$

其中函数$\varphi(x)$当$x=x_0$时连续,且$\varphi(x_0)\neq 0$.研究此函数在点$x=x_0$的极值.

解题思路 由于$\varphi(x)$在$x=x_0$处连续且$\varphi(x_0)\neq 0$,故在点x_0的充分小邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内$\varphi(x)$与$\varphi(x_0)$同号,且$f(x_0)=0$.因此,$f(x)$的符号与n的奇偶性及$\varphi(x_0)$的符号有关.为此,可直接从极值的定义出发,对n为奇数或偶数及$\varphi(x_0)$的正负,分别求极值.

解 由于$\varphi(x)$在点$x=x_0$连续且$\varphi(x_0)\neq 0$,所以,$\varphi(x)$在点x_0的充分小邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内与$\varphi(x_0)$同号.于是,$f(x)$的符号与n的奇偶性及$\varphi(x_0)$的符号有关.

(1) 若n为奇数,则当x经过x_0时,函数$f(x)$的值变号,所以,在$x=x_0$时没有极值.

(2) 若n为偶数,则$(x-x_0)^n>0$ $(x\neq x_0)$.因而当$\varphi(x_0)>0$时,则

$$f(x)>f(x_0)=0 \quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以,当$x=x_0$时有极小值$f(x_0)=0$.

当$\varphi(x_0)<0$时,则

$$f(x)<f(x_0)=0 \quad (0<|x-x_0|<\delta),$$

所以,当$x=x_0$时有极大值$f(x_0)=0$.

【1425】 可否断定:若函数$f(x)$在点x_0有极大值,则在此点某充分小邻域内,函数$f(x)$在点x_0的左侧递增,而在其右侧递减?

提示 不能断定.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

在点$x=0$有极大值$f(0)=2$,但在该点的充分小邻域内$f(x)$为振荡的.即时递增时递减.

解 不能断定.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0,\\ 2, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)-f(0)=-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)<0\quad(x\in(-\delta,\delta),\ x\neq 0)$.

所以,在点 $x=0$ 有极大值 $f(0)=2$.易知

$$f'(x)=\cos\frac{1}{x}-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\quad(x\neq 0).$$

故在 $x=0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$都时正时负,故在 $x=0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$都是振荡的(即时递增时递减).

求下列函数的极值:

【1440】 $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$.

解 $y'=-\sin x(1+2\cos x)$,令 $y'=0$ 得 $x=k\pi$ 或$\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

因为 $y''=-\cos x-2\cos 2x$, $y''\Big|_{x=k\pi}=(-1)^{k+1}-2<0$, $y''\Big|_{x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi}=\frac{1}{2}+1>0$.

所以,当 $x=k\pi$ 时有极大值 $y=(-1)^k+\frac{1}{2}$;当 $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ 时有极小值 $y=-\frac{3}{4}$.

【1444】 $y=|x|e^{-|x-1|}$.

解 当 $x<0$ 时, $y=-xe^{x-1}$, $y'=-(x+1)e^{x-1}$. 令 $y'=0$ 得 $x=-1$.

因为当 $x<-1$ 时,$y'>0$,当$-1<x<0$ 时,$y'<0$,所以,当 $x=-1$ 时有极大值 $y=e^{-2}\approx 0.135$.

又当 $0<x<1$ 时,有

$$y=xe^{x-1},\quad y'=(x+1)e^{x-1}>0,$$

所以,当 $x=0$ 时有极小值 $y=0$.

而当 $x>1$ 时,有

$$y=xe^{1-x},\quad y'=(1-x)e^{1-x}<0.$$

所以,当 $x=1$ 时有极大值 $y=1$.

求下列函数在所给闭区间上的最大值和最小值:

【1447】 $f(x)=|x^2-3x+2|$ 在闭区间$[-10,10]$上.

解 由于 $f(x)\geqslant 0$,故对于在区间$[-10,10]$上能使 $f(x)=0$ 的点取得最小值.由 $x^2-3x+2=0$ 得 $x=1,2$.即当 $x=1,2$ 时,函数取得最小值 $m=0$.

其次,$f'(x)=(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-2x+3)$,当 $1<x<\frac{3}{2}$时, $f'(x)>0$,当$\frac{3}{2}<x<2$ 时, $f'(x)<0$,

所以,当 $x=\frac{3}{2}$时有极大值 $y=\frac{1}{4}$,于是,$M=\max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right),f(-10),f(10)\right\}=132$.

求下列函数在所给区间上的下确界(inf)与上确界(sup):

【1454】 求函数 $f(\xi)=\frac{1+\xi}{3+\xi^2}$在区间 $x<\xi<+\infty$内的下确界与上确界,作出下列函数的图像:

$$m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty}f(\xi),\quad M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty}f(\xi).$$

解 由于 $f(-3)$,$f(1)$分别是函数 $f(\xi)$的极小值和极大值,又 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}f(\xi)=0$,于是,

当$-\infty<x\leqslant -3$ 时,$m(x)=f(-3)=-\frac{1}{6}$, 当$-3<x\leqslant -1$ 时,$m(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$,

当 $-1<x<+\infty$ 时，$m(x)=0$； 当 $-\infty<x\leqslant 1$ 时，$M(x)=f(1)=\frac{1}{2}$，

当 $1<x<+\infty$ 时，$M(x)=\frac{1+x}{3+x^2}$.

函数 $m(x)$ 及 $M(x)$ 的图像分别如图 1454－1 及图 1454－2 所示.

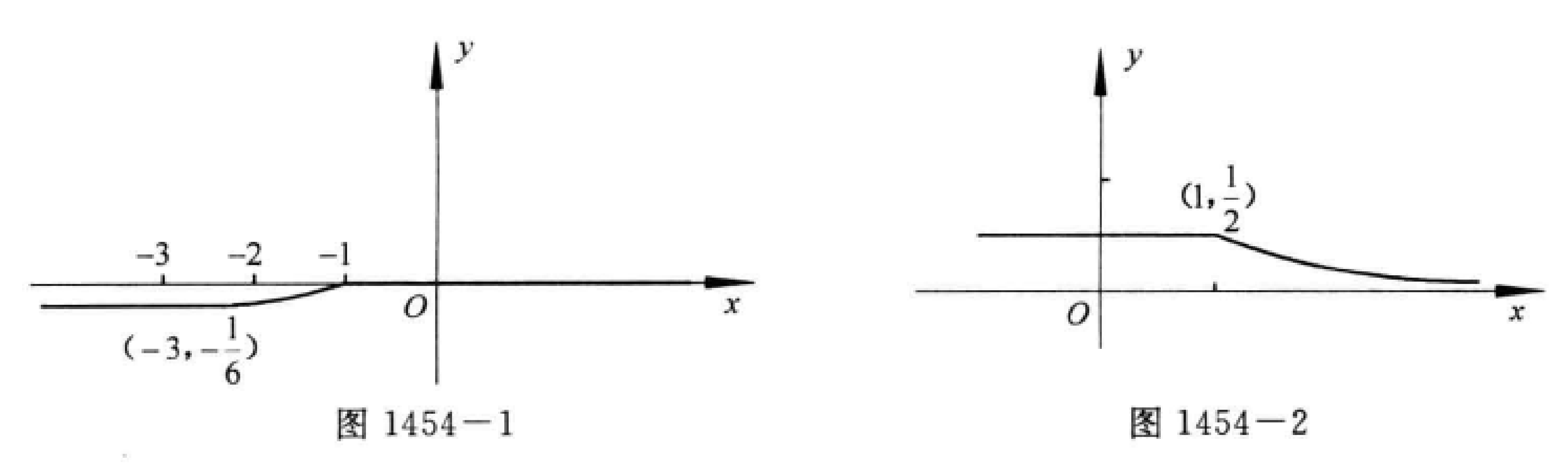


图 1454－1　　图 1454－2

【1455】 求以下各数列的最大项：(1) $\frac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,2,\cdots)$.

解题思路 (1)经判断知，当 $x=\frac{10}{\ln 2}$ 时，函数 $f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$ 有唯一的极大值.

解 (1) 经判断知，当 $x=\frac{10}{\ln 2}$ 时，$f(x)=\frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值，并且是唯一的极值. 从而，最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}},\frac{N^{10}}{2^N},\frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N=\left[\frac{10}{\ln 2}\right]=14$. 于是，最大项为

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right)=\max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}},\frac{14^{10}}{2^{14}},\frac{15^{10}}{2^{15}}\right)=\frac{14^{10}}{2^{14}}\approx 1.77\times 10^7.$$

【1456】 证明下列不等式：(2) 若 $0\leqslant x\leqslant 1$ 及 $p>1$，则 $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

证 (2) 设 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，经判断知，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$ 为 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的唯一的极小值，而边界值 $f(0)=f(1)=1$，所以，$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$.

【1457】 求多项式 $P(x)=x(x-1)^2(x+2)$ 在闭区间$[-2,1]$上“与零的偏差”，就是求

$$E_P=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

解 $P'(x)=2(x-1)(2x^2+2x-1)$.

令 $P'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，所以，

$$\begin{aligned}E_P&=\max\left\{|P(-2)|,|P(1)|,\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|,\left|P\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right|\right\}\\&=\left|P\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\frac{9+6\sqrt{3}}{4}\approx 4.85.\end{aligned}$$

【1459】 数 $\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|$ 称为函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的**绝对偏差**.

求函数 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^3$ 在闭区间$[0,1]$上的绝对偏差.

解 由于 $f(x)-g(x)=x^2-x^3$，$f'(x)-g'(x)=2x-3x^2$，从而令 $f'(x)-g'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $\frac{2}{3}$.

又因

$$f''(x)-g''(x)=2-6x,\quad f''\left(\frac{2}{3}\right)-g''\left(\frac{2}{3}\right)=2-4=-2<0,$$

所以，当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $f(x)-g(x)$ 取极大值；又由于当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)-g(x)\geqslant 0$，所以，绝对偏差

$$\Delta=f\left(\frac{2}{3}\right)-g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{27}.$$

确定下列各方程实根的数目，并划分出这些根所在的区间：

【1465】 $x^5-5x=a$.

解 设 $f(x)=x^5-5x-a$，则 $f'(x)=5x^4-5$. 令 $f'(x)=0$，得临界点 $x=\pm 1$. 由于

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,$$
$$f'(x)>0,\quad x\in(-\infty,-1),\quad x\in(1,+\infty),$$
$$f'(x)<0,\quad x\in(-1,1),$$
$$f(-1)=4-a,\quad f(1)=-4-a,$$

故 当 $a<-4$ 时，$f(-1)>0$，$f(1)>0$. 因此，有且仅有一实根，位于 $(-\infty,-1)$ 内；

当 $-4<a<4$ 时，$f(-1)>0$，$f(1)<0$，此时有三个实根，分别位于 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内；

当 $a>4$ 时，$f(-1)<0$，$f(1)<0$. 因此，有且仅有一实根位于 $(1,+\infty)$ 内.

【1466】 $\ln x=kx$.

解题思路 *当 $k=0$ 时，显然方程仅有一根 $x=1$. 故不妨设 $k\neq 0$. 令 $f(x)=\ln x-kx$，求得临界点 $x=\frac{1}{k}$ 后，分别就 $-\infty<k<0$，$0<k<\frac{1}{e}$ 及 $k>\frac{1}{e}$ 加以讨论.*

解 当 $k=0$ 时，方程显然仅有一个根 $x=1$. 因此，不妨设 $k\neq 0$. 令 $f(x)=\ln x-kx\,(x>0)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-k.$$

令 $f'(x)=0$，得临界点 $x=\frac{1}{k}$. 由于 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，故曲线的图像始终呈凸状.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$. 又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln\frac{1}{k}-1,$$

故当 $k>\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)<0$，此时方程无根.

当 $0<k<\frac{1}{e}$ 时，$f\left(\frac{1}{k}\right)>0$，因此，方程有两个实根，分别位于 $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k},+\infty\right)$ 内.

当 $-\infty<k<0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$f(1)=-k>0$，$f'(x)=\frac{1}{x}-k>0$，故此时方程有且仅有一实根位于 $(0,1)$ 内.

【1468】 当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\sin^3x\cos x=a$.

解 当 $a=0$ 时，方程显然有实根 $x=0$，$\frac{\pi}{2}$ 或 π. 因此，不妨设 $a\neq 0$. 令 $f(x)=\sin^3x\cos x-a$，则

$$f'(x)=3\sin^2x\cos^2x-\sin^4x.$$

令 $f'(x)=0$，得临界点 $x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}-a,\quad f(0)=f(\pi)=-a,$$

并且当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$.

于是，当 $|a|<\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程有两个实根位于 $(0,\pi)$ 内；当 $|a|>\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时，方程无实根.

【1470】 在什么条件下方程 $x^3+px+q=0$ 有：(1) 一个实根；(2) 三个实根.

在平面(p,q)上画出相应的区域.

解 设 $f(x)=x^3+px+q$，则 $f'(x)=3x^2+p$. 若 $p\geqslant 0$，则 $f'(x)>0(x\neq 0)$，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是递增的，并且显然 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

若 $p<0$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\sqrt{-\frac{p}{3}}$，$x_2=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$. 在$(-\infty,x_2]$和$[x_1,+\infty)$上 $f(x)$递增，在$[x_2,x_1]$上$f(x)$递减.

因此，若 $f(x_1)f(x_2)>0$，则方程 $f(x)=0$ 仅有一个实根. 若 $f(x_2)>0$，$f(x_1)<0$，则方程 $f(x)=0$ 恰有三个实根.

由于

$$f(x_1)=-\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

$$f(x_2)=\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}-p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q,$$

故 $f(x_1)f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p\geqslant 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1)<0$ 及 $f(x_2)>0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

此即方程有三实根的条件.

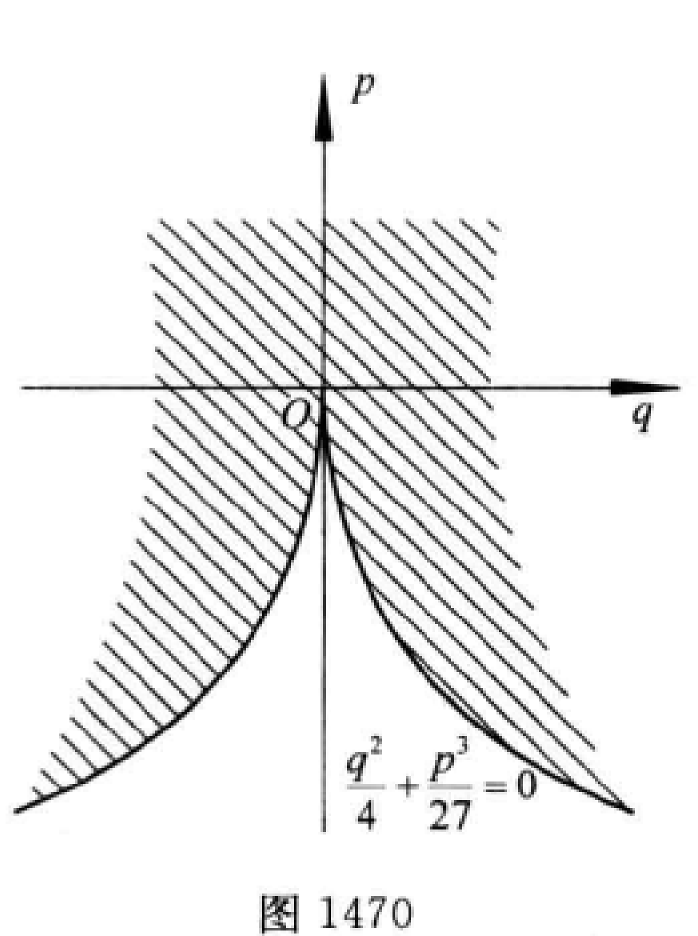


图 1470

如图 1470 所示，曲线$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 的左右上方是方程仅有一实根的(p,q)域，以阴影表之；而曲线的下方则是方程有三实根的(p,q)域，以不具阴影表之.

§12. 依据函数的特征点作函数图像

为了作出函数 $y=f(x)$的图像，必须：(1)确定此函数的存在域；并研究函数在其存在域边界点的性质；(2)查明图像的对称性和周期性；(3)求出函数的不连续点及连续的区间；(4)确定函数的零点及同号区间；(5)求出极值点并查明函数上升和下降的区间；(6)确定拐点及函数图像凹凸的区间；(7)若有渐近线存在则求出渐近线；(8)指出函数图像的各种特性.

作出下列函数的图像：

【1473】 $y=(x+1)(x-2)^2$.

解 $y'=3x(x-2)$，令 $y'=0$ 得 $x=0$ 或 2；$y''=6x-6$，令 $y''=0$ 得 $x=1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x=0$ 时，$y=4$；$x=1$ 时，$y=2$；$x=2$，-1 时，$y=0$.(图 1473)

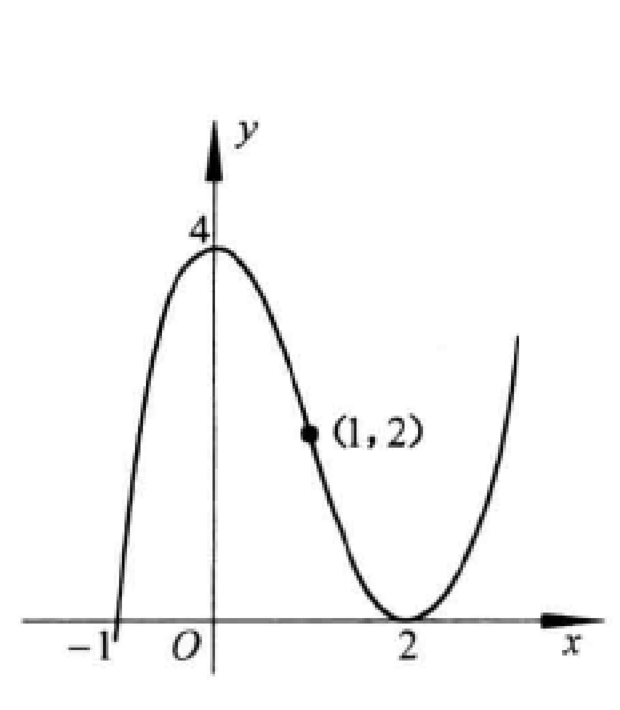


图 1473

x = −1
y = x − 3
O
x
y

图 1477

【1477】 $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=-1$. 斜渐近线：$y=x-3$，事实上，$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=-3$.

垂直渐近线：$x=-1$. $y'=\dfrac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}$. 令 $y'=0$，得 $x=0$，或 $x=-4$. $y''=\dfrac{12x^2}{(1+x)^5}$.

当 $x<-1$ 时，$y''<0$，图像呈凸状；当 $x>-1$ 时，$y''>0$，图像呈凹状；

又 $y''\Big|_{x=-4}<0$，故当 $x=-4$ 时有极大值 $y=-9\dfrac{13}{27}$；由于 y' 经过 $x=0$ 从负变到正，故当 $x=0$ 时取得极小值 $y=0$.（图 1477）

【1483】 $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}+\dfrac{1}{1-x}$.

解 图像关于 Oy 轴对称.

零点处：$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}\approx\pm0.79$.

$y'=\dfrac{4(8x^4-10x^2+5)}{3x^3(1-x^2)^2}$，$y'=0$ 无实根，无极值点.

$y''=\dfrac{4(24x^6-42x^4+45x^2-15)}{x^4(1-x^2)^3}$，令 $y''=0$，得 $x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\approx\pm0.71$.

经判别知，此为拐点，相应纵坐标 $y=-2\dfrac{2}{3}$.

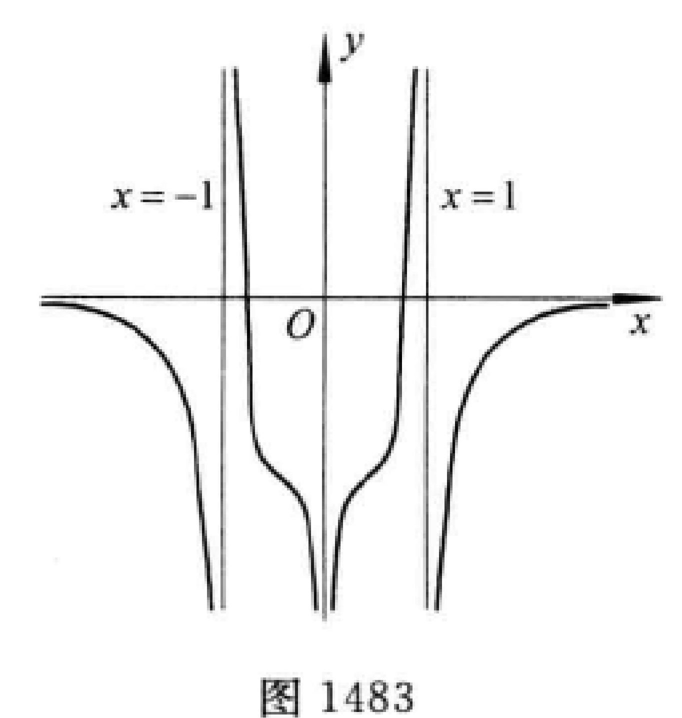


图 1483

渐近线：$x=0$，$x=-1$，$x=1$ 和 $y=0$.

当 $x>0$ 时，$y'>0$，曲线上升.

当 $0<x<0.71$ 时，$y''<0$，图像呈凸状. 当 $0.71<x<1$ 时，$y''>0$，图像呈凹状. 当 $1<x<+\infty$ 时，$y''<0$，图像呈凸状.

图像如图 1483 所示.

【1491】 $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

解 图像关于坐标原点对称. 零点处：$x=0$. 不连续点：$x=\pm1$.

$y'=\dfrac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$，令 $y'=0$，得 $x=\pm\sqrt{3}$. 当 $x=\pm1$ 时，$y'=\infty$.

$y''=-\dfrac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{\frac{7}{3}}}$，令 $y''=0$ 得 $x=0$ 或 ±3.

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	−	∞	−	−	−	∞	−	0	+	+	+
y''	+	0	−	−	−	∞	+	0	−	∞	+	+	+	0	−
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	不连续点	↘	拐点	↘	不连续点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线：$x=-1$，$x=1$. 当 $x=\pm\sqrt{3}$时，$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\approx\pm1.38$；当 $x=\pm3$ 时，$y=\pm1\frac{1}{2}$.

图像如图 1491 所示.

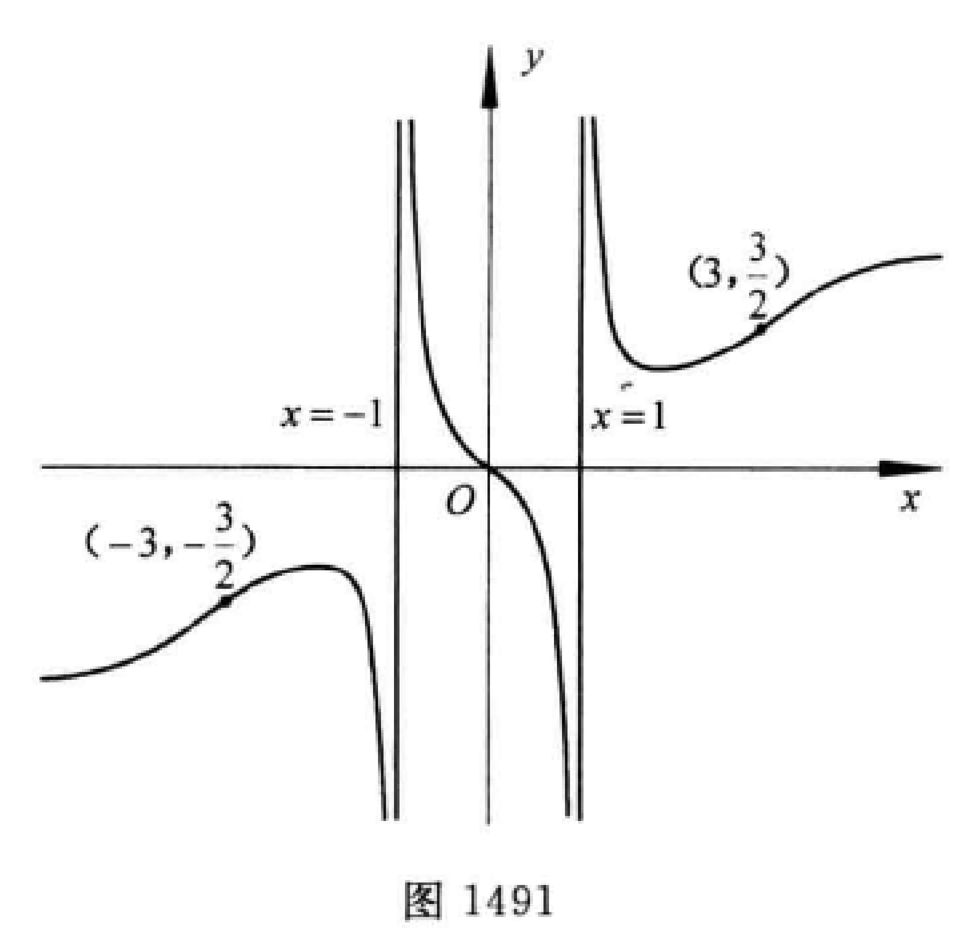


图 1491

【1501】 $y=\sin^4x+\cos^4x$.

提示 由于函数的图像关于 Oy 轴对称，且其周期 $T=\frac{\pi}{2}$，故建议在$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$内作其图像.

解 图像关于 Oy 轴对称. 由于

$$y=\sin^4x+\cos^4x=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3+\cos4x),$$

故函数的周期 $T=\frac{\pi}{2}$. 在一周期$-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$内讨论图像.

$y'=-\sin4x$. 令 $y'=0$，得 $x=0$ 或$\pm\frac{\pi}{4}$.

$y''=-4\cos4x$. 令 $y''=0$，得 $x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{8}$，$y_{1,2}=\frac{3}{4}$.

经判别知：点 x_1 和 x_2 均为拐点；

当 $x=0$ 时有极大值 $y=1$；当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$时有极小值 $y=\frac{1}{2}$.

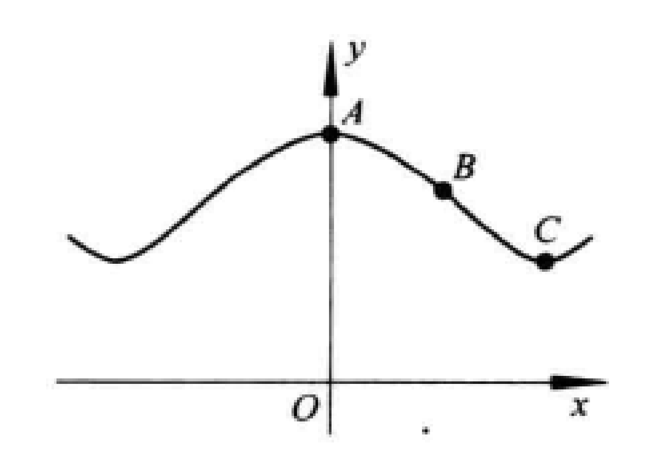


图 1501

图像如图 1501 所示，图中主要点的坐标： $A(0,1)$， $B\left(\frac{\pi}{8},\frac{3}{4}\right)$， $C\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

【1503】 $y=\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi+x)=-\sin x$，易知函数的周期 $T=\pi$. 在一周期 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 内讨论图像.

不连续点：$x=\frac{3\pi}{4}$. 零点处：$x=0$ 或 π. 渐近线：$x=\frac{3\pi}{4}$.

$y'=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}>0$,无极值,函数递增,其图像是上升的.

$y''=-\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$,令 $y''=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}$,对应的 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

经判别知,它为拐点.图像如图 1503 所示,图中主要点的坐标:

$$A\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),B(\pi,0)\text{和 }C\left(\frac{5\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

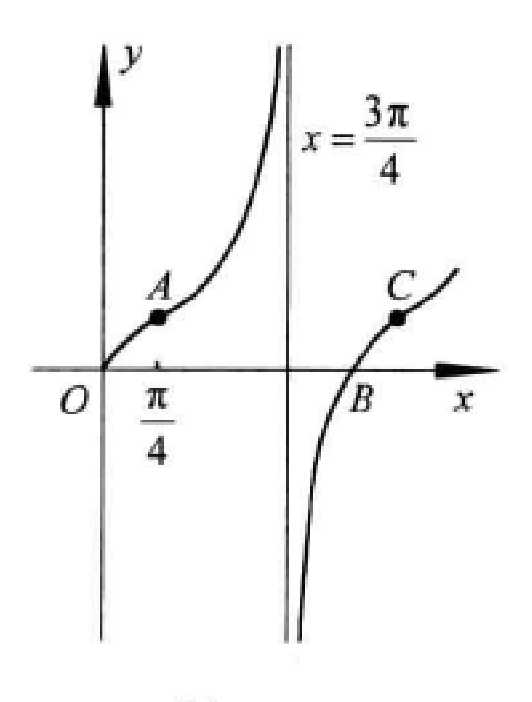
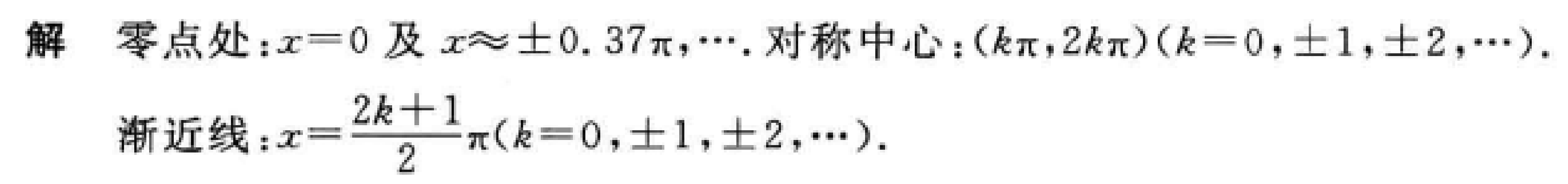


图 1503

【1505】 $y=2x-\tan x$.


解 零点处:$x=0$ 及 $x\approx\pm0.37\pi,\cdots$.对称中心:$(k\pi,2k\pi)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

渐近线:$x=\dfrac{2k+1}{2}\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

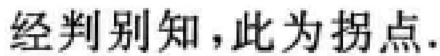
$y'=2-\sec^2x$,令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

经判别知:当 $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 时,有极大值 $y=\dfrac{\pi}{2}-1+2k\pi$;

当 $x=-\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)$时,有极小值

$$y=-\left(\frac{\pi}{2}-1+2k\pi\right)\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

$y''=-2\sec^2x\tan x$,令 $y''=0$ 得 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.


经判别知,此为拐点.

图像如图 1505 所示(仅描绘从$-\dfrac{3\pi}{2}$到$\dfrac{3\pi}{2}$区间内的图像).

图 1505

【1512】 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

解 存在域:$x>0$.零点处:$x=1$.渐近线:$x=0(x\to+0)$,$y=0(x\to+\infty)$.

$y'=\dfrac{2-\ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$,令 $y'=0$ 得 $x=e^2\approx7.39$.经判别知,此时有极大值 $y=\dfrac{2}{e}\approx0.74$.

$y''=\dfrac{3\ln x-8}{4x^{\frac{5}{2}}}$,令 $y''=0$ 得 $x=e^{\frac{8}{3}}\approx14.39$,经判别知,此为拐点,此时 $y=\dfrac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\approx0.70$.

图像如图 1512 所示.图中主要点的坐标:$A(1,\ 0)$,$B(7.39,\ 0.74)$,$C(14.39,\ 0.70)$.

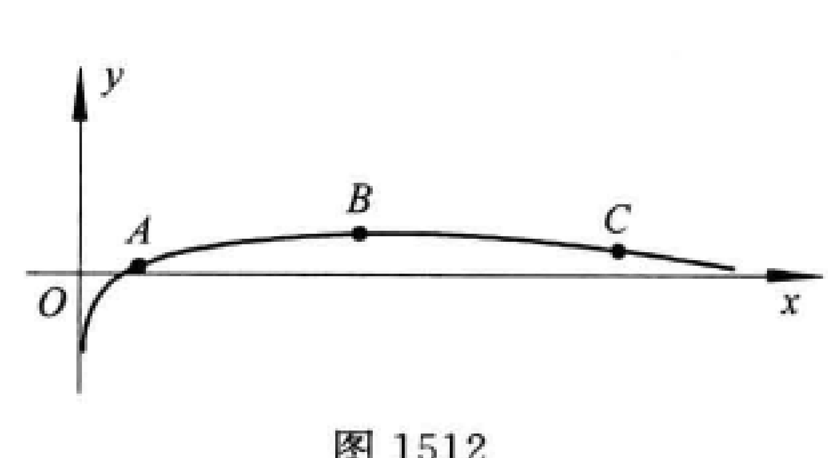


图 1512

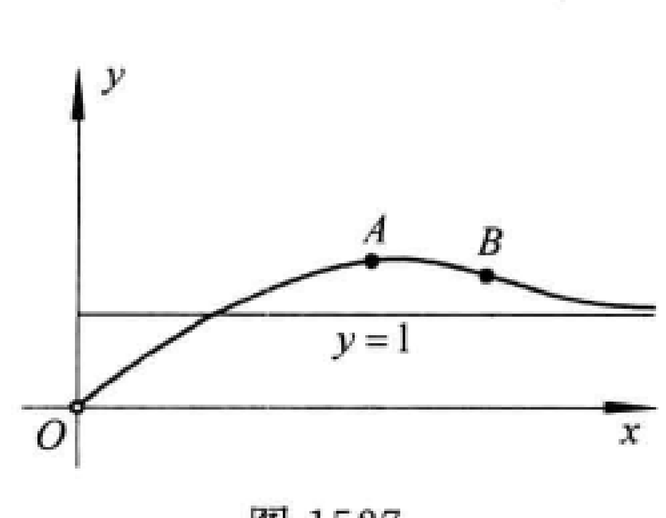


图 1527

【1527】 $y=x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x>0$.

渐近线:$y=1$.事实上,$k=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}-1}=0$,$b=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

当 $x=+0$ 时有边界的极小值 $y=0$.$y'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.令 $y'=0$ 得 $x=e$.

当 $x<\mathrm{e}$ 时，$y'>0$，函数递增，其图像上升；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$y'<0$，函数递减，其图像下降.

当 $x=\mathrm{e}$ 时有极大值 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\approx1.445$.

$y''=x^{\frac{1}{x}-4}(1-2\ln x+\ln^2x-3x+2x\ln x)$，令 $y''=0$ 得 $x\approx\mathrm{e}^{1.47}(\approx4.35)$.

当 $0<x<\mathrm{e}^{1.47}$ 时，$y''<0$，图像是凸的.

当 $x>\mathrm{e}^{1.47}$ 时，$y''>0$，图像是凹的，故 $x=\mathrm{e}^{1.47}$ 是拐点，$y\approx1.402$.

图像如图 1527 所示. 图中各点位置：$A(\mathrm{e},\ 1.445)$，$B(4.35,\ 1.402)$.

作出下列参数方程所表示的曲线：

【1532】 $x=2t-t^2,\quad y=3t-t^3$.

解 $x'_t=2(1-t),\quad y'_t=3(1-t^2)$. 令 $x'_t=0,\ y'_t=0$，得 $t=\pm1$.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty,-1)$	+	−	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1,1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1,+\infty)$	−	−	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\dfrac{3}{2}(1+t)\ (t\neq1)$. 令 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ 得 $t=-1$，此时 $x=-3,\ y=-2$.

由于 $t=1\pm\sqrt{1-x}$，故存在域为 $x\leqslant1$，且图像有两支，

又因 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1-t)}$，故当 $t>1$ 时图像呈凸状，而当 $t<1$ 时图像呈凹状.

当 $x=0$ 时，$t=0$ 或 $t=2$，此时 $y=0$ 或 $y=-2$

当 $y=0$ 时，$t=0,\ +\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$，此时 $x=0,\ 0.464$ 或 -6.464.

图像如图 1532 所示. 图中主要点的坐标：

$A(-6.464,\ 0)$，$B(-3,-2)$，$D(1,\ 2)$，$E(0,-2)$.

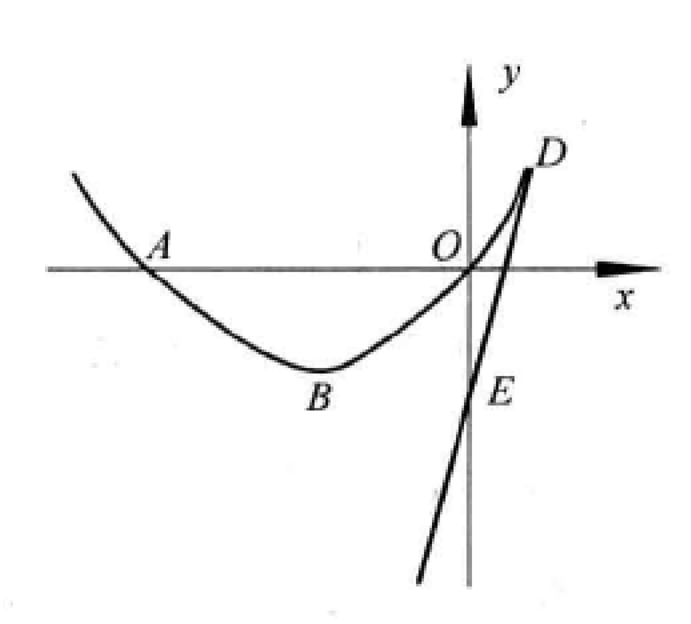


图 1532

【1535】 $x=t+\mathrm{e}^{-t},\ y=2t+\mathrm{e}^{-2t}$.

解 $x'_t=\dfrac{\mathrm{e}^t-1}{\mathrm{e}^t},\quad y'_t=\dfrac{2(\mathrm{e}^{2t}-1)}{\mathrm{e}^{2t}},\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2(\mathrm{e}^t+1)}{\mathrm{e}^t},\quad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{-2}{\mathrm{e}^t-1}$.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$	图像
$(-\infty,0)$	−	−	由 $+\infty$ 下降到 1	由 $+\infty$ 下降到 1	+	+	上升，凹状
$(0,+\infty)$	+	+	由 1 上升到 $+\infty$	由 1 上升到 $+\infty$	+	−	上升，凸状

渐近线：$y=2x$. 事实上，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2t+\mathrm{e}^{-2t}}{t+\mathrm{e}^{-t}}=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-2x)=\lim_{x\to+\infty}[(2t+\mathrm{e}^{-2t})-2t-2\mathrm{e}^{-t}]=0.$$

当 $t=0$ 时，对应于曲线上的点 $A(1,1)$，此点的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4$. 当 $t=-\ln2$ 时，曲线与渐近线相交. 图像如图 1535 所示.

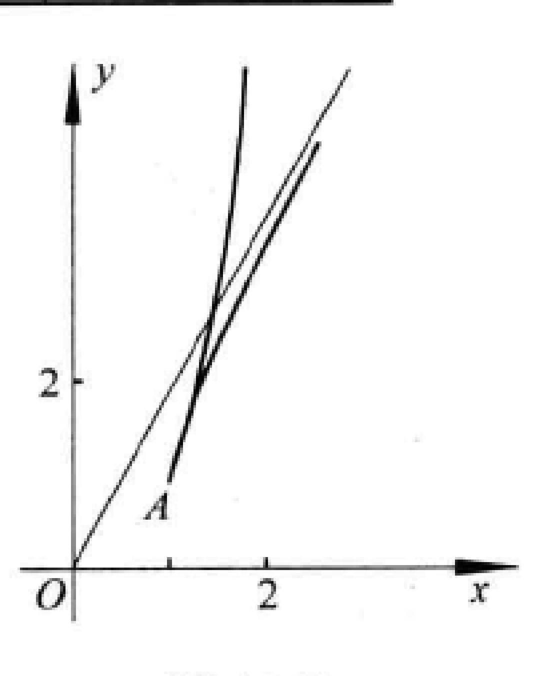


图 1535

把下列曲线方程化为参数方程，然后作出这些曲线的图像：

【1543】 $x^2y^2=x^3-y^3$.

解 设 $y=tx$，代入原方程，即得

$$x=\frac{1-t^3}{t^2},\quad y=\frac{1-t^3}{t}\quad (t\neq 0).\quad x'_t=-\frac{2+t^3}{t^3},\quad y'_t=-\frac{1+2t^3}{t^2}.\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t(1+2t^3)}{2t^3}.$$

令 $x'_t=0$，$y'_t=0$ 及 x'_t，y'_t 趋于∞，得 $t=-\sqrt[3]{2}$，$-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$，0.

作下表：

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	图像
$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-$	$+$	由$+\infty$下降到$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由$-\infty$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	$-$	下降
$(-\sqrt[3]{2},-\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$+$	$+$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$上升到$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	$+$	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0)$	$+$	$-$	由$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$上升到$+\infty$	由$-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$下降到$-\infty$	$-$	下降
$(0,+\infty)$	$-$	$-$	由$+\infty$下降到$-\infty$	由$+\infty$下降到$-\infty$	$+$	上升

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\sqrt[3]{2}}=\infty,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=1.$$

图像通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$，$B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}},-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$，及 $O(0,0)$. 如图1543所示.

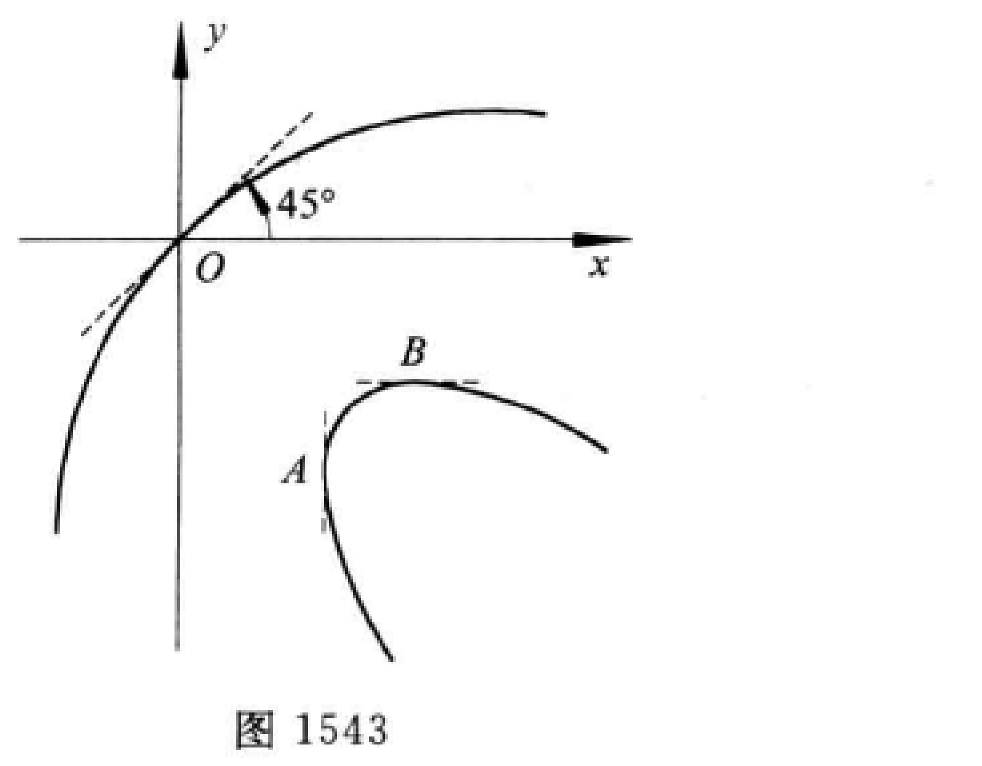


图 1543

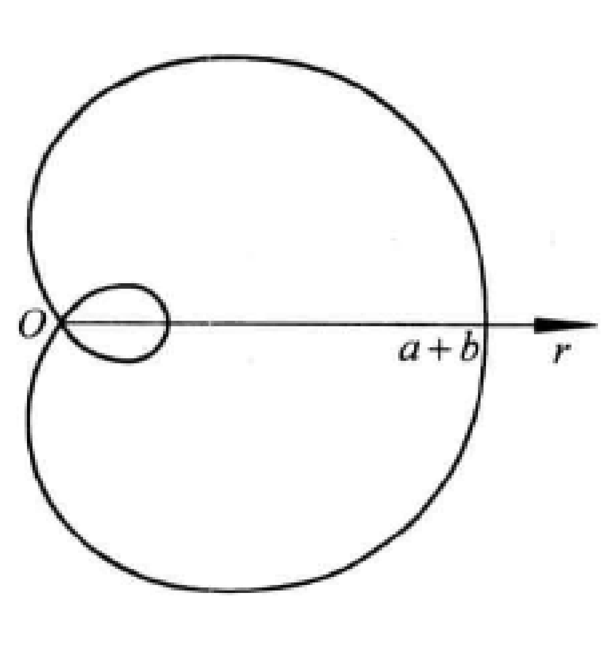


图 1546

作出下列用极坐标$(\varphi,r)$$(r\geqslant 0)$表示的函数的图像：

【1546】 $r=a+b\cos\varphi\ (0<a\leqslant b)$.

解 当 $a=b$ 时，$r=a(1+\cos\varphi)$，这就是心脏线，图略.

当 $0<a<b$ 时，其几何轨迹叫做蚶线，由于 $r(-\varphi)=r(\varphi)$，故图像关于极轴对称.

由于当 $r\geqslant 0$ 时，$|\varphi|\leqslant\alpha=\arccos\left(-\frac{a}{b}\right)$，故当 $\varphi=0$ 时 r 有极大值 $r=a+b$；当 $\varphi=\pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r=0$. 又由于 $r'=-b\sin\varphi<0$，故当 φ 由 0 变到 α 时，r 由$a+b$变到 0.

当 $r<0$ 时，$\alpha<|\varphi|\leqslant\pi$，仿照上述讨论，$r$ 由 0 下降到 $a-b$.

极点 O 为二重点，如图 1546 所示. 如果不考虑 $r<0$，则极点 O 不是二重点.

作出下列曲线族的图像(a 表参变量)：

【1554】 $y=\frac{x}{2}+\mathrm{e}^{-ax}$.

解 原方程可变形为 $y-\frac{x}{2}=\mathrm{e}^{-ax}$. 因此，若作仿射变换 $\begin{cases}\xi_1=-\frac{x}{2}+y,\\ \xi_2=x,\end{cases}$ 则原方程化成标准形式

$\xi_1=\mathrm{e}^{-a\xi_2}$

当 $a\neq 0$ 时，表示一指数曲线族；当 $a=0$ 时，表示直线 $y=1+\frac{x}{2}$. 全族曲线均通过点(0,1).

$y'=\frac{1}{2}-a\mathrm{e}^{-ax}$. 令 $y'=0$ 得 $x=\frac{1}{a}\ln 2a$.

$y''=a^2\mathrm{e}^{-ax}>0$，故曲线呈凹状. 若 $a>0$，则当 $x=\frac{1}{a}\ln 2a$ 时有极小值 $y=\frac{1}{2a}(1+\ln 2a)$；

若 $a\leqslant 0$，则因 $y'>0$，故函数 y 是递增的.

现求渐近线：当 $a>0$ 时，

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x\mathrm{e}^{ax}}\right)=\frac{1}{2},$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=0,$$

故渐近线为 $y=\frac{x}{2}$.

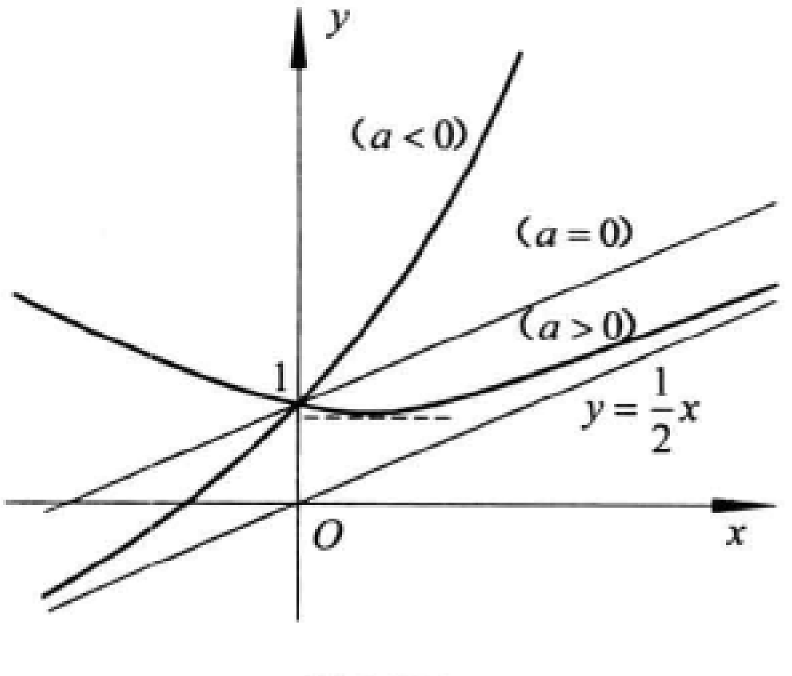


图 1554

同法求得当 $a<0$ 时，渐近线也为 $y=\frac{x}{2}$，然此时应考虑 $x\to-\infty$. 如图 1554 所示.

§13. 函数的极大值与极小值问题

【1563】 要使容积为给定值 V 的圆柱形闭合容器有最小的表面积，其尺寸如何？

解 设容器的底半径为 x，则高为 $H=\frac{V}{\pi x^2}$，故圆柱体的表面积为

$$S(x)=2\pi x\cdot\frac{V}{\pi x^2}+2\pi x^2.$$

由于

$$S'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2},$$

令 $S'(x)=0$ 得 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)>0$ 知，当 $x=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时，$S(x)$ 有极小值

$$S\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)=\sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值，故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$，而高为 $\frac{V}{\pi x^2}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小表面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

【1569】 在半径为 R 的球内作出具有最大体积的内接圆柱体.

提示 设圆柱体的底半径为 r，高为 $2h$，则有 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 由题设，我们只要考虑函数 $f(r)=2\pi r^2h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$ 何时最大.

解 设圆柱体的底半径为 r，高为 $2h$，则有

$$r^2+h^2=R^2,$$

即 $h=\sqrt{R^2-r^2}$. 按题设，我们只要考虑函数

$$f(r)=2\pi r^2 h=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$$

何时取最大值.

$f'(r)=\dfrac{2\pi r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}R$,此时 $h=\dfrac{R}{\sqrt{3}}$,且

$$f(r)=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}R\right)=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

经判别可知,此值即为圆柱体体积的最大值.

【1572】 求母线为给定值 l 的圆锥体之最大体积.

解 设圆锥体的底半径为 r,高为 h,则 $h=\sqrt{l^2-r^2}$,圆锥体的体积为 $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h=\dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}$. 按题设,只要求函数

$$f(r)=r^4(l^2-r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r)=4l^2r^3-6r^5$,令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\dfrac{2}{3}}l$,此时 $h=\dfrac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知,$f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,l\right)$ 最大,因此,所求的圆锥体的底半径为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,l$,高为 $\dfrac{l}{\sqrt{3}}$,体积最大值为 $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,l\right)=\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}\,l^3$.

【1578】 直径相同的圆柱体与半球体拼接在一起构成一物体,其体积为给定值 V. 要使此物体具有最小的表面积,其尺寸如何?

解 设 r 为圆柱体的底半径,h 为其高,则按题设,我们有

$$V=\frac{2}{3}\pi r^3+\pi r^2 h \quad 或 \quad h=\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r,$$

故知其表面积为

$$S(x)=3\pi r^2+2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}-\frac{2}{3}r\right)=\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

$$S'(r)=\frac{10}{3}\pi r-\frac{2V}{r^2},$$

令 $S'(r)=0$,得 $r=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$,此时 $h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$. 经判别可知,$S\left(\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}\right)$ 为最小值. 因此,当 $r=h=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{5\pi}}$ 时表面积最小.

【1579】 若明渠的横截面为等腰梯形,渠中流水的横截面面积为 S,水面的高为 h,问水渠侧边的倾角 φ 如何,才使其横截面边界被水浸湿的部分具有最小的长度?

解 浸湿长 $l=a+2h\csc\varphi$,其中 a 为底边长,而截面面积为

$$S=\frac{1}{2}(2a+2h\cot\varphi)h=ah+h^2\cot\varphi.$$

于是,被水浸湿部分的长度为 $\qquad l=2h\csc\varphi+\dfrac{S}{h}-h\cot\varphi.$

由 $\dfrac{dl}{d\varphi}=-\dfrac{2h\cos\varphi}{\sin^2\varphi}+\dfrac{h}{\sin^2\varphi}=0$,得 $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$,$\varphi=60°$. 因为

$$\left.\frac{d^2 l}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=60°}=\left.\frac{2h\sin^3\varphi-h\sin2\varphi(1-2\cos\varphi)}{\sin^4\varphi}\right|_{\varphi=60°}>0,$$

所以,当 $\varphi=60°$ 时,横截面被水浸湿的部分具有最小的长度.

【1586】 设圆桌面的半径为 a,应当在正对桌面中央多高的地方安置电灯,才可使桌面边缘的照度为最大?

解 如图 1586 所示. 由物理学知, 照度 I 为

$$I=I_0\frac{\sin\varphi}{r^2}=I_0\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}\quad (I_0 \text{ 为光源的发光强度, 它是常数}).$$

考虑函数 $f(r)=\frac{r^2-a^2}{r^6}=\frac{1}{r^4}-\frac{a^2}{r^6}$ 何时最大,

$$f'(r)=-\frac{4}{r^5}+\frac{6a^2}{r^7}=\frac{6a^2-4r^2}{r^7},$$

令 $f'(r)=0$ 得 $r=\sqrt{\frac{3}{2}}a$. 经判别可知, $f\left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ 最大. 因此, 我们应在高 $h=\sqrt{\frac{3}{2}a^2-a^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ 的地方安置电灯, 才可使桌面边缘上的照度为最大.

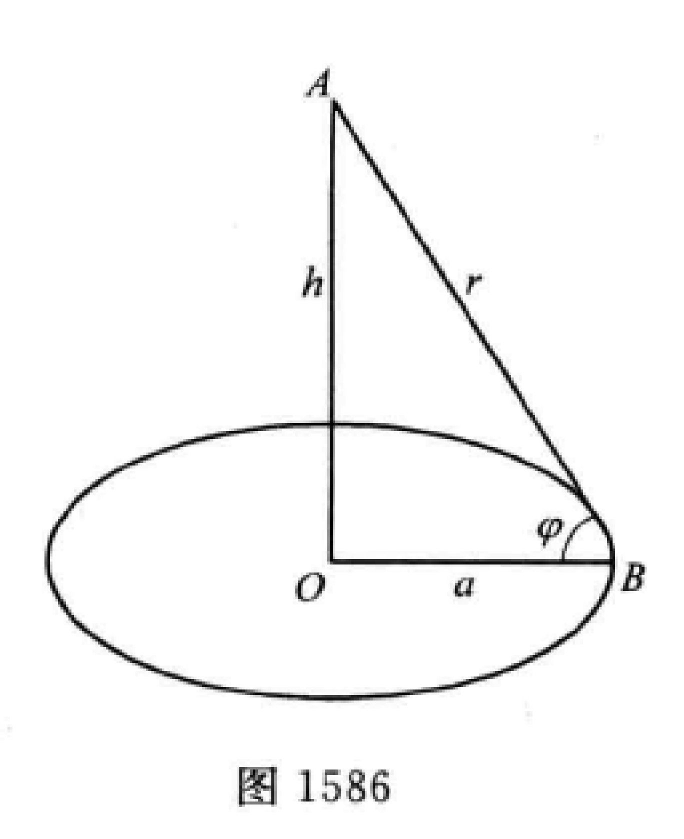


图 1586

【1587】 向宽为 a 的河修建一宽为 b 的运河, 二者成直角相交, 问能驶进这运河的船, 其最大的长度如何?

解 如图 1587 所示. BC 的长度为

$$l=a\csc\varphi+b\sec\varphi.\quad l'=\frac{b\sin^3\varphi-a\cos^3\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2\varphi},$$

令 $l'=0$ 得 $\tan\varphi_0=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ 或 $\cot\varphi_0=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$, 从而有

$$\csc\varphi_0=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\quad \sec\varphi_0=\frac{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}}}.$$

$$l''\Big|_{\varphi=\varphi_0}=3\left(\frac{b}{\cos\varphi_0}+\frac{a}{\sin\varphi_0}\right)>0,$$

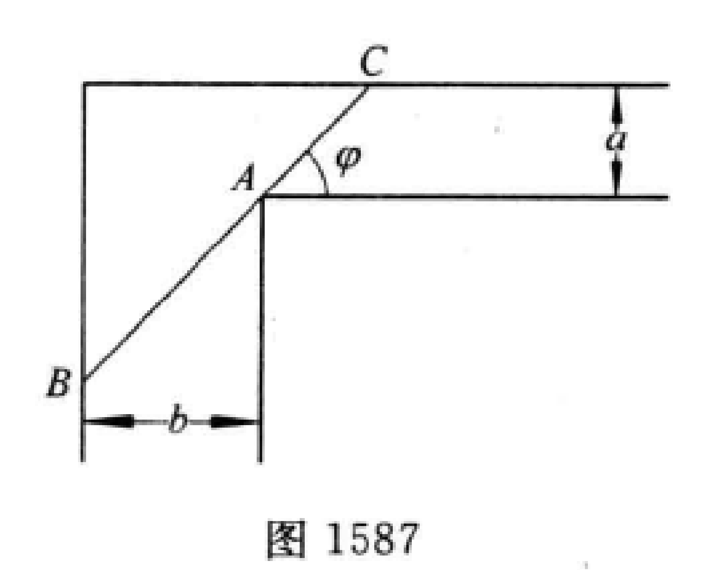


图 1587

因此, $l\Big|_{\varphi=\varphi_0}$ 为最小值, 即船的最大长度为 $l\Big|_{\varphi=\varphi_0}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

【1590】 有一茶杯, 其形状为半径为 a 的半球, 在茶杯中放一长为 $l>2a$ 的杆, 求杆的平衡位置.

解 取球心为坐标原点. 当 $2a<l\leqslant 4a$ 时, 设杆的质心的纵坐标为 y, 杆对杯口所在平面的倾角为 φ, 则

$$y=-\left(2a\cos\varphi-\frac{l}{2}\right)\sin\varphi\quad \left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right).$$

当杆平衡时, y 最小, 为此, 求 y 的极值. 由 $y'_\varphi=-4a\cos^2\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi+2a=0$ 得

$$\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}\quad (\text{负值不合适, 舍去}).$$

经判别可知, 此时 y 取最小值, 即当 $\cos\varphi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$ 时, 棒取平衡位置.

当 $l>4a$ 时, 杆的质心必在半球心外, 于是, 此时杆失去平衡, 无平衡位置.

§14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线

1° **n 阶相切** 对于两曲线 $y=\varphi(x)$ 及 $y=\psi(x)$, 若在点 x_0 有

$$\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)\quad (k=0,1,2,\cdots,n)$$

且
$$\varphi^{(n+1)}(x_0)\neq\psi^{(n+1)}(x_0),$$

便说这两曲线在此点 n 阶相切(在严格的意义上讲!), 当 $x\to x_0$ 时有:

$$\varphi(x)-\psi(x)=O^*((x-x_0)^{n+1}).$$

2° **曲率圆** 若圆周

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=R^2,$$

与已知曲线 $y=f(x)$ 二阶或更高阶相切，则称此圆为在相应点的曲率圆．这个圆的半径

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

称为曲率半径，而量 $k=\frac{1}{R}$ 称为曲率．

3° **渐屈线** 曲率圆中心 (ξ,η)（曲率中心）

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}$$

的轨迹称为已知曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线．

【1592】 应当怎样选择参数 a,b 和 c，才能使抛物线

$$y=ax^2+bx+c$$

在点 $x=x_0$ 与曲线 $y=e^x$ 二阶相切？

提示 由两曲线在点 $x=x_0$ 处 n 阶相切的定义，应有 $ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0}$，$2ax_0+b=e^{x_0}$ 及 $2a=e^{x_0}$．

解 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，在点 $x=x_0$ 有

$$y'\Big|_{x=x_0}=2ax_0+b,\quad y''\Big|_{x=x_0}=2a,\quad y'''=0.$$

按假设，应有

$$\begin{cases}ax_0^2+bx_0+c=e^{x_0},\\ 2ax_0+b=e^{x_0},\\ 2a=e^{x_0},\end{cases}$$

解之，得

$$a=\frac{1}{2}e^{x_0},\quad b=e^{x_0}(1-x_0),\quad c=e^{x_0}\left(1-x_0+\frac{x_0^2}{2}\right).$$

求下列曲线的曲率半径：

【1599】 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$．

解 由于 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$y''=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$，于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\right|}=\left|\frac{\frac{a}{x}}{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}}\right|=3|axy|^{\frac{1}{3}}.$$

【1603】 证明：二次曲线 $y^2=2px-qx^2$ 的曲率半径与法线段的立方成正比．

证明思路 注意到曲率半径为 $R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$，法线段为 $l=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$，即知 $\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$．可以证明 $y^3y''=-p^2$．

证 曲线的曲率半径公式为

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|},$$

而法线段公式为

$$l=\left|y\sqrt{1+y'^2}\right|,$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{|y^3y''|}$. 下面求 y^3y''：

因为 $y^2=2px-qx^2$，故在等式两端分别对 x 求两次导数，即得

$$2yy'=2p-2qx \quad 或 \quad yy'=p-qx, \tag{1}$$

$$yy''+y'^2=-q. \tag{2}$$

以 y^2 乘(2)式两端，并以(1)式及原二次曲线的表达式代入左右端，即得

$$y^3y''+(p-qx)^2=-q(2px-qx^2);$$

化简之，最后得

$$y^3y''=-p^2.$$

因此，$\frac{R}{l^3}=\frac{1}{p^2}$ 为一常数. 证毕.

【1604】 写出以极坐标表示的曲线的曲率半径公式.

提示 由 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，其中 $r=r(\varphi)$，求出$\frac{dy}{dx}$及$\frac{d^2y}{dx^2}$后，易得

$$R=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|},$$

其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi}$, $r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$.

解 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\varphi)$，则由

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$$

可求得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2+2r'r'-rr''}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3},$$

其中 $r'=\frac{dr}{d\varphi}$, $r''=\frac{d^2r}{d\varphi^2}$. 于是，曲率半径为

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2+2r'^2-rr''|}.$$

求下列极坐标方程所表示的曲线的曲率半径：

【1608】 双纽线 $r^2=a^2\cos2\varphi$.

提示 利用 1604 题的结果.

解 $r'=-\frac{a^2\sin2\varphi}{r}$, $\quad r''=-\frac{r^4+a^4}{r^3}$,

$$r^2+2r'^2-rr''=\frac{3a^4}{r^2}, \quad (r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{a^6}{r^3}.$$

于是，曲率半径为

$$R=\frac{\frac{a^6}{r^3}}{\frac{3a^4}{r^2}}=\frac{a^2}{3r}.$$

求下列各曲线的渐屈线方程：

【1611】 抛物线 $y^2=2px$.

解 由于 $y'=\frac{p}{y}$, $y''=-\frac{p^2}{y^3}$，故曲率中心坐标为

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x+\frac{\frac{p}{y}\left(1+\frac{p^2}{y^2}\right)}{\frac{p^2}{y^3}}=x+\frac{y^2+p^2}{p}=x+\frac{2px+p^2}{p}=3x+p,$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y-\frac{1+\frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}}=-\frac{y^3}{p^2},$$

即

$$x=\frac{\xi-p}{3},\quad y^3=-p^2\eta. \tag{1}$$

由于 $y^6=8p^3x^3$，故将(1)式代入后，消去 x 及 y，即得渐屈线方程为

$$27p\eta^2=8(\xi-p)^3.$$

【1616】 证明：摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

的渐屈线仍为一摆线，仅其位置与已知摆线不同而已.

证 由于

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cot\frac{t}{2},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

于是，

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=a(t-\sin t)+\frac{\cot\frac{t}{2}\cdot\left(1+\cot^2\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}}=a(t+\sin t),$$

$$\eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}=a(\cos t-1).$$

令 $t-\pi=\tau$，即得

$$\xi=\pi a+a(\tau-\sin\tau),\quad \eta=-2a+a(1-\cos\tau),$$

此仍为摆线，显然，只是位置与原摆线不同而已.

§15. 方程的近似解法

1° **比例法(弦线法)** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且

$$f(a)f(b)<0,$$

而当 $a<x<b$ 时，$f'(x)\neq0$，则方程

$$f(x)=0 \tag{1}$$

在区间 (a,b) 内有而且仅有一个实根 ξ. 可取下面的值作为此根的第一个近似值：

$$x_1=a+\delta_1$$

式中 $\delta_1=-\dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a)$.

进而，对区间 (a,x_1) 和 (x_1,b) 中使函数 $f(x)$ 在其两端异号的那一个区间运用此方法，得到根 ξ 的第二个近似值 x_2，并不断重复此过程. 对于第 n 个近似值 x_n，有以下估计：

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

其中 $m=\inf\limits_{a<x<b}|f'(x)|$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$.

2° **牛顿法(切线法)** 若在闭区间$[a,b]$内 $f''(x)\neq 0$，且 $f(a)f''(a)>0$，则可取数值

$$\xi_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

作为方程(1)的根 ξ 的第一个近似值 ξ_1.

重复利用这个方法，很快就得到趋近于根 ξ 的一系列近似值 $\xi_n(n=1,2,\cdots)$，这些近似值的精度可根据公式(2)来估计.

为了大致确定方程的根，最好作出函数 $y=f(x)$的图像.

利用比例法，求下列方程的根(精确到 0.001)：

【1618】 $x^4-x-1=0$.

解 设 $f(x)=x^4-x-1$. 由于 $f(1)=-1$，$f(2)=13$，且当 $1<x<2$ 时，$f'(x)\neq 0$，故所给方程在(1,2)内有且仅有一实根 ξ_1，利用比例法，依次求得该根的第 i 个近似值 x_i 为：

$x_1=1.07$； $x_2=1.12$； $x_3=1.156$； $x_4=1.180$； $x_5=1.196$； $x_6=1.205$； $x_7=1.217$； $x_8=1.220$； $x_9=1.221$.

由于 $f(1.221)=0.002$，$m_1=\inf\limits_{1<x<2}|f'(x)|=3$，因此，如果取 1.221 作为 ξ_1 的第九个近似值，则其误差为

$$|1.221-\xi_1|\leqslant\frac{|f(1.221)|}{m_1}<0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的一近似根为 1.221.

又因 $f(-1)=1$，$f(-0.5)=-0.4375$，且当$-1<x<-0.5$时，$f'(x)\neq 0$，故所给方程在$(-1,-0.5)$内有且仅有一实根 ξ_2，依次求得第 i 个近似值 x_i 为：

$x_1=-0.652$； $x_2=-0.789$； $x_3=-0.706$； $x_4=-0.719$； $x_5=-0.723$； $x_6=-0.724$.

由于 $f(-0.724)=-0.001$，$m_2=\inf\limits_{-1<x<-0.5}|f'(x)|=1$，因此，如果取$-0.724$ 作为 ξ_2 的第六个近似值，则其误差为

$$|-0.724-\xi_2|\leqslant\frac{|f(-0.724)|}{m_2}=0.001,$$

已达到所需的精确度. 于是，所给方程的另一近似根为-0.724.

由于 $f'(x)=4x^3-1=0$ 只有一实根，且 $f''(x)=12x^2>0(x\neq 0)$，故所给方程仅有二实根，其余二根为一对共轭复根.

利用牛顿法，求下列方程的根(精确到所指定的精度)：

【1622】 $x\lg x=1$ (精确到 10^{-4}).

解 曲线 $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{x}$只有一个交点. 因此，所给方程只有一个实根. 现确定其范围. 设 $f(x)=x\lg x-1$，由于 $f(2.506)=-0.0004$，$f(2.507)=0.0005$，且当 $2.506<x<2.507$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，故在(2.506,2.507)内有且仅有一实根，切点选在$(2.507,f(2.507))$. 依次求得其第 i 个近似值 x_i 为：

$$x_1=2.5064;\quad x_2=2.5062.$$

由于

$$f(2.5062)=0.00002,\quad m=\inf_{2.506<x<2.507}|f'(x)|=|f'(2.506)|=0.84,$$

因此，如果取 2.5062 作为根的近似值时，则其误差为

$$|2.5062-\xi|\leqslant\frac{|f(2.5062)|}{m}<0.0001,$$

已达到所需的精确度，故所求的唯一近似根为 2.5062.

【1627】 求方程 $\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$的二正根(精确到 10^{-3}).

解 由 $y=\cot x$ 与 $y=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$ 的图像知交点有无穷个，我们只求其最小二正根 ξ_1 及 ξ_2：

$$\frac{\pi}{2}<\xi_1<\pi,\quad \frac{3\pi}{2}<\xi_2<2\pi.$$

(1) 先求 ξ_1.

设 $f(x)=\cot x-\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$，则在所考虑的区间内

$$f'(x)=-\cot^2 x-\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2}<0,\quad f''(x)=\frac{2\cos x}{\sin^3 x}-\frac{2}{x^3}<0.$$

又因 $f(2.0708)=0.0062$，$f(2.1708)=-0.0593$，故切点应选在 $(2.1708, f(2.1708))$ 处. 用比例法与牛顿法联合求 ξ_1. 重复应用，即得

$$x_1'=2.0803,\quad x_1=2.0923,$$

故 $2.0803<\xi_1<2.0923$.

$$x_2'=2.0815,\quad x_2=2.0816,$$

故取 2.081 作为 ξ_1 的近似值，即可保证所需的精确度. 于是，所给方程的一正根的近似值为 2.081.

(2) 再求 ξ_2.

由于 $f(5.9324)=0.0648$，$f(5.9424)=-0.0169$，故

$$5.9324<\xi_2<5.9424,$$

切点取 $(5.9424, f(5.9424))$.

用比例法及牛顿法各一次，即得

$$x_1'=5.9403,\quad x_1=5.9404,$$

因此，取 5.940 作为 ξ_2 的近似值，即可保证所需的精确度. 于是，所给方程的又一正根的近似值为 5.940.

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1° **不定积分的概念**　若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义且连续，$F(x)$ 是它的原函数，即当 $a<x<b$ 时 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,\quad a<x<b,$$

式中 C 为任意常数.

2° **不定积分的基本性质：**

(1) $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=f(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\int \mathrm{d}\Phi(x)=\Phi(x)+C$；

(3) $\int Af(x)\mathrm{d}x=A\int f(x)\mathrm{d}x$　（A 为常数，$A\neq 0$）；

(4) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$.

3° **最简积分表：**

Ⅰ. $\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad (n\neq -1)$；

Ⅱ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C\quad (x\neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\begin{cases}\arctan x+C,\\ -\mathrm{arccot}\, x+C;\end{cases}$

Ⅳ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$；

Ⅴ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

Ⅵ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm 1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm 1}\right|+C$；

Ⅶ. $\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0,a\neq 1)$；$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$；

Ⅷ. $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$；

Ⅸ. $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$；

Ⅹ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\cot x+C$；

ⅩⅠ $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\tan x+C$；.

ⅩⅡ. $\int \mathrm{sh}x\mathrm{d}x=\mathrm{ch}x+C$；

ⅩⅢ. $\int \mathrm{ch}x\mathrm{d}x=\mathrm{sh}x+C$；

ⅩⅣ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{coth}x+C$；

ⅩⅤ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th}x+C$.

4° **积分的基本方法**

(1) 引入新变量法　若

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C,$$

则

$$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C,$$ 式中 $u=\varphi(x)$ 是连续可微函数.

(2) 分项积分法　若

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f_1(x)\mathrm{d}x+\int f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 代入法　若 $f(x)$ 连续，令　$x=\varphi(t)$，式中 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆连续，

则得

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

(4) 分部积分法　若 u 和 v 为 x 的可微函数，则　$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

利用最简积分表,求下列积分*:

【1636】 $\int\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$

提示 注意 $\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^{2}+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

【1638】 $\int\frac{\sqrt{x^{4}+x^{-4}+2}}{x^{3}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^{4}+x^{-4}+2}}{x^{3}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^{2}+\frac{1}{x^{2}}}{x^{3}}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{5}}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{4x^{4}}+C.$

【1646】 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{x}+1}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}+x+C.$

【1670】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}.$

提示 注意 $\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$,并利用1668题的结果:$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}+C.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$

用适当地变换被积函数的方法求下列积分:

【1679】 $\int\frac{x^{3}\mathrm{d}x}{x^{8}-2}.$

解 $\int\frac{x^{3}\mathrm{d}x}{x^{8}-2}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^{4})}{(x^{4})^{2}-(\sqrt{2})^{2}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^{4}-\sqrt{2}}{x^{4}+\sqrt{2}}\right|+C.$

【1683】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2}-1}}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\cdot\sqrt{x^{2}-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^{2}}}}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^{2}}}=-\arcsin\frac{1}{|x|}+C.$

【1687】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}.$

提示 分别就 $x>0$ 及 $x<-1$ 时求解,然后将这两个结果合并,其结果为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

解 由 $x(1+x)>0$ 知:$x>0$ 或 $x<-1$. 当 $x>0$ 时,

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中,凡出现的函数,无论是被积函数还是原函数,均默认是在有意义的定义域上进行的.例如,最简积分表Ⅰ中当 $n\leqslant-2$ 时,要求 $x\neq0$;Ⅳ中要求 $|x|\neq1$;Ⅴ中要求 $|x|<1$;以及Ⅵ中,当取负号时要求 $|x|>1$;等等,就未加声明.在题解中也有相当多的类似情况.因此,如无特别声明,在一般情况下,这些定义域是很容易被读者确定的,此处就不再予以一一指明.

《题解》作者注

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C;$$

当 $x<-1$ 时， $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int\frac{d(-(1+x))}{\sqrt{(-x)(-(1+x))}}=-2\int\frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$

$$=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

【1702】 $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

提示 注意$\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\tan^2 x+2}=\frac{d(\tan x)}{(\sqrt{2})^2+(\tan x)^2}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x+2}dx=\int\frac{d(\tan x)}{\tan^2 x+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【1707】 $\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx$.

提示 注意 $\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=\frac{1}{2}(1+\operatorname{ch}^2 2x)$.

解 因为 $\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x=(\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{ch}^2 x)^2-2\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}^2 x=\operatorname{ch}^2 2x-\frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x=\frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2}$,

所以， $\int\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx=\int\frac{\frac{1}{4}d(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C_1$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right)+C.$$

【1712】 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

提示 注意$\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$.

解 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$

【1713】 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

提示 注意$\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$.

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+C.$

【1720】 $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$

用分项积分法计算下列积分：

【1727】 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x.$

提示 注意 $x^2=[(x-1)+1]^2$.

解 $\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}\mathrm{d}x=\int[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C.$$

【1732】 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}\int[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}]\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

【1740】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\quad(|a|\neq|b|).$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\arctan\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right)+C.$

【1749】 $\int\sin^4x\mathrm{d}x.$

提示 注意 $\sin^4x=\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-2\cos2x+\frac{1+\cos4x}{2}\right)=\frac{1}{8}(3-4\cos2x+\cos4x).$

解 $\int\sin^4x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1-\cos2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos2x+\frac{1+\cos4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos2x+\cos4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C.$$

【1750】 $\int\cos^4x\mathrm{d}x.$

解 $\int\cos^4x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos2x+\frac{1+\cos4x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{8}\int(3+4\cos2x+\cos4x)\mathrm{d}x=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin2x+\frac{1}{32}\sin4x+C.$$

【1758】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4x}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^4x}=\int\sec^2x\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=\int(1+\tan^2x)\mathrm{d}(\tan x)=\tan x+\frac{1}{3}\tan^3x+C.$

【1765】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x}.$

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2x\mathrm{ch}^2x}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}-\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}\right)\mathrm{d}x=-(\coth x+\mathrm{th}x)+C.$

用适当的代换，求下列积分：

【1770】 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}\mathrm{d}x.$

解 设 $2-5x^3=t$，则 $x^3=\frac{1}{5}(2-t)$，从而，

$$x^5\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\mathrm{d}(x^3)=-\frac{1}{75}(2-t)\mathrm{d}t,$$

故得 $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx=-\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)dt=-\frac{1}{75}\int(2t^{\frac{2}{3}}-t^{\frac{5}{3}})dt=-\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}}+C$

$=-\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}}+C.$

【1771】$^+$ $\int\cos^5x\sqrt{\sin x}\,dx.$

解 设 $\sin x=t$，则 $\cos^5x\,dx=(1-\sin^2x)^2d(\sin x)=(1-t^2)^2dt$，

故得 $\int\cos^5x\sqrt{\sin x}\,dx=\int(1-t^2)^2t^{\frac{1}{2}}dt=\int(t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}})dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C$

$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2x+\frac{2}{11}\sin^4x\right)\sqrt{\sin^3x}+C.$

【1773】 $\int\frac{\sin^2x}{\cos^6x}dx.$

提示 令 $\tan x=t$.

解 设 $\tan x=t$，则$\frac{1}{\cos^4x}dx=(1+t^2)dt$，

故得 $\int\frac{\sin^2x}{\cos^6x}dx=\int(t^4+t^2)dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{5}\tan^5x+\frac{1}{3}\tan^3x+C.$

【1776】 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

解 设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，

故得 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C=x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C.$

运用三角函数的代换 $x=a\sin t$，$x=a\tan t$，$x=a\sin^2t$ 等，求下列积分(参数为正的)：

【1779】 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}.$

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x>\sqrt{2}$ 及 $x<-\sqrt{2}$.

(1) 当 $x>\sqrt{2}$ 时，可设 $x=\sqrt{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$.

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$ 时，仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$.

解 被积函数的存在域为 $x>\sqrt{2}$ 及 $x<-\sqrt{2}$，分别考虑.

(1) 当 $x>\sqrt{2}$时，可设 $x=\sqrt{2}\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$. 从而，

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2t}{\sqrt{2}\tan t},\qquad dx=\sqrt{2}\sec t\tan t\,dt.$$

代入得 $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}=2\int\sec^3t\,dt=2\int\frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2t)^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2d(\sin t)$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$

$=\tan t\sec t+\ln(\sec t+\tan t)+C_1=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$

(2) 当 $x<-\sqrt{2}$时，仍设 $x=\sqrt{2}\sec t$，但限制 $\pi<t<\frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同，注意到，此时 $\sec t+\tan t<0$，因此，在对数符号里要加绝对值，即结果为 $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$

总之，当$|x|>\sqrt{2}$时，

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

【1781】 $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此，可设$x=a\tan t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.从而，

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t,\quad dx=a\sec^2 t dt.$$

代入得 $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int \cos t dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

【1782】 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$.

解题思路 注意被积函数的存在域为$-a\leqslant x<a$.设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.求出结果的存在域为$-a<x<a$.可以证明：此结果在端点$x=-a$处也成立.即原函数在点$x=-a$的(右)导数等于被积函数在点$x=-a$之值.

解 被积函数的存在域为$-a\leqslant x<a$，因此，可设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.从而，

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得 $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a<x<a)$.

注意，上式在端点$x=-a$也成立.即函数$F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$在点$x=-a$的(右)导数等于被积函数$f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$在点$x=-a$之值.事实上，由于$F(x)$和$f(x)$都在$-a\leqslant x<a$连续，且$F'(x)=f(x)$在$-a<x<a$成立.故由中值定理知，当$-a<x<a$时，有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),\quad -a<\xi<x.$$

由此可知，(右)导数 $$F'(-a)=\lim_{x\to -a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=\lim_{\xi\to -a+0}f(\xi)=f(-a).$$

用双曲函数代换$x=a\,\mathrm{sh}t$，$x=a\,\mathrm{ch}t$等，求下列积分(参数为正的)：

【1786】 $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$.

提示 设$x=a\,\mathrm{sh}t$，并利用1762题的结果：$\int \mathrm{ch}^2 x dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2x+C$.

解 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此，可设$x=a\,\mathrm{sh}t$.从而，

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\,\mathrm{ch}t,\quad dx=a\,\mathrm{ch}t dt.$$

代入得 $$\int \sqrt{a^2+x^2}dx=a^2\int \mathrm{ch}^2 t dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}2t\right)+C_1.$$

注意到$x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=ae^t$，即$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$及$\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$，最后得

$$\int \sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

【1788】[+] $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$.

解题思路 注意被积函数的存在域为 $x \geqslant a$ 及 $x < -a$.

(1)当 $x > a$ 时,设 $x = a\mathrm{ch}t$,并限制 $t > 0$. (2)当 $x < -a$ 时,设 $x = -a\mathrm{ch}t$,并限制 $t > 0$.

解 被积函数的存在域为 $x \geqslant a$ 及 $x < -a$.

(1) 当 $x > a$ 时,可设 $x = a\mathrm{ch}t$,并限制 $t > 0$. 从而,

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\mathrm{ch}t - 1}{\mathrm{sh}t}, \quad \mathrm{d}x = a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t.$$

代入得
$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x = a\int(\mathrm{ch}t-1)\mathrm{d}t = a\mathrm{sh}t - at + C_1 = a\sqrt{\mathrm{ch}^2 t - 1} - at + C_1$$
$$= a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a}\right) + C_1 = \sqrt{x^2 - a^2} - a\ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2$$
$$= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + C.$$

(2) 当 $x < -a$ 时,可设 $x = -a\mathrm{ch}t$,并限制 $t > 0$. 从而,$\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}} = \dfrac{\mathrm{ch}t + 1}{\mathrm{sh}t}$, $\mathrm{d}x = -a\mathrm{sh}t\mathrm{d}t$.

代入得
$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x = -a\int(\mathrm{ch}t+1)\mathrm{d}t = -a\mathrm{sh}t - at + C_1$$
$$= -a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - \frac{x}{a}\right) + C_1 = -\sqrt{x^2 - a^2} - a\ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + C_2$$
$$= -\sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln(\sqrt{-x+a} + \sqrt{-x-a}) + C.$$

总之,当 $|x| > a$ 时,

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x = \mathrm{sgn}x\sqrt{x^2 - a^2} - 2a\ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + C.$$

用分部积分法,求下列积分:

【1793】 $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = -\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x + \int \frac{1}{x}2\ln x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\displaystyle = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x + 2\int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$

【1810】 $\displaystyle\int \sin x\ln(\tan x)\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int \sin x\ln(\tan x)\mathrm{d}x = -\int \ln(\tan x)\mathrm{d}(\cos x) = -\cos x\ln(\tan x) + \int \cos x\cot x\sec^2 x\mathrm{d}x$

$\displaystyle = -\cos x\ln(\tan x) + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\cos x\ln(\tan x) + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

【1815】 $\displaystyle\int \frac{x\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle\int \frac{x\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$\displaystyle = \sqrt{1+x^2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \sqrt{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \sqrt{1+x^2}\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C.$

【1820】 $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2 + x^2}\mathrm{d}x$.

解题思路 首先,有 $x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2+x^2) = \dfrac{1}{3}x\mathrm{d}\left[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]$,使用分部积分

法. 其次, 将积分 $\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$ 分成 $a^2\int (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 与 $\int x^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$ 两项, 并利用 1786 题的结果.

解 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2+x^2)=\frac{1}{3}\int x\mathrm{d}[(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}]$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

于是, 得 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x\right]$

$$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

*) 利用 1786 题的结果.

【1824】 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 记 $I_1=\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,\ I_2=\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

则
$$\begin{cases}I_1=\int e^{\arctan x}\mathrm{d}(-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}})=-\frac{e^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}+I_2, & ①\\ I_1=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(e^{\arctan x})=\frac{xe^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}-I_2. & ②\end{cases}$$

由①+②即得 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$

【1825】 $\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$

解 同 1824 题②－①, 即得 $\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}+C.$

【1829】 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x.$

解 若 $a=b=0$, 则积分为 $x+C$; 若 $a=0,b\neq0$, 则积分为 $-\frac{1}{b}\cos bx+C$; 以下设 $a\neq0$.

$$\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int\sin bx\mathrm{d}(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int\cos bx\mathrm{d}(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x.$$

于是, 得 $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$

【1833】 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

提示 $\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}(\cot x)$，使用分部积分法后，并利用 1751 题的结果：$\int\cot^2 x\mathrm{d}x=-\cot x-x+C$.

解 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int\ln(\sin x)\mathrm{d}(\cot x)=-\cot x\ln(\sin x)+\int\cot^2 x\mathrm{d}x$

$=-\cot x\ln(\sin x)+(-\cot x-x)+C=-[x+\cot x\ln(e\sin x)]+C.$

下列积分的求法需要把二次三项式化成标准形式，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\quad(a\neq0)$；

Ⅱ. $\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\quad(a\neq0)$；

Ⅲ. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C$；

Ⅳ. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

Ⅴ. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$；

Ⅵ. $\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$；

Ⅶ. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a>0)$；

Ⅷ. $\int\sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C.$

【1836】$^+$ $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}\quad(ab\neq0).$

解 当 $ab>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2+(\sqrt{|b|}x)^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+C;$$

当 $ab<0$ 时，$\int\frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}=\operatorname{sgn}a\int\frac{\mathrm{d}x}{|a|-|b|x^2}=\operatorname{sgn}a\frac{1}{\sqrt{|b|}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2-(\sqrt{|b|}x)^2}$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+C.$$

【1842】 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}.$

解 $\int\frac{x^3\mathrm{d}x}{x^4-x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2\mathrm{d}(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

【1843】 $\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}.$

提示 如果本题不化成标准形式来做，则可有更简单的做法，只需注意

$$\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3\mathrm{d}(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)\mathrm{d}(x^3),$$

即易获解.

解 $\int\frac{x^5\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3\mathrm{d}(x^3)}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\mathrm{d}\left(x^3-\frac{1}{2}\right)$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\right|+C=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}+C.$$

如果本题不化成标准形式来作，则有更简单的作法. 事实上，

$$\int\frac{x^5\,\mathrm{d}x}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3\,\mathrm{d}(x^3)}{(x^3-2)(x^3+1)}=\frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)\mathrm{d}(x^3)$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|(x^3-2)^2\}+C.$$

【1846】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}}\quad(b\neq0).$

解 当 $b>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}|+C;$$

当 $a>0$ 及 $b<0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C.$$

【1855】 $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)\mathrm{d}(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

【1856】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$

解 当 $x>0$，设 $x=\frac{1}{t}$，$t>0$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C_1=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_2,$$

当 $x<0$，设 $x=-\frac{1}{t}$，$t>0$，显然有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3=-\ln\left|\frac{-x-2-2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C_4,$$

总之，不论 x 为正或为负，均有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+x+1}}=-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C.$$

【1865】 $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$.

提示 注意 $$\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x=\frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x=\frac{\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}.$$

解 $$\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\operatorname{sgn}x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}=\operatorname{sgn}x\ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right)+C_1$$
$$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$$

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

【1866】 $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x$.

解题思路 注意被积函数分解成部分分式$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，经通分后得恒等式 $2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2)$，令 $x=2$ 及 $x=-5$，求得 A、B.

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，通分后应有$2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2)$. 在这恒等式中，

令 $x=2$*)，得 $7=7A$，$A=1$； 令 $x=-5$，得 $-7=-7B$，$B=1$.

于是， $$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x=\ln|(x-2)(x+5)|+C.$$

*) 注意，这是一种习惯的说法. 实际上，不能直接令 $x=2$（因为上述恒等式是当 $x\neq2$，$x\neq-5$ 时得出来的），而应令 $x\to2$ 取极限，得 $7=7A$，以下类似情况都作此理解，不再一一说明.

【1869】 $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x$.

解 $$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

设$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，通分后应有 $5x^2-6x+1\equiv A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)$. 在这恒等式中，

令 $x=0$，得 $1=6A$，$A=\frac{1}{6}$； 令 $x=2$，得 $9=-2B$，$B=-\frac{9}{2}$； 令 $x=3$，得 $28=3C$，$C=\frac{28}{3}$.

于是， $$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]\mathrm{d}x$$
$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

【1872】 $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，通分后应有 $x^2+1\equiv A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2$. 在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $2=-2B$，$B=-1$； 令 $x=1$，得 $2=4C$，$C=\frac{1}{2}$；

比较 x^2 的系数，得 $A+C=1$. 从而，$A=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x-1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

【1876】 $\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x$.

解 设 $\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$，通分后应有

$$x^2+5x+4\equiv(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=1$，$C=-\frac{5}{3}$，$D=0$. 于是，

$$\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1}+\frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\arctan x+C.$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解，而使用其他技巧，也可有更简单的方法. 事实上，

$$\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\mathrm{d}x+5\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+4)(x^2+1)}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\arctan x+\frac{5}{6}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)\mathrm{d}(x^2)=\arctan x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.$$

【1877】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，通分后应有 $1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

【1878】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

提示 本题若用待定系数法，较麻烦一些. 可将被积函数变形为$\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2+1}$后，即易获解.

解 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}$，

于是， $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}=\int\left[\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{x-2}-\int\frac{\mathrm{d}(x-2)}{(x-2)^2+1}$

$$=-\frac{1}{x-2}-\arctan(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法，较麻烦一些，也可获得同样的结果，此处从略.

【1881】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解 设$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后应有 $1\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. 比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

【1883】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

提示 本题若用待定系数法，较麻烦一些. 可将被积函数变形为$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)$后，即易获解.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

本题若用待定系数法，则较麻烦. 从略.

【1884】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$

解题思路 本题若用待定系数法，较麻烦一些. 可将被积函数变形为 $\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+1}-\frac{x^2-1}{x^4+1}\right)$，然后利用 1712 题及 1713 题的结果，并注意 $\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$，即可获得所需的答案.

解 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设 $\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$，经计算可求得$A=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，$D=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)+\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

如应用下列解法，则更简单些.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}^{**)}+C_1,$$

注意到 $\arctan\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$，最后即得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

*) 利用 1712 题的结果.

**) 利用 1713 题的结果.

【1890】 在什么条件下，积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数？

解 设 $\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$，通分后应有

$$ax^2+bx+c\equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & A+D=0, \\ x^3 & -2A+B-D+E=0, \\ x^2 & A-2B+C=a, \\ x^1 & B-2C=b, \\ x^0 & C=c. \end{array}$$

由此，$A=a+2b+3c$，$B=b+2c$，$C=c$，$D=-(a+2b+3c)$，$E=a+b+c$. 当 $A=D=0$，即 $a+2b+3c=0$ 时，积分 $\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ 为有理函数.

利用奥斯特罗格拉茨基方法*，求积分：

【1891】 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3$， $Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$， $Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$.

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1}$，从而，

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^4 & D=0, \end{array}$$

---

* 所谓奥斯特罗格拉茨基方法，是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

中，如果 $P(x)$，$Q(x)$ 已知，且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots.$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是正整数. 在公式(1)的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式，一般可用待定系数法求得. 这种利用公式(1)求积分的方法，就是所谓的奥斯特罗格拉茨基方法. 详细可以参见 Г. M. 菲赫金哥尔茨著(北京大学译)，微积分学教程，第二卷一分册，第 264 目.

——《题解》作者注

$$\begin{array}{c|l} x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A+B-3C-D-E=1, \\ x^0 & -B+C-E=0. \end{array}$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{8}$. 于是，

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}-\frac{1}{8}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

【1892】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

提示 令 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$，并利用 1881 题的结果.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$，$Q_1=Q_2=x^3+1$.

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$，从而，

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^5 & D=0, \\ x^4 & -A+E=0, \\ x^3 & -2B+F=0, \\ x^2 & -3C+D=0, \\ x^1 & 2A+E=0, \\ x^0 & B+F=1. \end{array}$$

由此，$A=0$，$B=\frac{1}{3}$，$C=0$，$D=0$，$E=0$，$F=\frac{2}{3}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1897】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q=(x^4-1)^3$，$Q_1=(x^4-1)^2$，$Q_2=x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_1(x)}{x^4-1}$，其中

$$P(x)=Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H,\qquad P_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1,$$

从而，利用待定系数法，解出 $A=0$，$B=0$，$C=\frac{7}{32}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=-\frac{11}{32}$，$H=0$，$A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$，$D_1=\frac{21}{32}$. 于是，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^2}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\arctan x^{*)}+C.$$

*) 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分：

【1898】 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x.$

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出 A、B、C、D 就可以了. 等式两端求导并通分，得

$$x^2+1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$
$$+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=\frac{1}{6}$，$B=0$，$C=\frac{1}{3}$，$D=0$，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{6}$，$C_1=0$，$D_1=\frac{2}{3}$. 因此，所求积分的代数部分为 $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}$.

利用不同方法，计算下列积分：

【1904】 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}$.

提示 利用 1883 题的结果.

解 $\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^4-1}=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\arctan(x^2)^{*)}+C.$

*) 利用 1883 题的结果.

【1906】 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}$，并利用 1881 题的结果.

解 $\int\frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

*) 利用 1881 题的结果.

【1909】 $\int\frac{x^{11}\mathrm{d}x}{x^8+3x^4+2}$.

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{x^8\mathrm{d}(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]\mathrm{d}(x^4)$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]\mathrm{d}(x^4)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C.$$

【1914】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

提示 两次使用 $1=x^{10}+1-x^{10}$，就可将被积函数变形为 $\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$，从而易获解.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x(x^{10}+1)}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以，$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right]\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+1)}{x^{10}+1}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

【1915】 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^7)}{1+x^7}=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C.$$

【1921】 试导出用于计算积分 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$ $(a\neq 0)$ 的递推公式．利用这个公式计算

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$$

解题思路 首先，注意

$$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta,$$

其中 $t=2ax+b$，$\Delta=4ac-b^2$．这样，原积分就变形为 $2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$.

其次，当 $\Delta\neq 0$ 时，对积分 $\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$ 使用分部积分法，并注意 $t^2=t^2+\Delta-\Delta$，经运算即可得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时，易获解．

解 由于 $4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta$，其中 $t=2ax+b$，$\Delta=4ac-b^2$．于是，

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^n\mathrm{d}x}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当 $\Delta\neq 0$ 时，对于积分 $\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$ 施用分部积分法，即有

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{(t^2+\Delta)-\Delta}{(t^2+\Delta)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}-2n\Delta\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n+1}}.$$

若令 $\bar{I}_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}$，则得 $\bar{I}_n=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\bar{I}_n-2n\Delta\bar{I}_{n+1}$，

或 $\bar{I}_{n+1}=\frac{1}{2n\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_n$，从而，

$$\bar{I}_n=\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}.$$

代入 I_n，即得

$$I_n=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\bar{I}_{n-1}\right\}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\Delta}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当 $\Delta=0$ 时，则有

$$I_n=\int\frac{(4a)^n\mathrm{d}x}{(2ax+b)^{2n}}=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{\mathrm{d}(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}+C.$$

对于 I_3，$\Delta\neq 0$，两次运用上述递推公式，即得

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

§3. 无理函数的积分法

利用化被积函数为有理函数的方法，求下列积分：

【1929】 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$.

提示 令 $\sqrt[6]{x+1}=t$.

解 设 $\sqrt[6]{x+1}=t$，则 $x=t^6-1$，$\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x=6\int \frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}\mathrm{d}t=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\arctan t+C,$$

其中 $t=\sqrt[6]{x+1}$.

【1932】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

提示 令 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$.

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则 $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$，$\mathrm{d}x=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int \mathrm{d}t=-\frac{3}{2}t+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

【1935】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

提示 设 $\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$，并限制 $t>1$.

解 设 $\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$ 并限制 $t>1$，则 $x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2$，$\mathrm{d}x=\frac{t^4-1}{2t^3}\mathrm{d}t$，$\sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t}$，$t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$.

代入得
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.$$

【1936】 证明：若 $p+q=kn$，式中 k 为整数，则积分

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x$$

（式中 R 为有理函数及 p,q,n 为整数）为初等函数.

证 当 $a=b$ 时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k$，则积分显然为初等函数.

当 $a\neq b$ 时，设 $\frac{x-a}{x-b}=y$ $(\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y},\quad \mathrm{d}x=\frac{a-b}{(1-y)^2}\mathrm{d}y,\quad x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得
$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^k\right]\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}.$$

再设 $\sqrt[n]{y}=t$，则 $y=t^n$，$\mathrm{d}y=nt^{n-1}\mathrm{d}t$. 从而，上述积分化为

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]\mathrm{d}x=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n},t^p\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^k\right]\frac{t^n-1}{(1-t^n)^2}\,\mathrm{d}t,$$

因为被积函数为 t 的有理函数，所以，积分是初等函数.

求最简单二次无理式的积分：

【1939】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

提示　令 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$.

解　设 $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=t$，则　$x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，　$\mathrm{d}x=-\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$，$1-x=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$，　$\sqrt{1-x^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

代入得
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}\mathrm{d}t=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

利用公式 $\displaystyle\int\frac{P_n(x)}{y}\mathrm{d}x=Q_{n-1}(x)y+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$，式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数，求下列积分：

【1943】 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

解　设 $\displaystyle\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$，

两边对 x 求导数，得
$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有
$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得
$$\begin{array}{c|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此，$a=-\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{5}{6}$，$c=-\dfrac{19}{6}$，$\lambda=4$. 于是，
$$\begin{aligned}\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x&=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}}\\&=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

【1951】 在什么条件下，积分 $\displaystyle\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$ 是代数函数？

解　设　$\displaystyle\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$，

从而有
$$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)+\left(ax+\frac{b}{2}\right)(Ax+B)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，当 $a\neq0$ 时求得
$$A=\frac{a_1}{2a},\quad B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},\lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是，当 $a\neq0$ 且 $8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$ 时，$\lambda=0$，积分为代数函数；当 $a=0$ 时积分显然为代数函数.

分解有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为最简分式,求积分 $\int \frac{P(x)}{Q(x)y}\mathrm{d}x$,式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

【1957】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x=\sin t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$, $\sqrt{1-x^2}=\cos t$.

代入得
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan t)}{(\sqrt{2}\tan t)^2+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan t)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

【1960】 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int \frac{(x^2+2)\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int \left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$
$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}+\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+I_1.$$

对于 I_1,设 $x=\sqrt{2}\tan t$,并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$,则 $\mathrm{d}x=\sqrt{2}\sec^2 t\mathrm{d}t$, $\sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\sec t$.

代入得
$$I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int \frac{\sec t\mathrm{d}t}{1+2\tan^2 t}=\int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\sin^2 t}=\int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{1+\sin^2 t}=\arctan(\sin t)+C_1$$
$$=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)+C_1=-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

于是,最后得到
$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{x^2+2})-\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

利用欧拉代换

(1) 若 $a>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+z$; (2) 若 $c>0$, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$.

求下列积分:

【1966】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

提示 令 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$.

解 设 $\sqrt{x^2+x+1}=z-x$,则 $x=\frac{z^2-1}{1+2z}$, $\mathrm{d}x=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}\mathrm{d}z$, $\sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}$.

代入得
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int \left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2(2z+1)}+C,$$

其中 $z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

【1967】 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

提示 令 $\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$.

解 设 $\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$,则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},\quad x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},\mathrm{d}x=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z,\quad \sqrt{1-2x-x^2}+1=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}\mathrm{d}z=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]\mathrm{d}z$$
$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\arctan z+C,$$

其中 $z=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

【1969】 $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}\,x}\mathrm{d}x.$

提示 令 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$.

解 设 $\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，则 $x=\dfrac{2-z^2}{z^2-1}$，$\mathrm{d}x=-\dfrac{2z}{(z^2-1)^2}\mathrm{d}z$，$\sqrt{x^2+3x+2}=\dfrac{z}{z^2-1}$.

代入得
$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x=\int\frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}\mathrm{d}z$$
$$=\int\left[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\right]\mathrm{d}z$$
$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C,$$

其中 $z=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

利用不同方法，计算下列积分：

【1975】 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x.$

解 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}\mathrm{d}x=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]\mathrm{d}x$

$$=\int[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}x=\frac{2}{3}[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}]-\frac{2}{5}[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}]+C.$$

【1978】 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}.$

提示 令 $\dfrac{1}{x}=\sqrt{t}$（这里设 $x>0$. 若 $x<0$，则令 $\dfrac{1}{x}=-\sqrt{t}$，最后结果相同）.

解 作代换 $\dfrac{1}{x}=\sqrt{t}$（这里设 $x>0$. 若 $x<0$，则作变换 $\dfrac{1}{x}=-\sqrt{t}$，最后结果相同），则

$$\mathrm{d}x=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\mathrm{d}t,\quad \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C\quad(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

【1979】 $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

解 $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C.$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

【1980】 证明:积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x\ (R\text{ 为有理函数})$$

的求法,归结为有理函数的积分法.

证明思路 当 a,c 中至少有一个为零时,则积分的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a\neq0$ 及 $c\neq0$ 时,设 $\sqrt{ax+b}=z$,则 $\sqrt{cx+d}=\sqrt{c_1z^2+d_1}$,其中 $c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$. 从而,原积分变形为

$$\int R\left(\frac{z^2-b}{a},z,\sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}z\mathrm{d}z=\int R_1(z,\sqrt{c_1z^2+d_1})\mathrm{d}z,$$

其中 R_1 为有理函数.

若 $c_1>0$,设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u$;若 $d_1>0$,设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}$,即可将被积函数有理化. 从而命题获证.

证 当 a,c 中至少有一个为零时,则积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a\neq0,c\neq0$ 时,设 $\sqrt{ax+b}=z$,则

$$x=\frac{z^2-b}{a},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{a}z\mathrm{d}z,\ \sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}z^2+d-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1z^2+d_1},$$

式中 $c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$. 代入得

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d})\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{z^2-b}{a},z,\sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}z\mathrm{d}z=\int R_1(z,\sqrt{c_1z^2+d_1})\mathrm{d}z,$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}z+u\ (c_1>0)$ 或 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}\ (d_1>0)$——欧拉代换,就可将被积函数有理化. 于是,积分

$$\int R(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{cx+b})\mathrm{d}x$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式的积分

$$\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x,\quad(\text{式中 } m,n \text{ 和 } p \text{ 为有理数})$$

仅在下列三种情形可化为有理函数的积分(切比雪夫定理):

第一种情形,p 为整数. 此时令 $x=z^N$,其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形,$\frac{m+1}{n}$ 为整数. 此时令 $a+bx^n=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形,$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数. 此时利用代换:$ax^{-n}+b=z^N$,其中 N 为分数 p 的分母.

若 $n=1$,则这些情形等价于:(1) p 为整数. (2) m 为整数. (3) $m+p$ 为整数.

计算下列积分:

【1982】 $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx.$

提示 令 $x=z^6$.

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$. $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$; p 为整数,这是二项微分式的第一种情形.

设 $x=z^6$, 则 $dx=6z^5dz$, $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$. 代入得

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\,dx=6\int \frac{z^8}{(z^2+1)^2}\,dz=6\int \left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\arctan z+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\arctan z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\arctan(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

*) 利用 1921 题的结果.

【1983】 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

提示 令 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$. $m=1$, $n=\frac{2}{3}$, $p=-\frac{1}{2}$; $\frac{m+1}{n}=3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$, 则 $x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$, $dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$. 代入得

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int (z^2-1)^2dz=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

【1985】 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

提示 令 $x^{-3}+1=z^3$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$, $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n}+p=0$,这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3}+1=z^3$, 则 $x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}}$, $dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz$. 代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int \frac{z}{z^3-1}dz=-\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z-1}+\frac{1}{3}\int \frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.

【1990】 在什么情形下,积分 $\int \sqrt{1+x^m}\,dx$ (m 为有理数)为初等函数?

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p=\frac{1}{2}$, 故由切比雪夫定理知,仅在下述两种情形,此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形,$\frac{1}{m}$为整数,即 $m=\frac{1}{k_1}=\frac{2}{2k_1}$,其中 $k_1=\pm1,\pm2,\cdots$.

第二种情形，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$为整数，即 $m=\frac{2}{2k_2-1}$，其中 $k_2=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

综上所述，即得：当 $m=\frac{2}{k}$（式中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$）时，积分 $\int\sqrt{1+x^m}\,dx$ 为初等函数.

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx\quad(m\text{ 及 }n\text{ 为整数})$$

的积分，可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分：

【1994】 $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$.

解 $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{8}\int\sin^2 2x(1+\cos 2x)\,dx$

$=\frac{1}{8}\int\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2x\,d(\sin 2x)=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

【1996】 $\int\sin^5 x\cos^5 x\,dx$.

解 $\int\sin^5 x\cos^5 x\,dx=\int\frac{1}{32}\sin^5 2x\,dx=-\frac{1}{64}\int(1-\cos^2 2x)^2\,d(\cos 2x)$

$=-\frac{1}{64}\cos 2x+\frac{1}{96}\cos^3 2x-\frac{1}{320}\cos^5 2x+C.$

【1999】 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{1}{\sin x}d(\cot x)=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int\cot x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$

$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|,$

于是，
$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【2001】 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int\frac{dx}{\sin^4 2x}=-8\int\csc^2 2x\,d(\cot 2x)$

$=-8\int(1+\cot^2 2x)\,d(\cot 2x)=-8\cot 2x-\frac{8}{3}\cot^3 2x+C.$

【2003】 $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

提示： 两次利用等式：$1=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$

$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x}=\frac{1}{3\cos^3 x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$

$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

【2011】 推出下列积分的递推公式：

(1) $I_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x$； (2) $K_n=\int\cos^n x\,\mathrm{d}x\quad(n>2)$.

利用这些公式计算 $\int\sin^6 x\,\mathrm{d}x$ 和 $\int\cos^8 x\,\mathrm{d}x$.

提示 利用分部积分法，易得：

(1) $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$； (2) $K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2}$.

解 (1) $I_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x=-\int\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

于是，
$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_0=\int\mathrm{d}x=x+C$，即得

$$I_6=\int\sin^6 x\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}I_2$$
$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(2) $K_n=\int\cos^n x\,\mathrm{d}x=\int\cos^{n-1}x\,\mathrm{d}(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,\mathrm{d}x$$
$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}-(n-1)K_n,$$

于是，
$$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2};$$

利用此公式及 $K_0=x+C$，即得

$$K_8=\int\cos^8 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{8}K_6=\cdots$$
$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

【2012】 推出下列积分的递推公式：

(1) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}$； (2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}\quad(n>2)$.

利用这些公式计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}$ 和 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^7 x}$.

提示 利用分部积分法及 $1=\sin^2 x+\cos^2 x$，易得

(1) $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$； (2) $K_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2}$.

解 (1) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2};$$

利用此公式及 $I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$，即得

$$I_5=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3=\cdots=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}\mathrm{d}x=\frac{1}{n-1}\int\sin x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)+K_{n-2}$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}K_{n-2}+K_{n-2}=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2};$$

利用此公式及 $K_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$，即得

$$K_7=\int\frac{dx}{\cos^7 x}=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{6}K_5=\cdots=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}+\frac{5}{16}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

【2014】 $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx$.

解 $\int\cos x\cos 2x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x(\cos 4x+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos 6x+\cos 2x)\,dx+\frac{1}{4}\int(1+\cos 4x)\,dx$

$$=\frac{1}{24}\sin 6x+\frac{1}{8}\sin 2x+\frac{1}{16}\sin 4x+\frac{x}{4}+C.$$

【2019】 $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中 $\sin(a-b)\neq 0$.

【2022】 $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}dx=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}dx$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中 $\cos a\neq 0$.

【2025】 $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$. 代入得

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{dt}{3t^2+2t+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left[\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right]+C.$$

【2028】 $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$，(1) $0<\varepsilon<1$；(2) $\varepsilon>1$.

解 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，同 2025 题，得 $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I$.

(1) $0<\varepsilon<1$，

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{x}{2}\right)+C;$$

(2) $\varepsilon>1$，

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\,t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|^{*)}+C.$$

*） $\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}=\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\ \frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

【2031】 $\int\frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$.

解 $\int\frac{\cos^2 x\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(a\tan x)}{(a^2\tan^2 x+b^2)^2}=\frac{\tan x}{2b^2(a^2\tan^2 x+b^2)}+\frac{1}{2ab^3}\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right)^{*)}+C$,
其中 $ab\neq 0$.

*） 利用 1921 题的结果.

【2035】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{2\mathrm{d}x}{2-\sin^2 2x}=\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2\sec^2 2x-\tan^2 2x}=\int\frac{\mathrm{d}(\tan 2x)}{2+\tan^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

【2037】 $\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\cos 2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+\frac{2\cos 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin 2x}{\sqrt{2}+\sin 2x}+C.$$

【2042】 证明：$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C$，式中 A,B,C 为常数.

提示 首先，a 及 b 不可能同时为零. 其次，令

$$a_1\sin x+b_1\cos x\equiv A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x),$$

比较等式两端同类项的系数，可得 A,B：

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq 0),$$

并注意 $(a\cos x-b\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)$，命题即易获证.

证 设 $a_1\sin x+b_1\cos x\equiv A(a\sin x+b\cos x)+B(a\cos x-b\sin x)$，

比较等式两端同类项的系数，可得 $A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$，$a^2+b^2\neq 0$. 于是，

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=A\int\mathrm{d}x+B\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

【2043】 $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x$.

解 此为 2042 题的特例，这里 $a_1=1$， $b_1=-1$， $a=1$， $b=2$；

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5},B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{-1-2}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

代入得 $\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x=-\frac{x}{5}-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$

【2046】 证明：

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c},$$

式中 A,B,C 为常数.

提示 首先,a 及 b 不可能同时为零. 其次,令

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,可得 A,B,C:

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},\ C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq0),$$

并注意 $(a\cos x-b\sin x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x+c)$,命题即易获证.

证 按题意 a、b 不同时为零. 设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得 $$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}\mathrm{d}x=A\int\mathrm{d}x+B\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

【2047】 $\displaystyle\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x.$

解 此为 2046 题的特例,这里

$a_1=1,\ b_1=2,\ c_1=-3,\ a=1,\ b=-2,\ c=3;$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},\qquad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}=\frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4}=-\frac{6}{5}.$$

代入得 $$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}\mathrm{d}x=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x-2\cos x+3}$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|-\frac{6}{5}\arctan\frac{1+5\tan\frac{x}{2}}{2}{}^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\tan\dfrac{x}{2}$,积分即得所求式子.

【2050】 证明:

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x},$$

式中 A,B,C 为常数.

提示 首先,a 及 b 不可能同时为零. 其次,令

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x\equiv A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,可得 A,B,C:

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\ B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},\ C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}\quad(a^2+b^2\neq0),$$

命题即易获证.

证 按题意 a、b 不同时为零. 设

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x\equiv A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数,则有

$$aA-bB=2b_1,\quad C-aB=a_1,\quad C+bA=c_1,$$

从而, $$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int \frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int \cos x dx-B\int \sin x dx+C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$
$$=A\sin x+B\cos x+C\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}.$$

【2052】 $\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$

解 此为 2050 题的特例，这里

$$a_1=1,\ b_1=-\frac{1}{2},\ c_1=2,\ a=1,\ b=2;A=\frac{1}{5},\quad B=\frac{3}{5},\quad C=\frac{8}{5}.$$

代入得 $\int \frac{\sin^2 x-\sin x\cos x+2\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}=\frac{1}{5}(\sin+3\cos x)+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\tan\frac{x}{2}+1}\right|^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\tan\frac{x}{2}$，积分即得所求式子.

【2054】 $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx.$

解 $\int \frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx=\int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx-\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$

$$=-2\int \frac{d(\cos x)}{3+\cos^2 x}-\int \frac{d(\sin x)}{4-\sin^2 x}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

【2064】$^+$ $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx.$

提示 令 $\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}=t$，则有 $\frac{dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}dt\ (\cos a\neq 0)$.

解 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$，则 $dt=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}dx$，$\frac{dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}dt.$

于是，
$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx=-\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt=-\frac{2}{n\cos a}t^n+C=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n+C\quad(\cos a\neq 0).$$

§5. 各种超越函数的积分法

【2066】 证明：若 $P(x)$ 为 n 次多项式，则

$$\int P(x)e^{ax}dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 $\int P(x)e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int P(x)d(e^{ax})=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)dx$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(e^{ax})=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)e^{ax}+\frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)dx$$

$$=\cdots=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式，所以，$P^{(n+1)}(x)\equiv 0$. 从而，上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

求下列积分：

【2082】 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$.

解 $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx=\int\frac{dx}{1+e^x}-\int\frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$$

【2085】 $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$，$dx=\frac{6}{t}dt$. 代入得

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int\frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}\right]dt$$

$$=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\arctan t+C$$

$$=x-3\ln\left[(1+e^{\frac{x}{6}})\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\arctan(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

【2088】 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

解 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

$$=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}+\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin(e^{-x})+C.$$

【2090】 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$$

对于 $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，设 $\sqrt{1+e^x}=t$，则 $x=\ln(t^2-1)$，$dx=\frac{2tdt}{t^2-1}$.

于是，$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C_1$.

对于 $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$，设 $\sqrt{1-e^x}=t$，则 $x=\ln(1-t^2)$，$dx=-\frac{2tdt}{1-t^2}$.

于是，$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=-\ln\frac{1+t}{1-t}+C_2=-\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}+C_2$.

代入得 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+C.$

【2091】 证明:若 R 为有理函数,其分母仅有实根,则积分 $\int R(x)e^{ax}dx$ 可用初等函数和超越函数

$$\int \frac{e^{ax}}{x}dx=\mathrm{li}(e^{ax})+C,\ \text{式中}\ \mathrm{li}x=\int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根,所以仅包含形如 $(x-a_i)^{k_i}$ 的因子 $(i=1,2,\cdots,l)$. 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式,A_{ij} 是常系数. 从而,积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{e^{ax}}{(x-a^i)^j}dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数. 而积分 $\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$ 可用初等函数和超越函数来表示. 事实上,设 $x-a_i=t$,则

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=\int\frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j}dt=\frac{e^{aa_i}}{1-j}\int e^{at}d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)=\frac{e^{aa_i}}{1-j}e^t\cdot\frac{1}{t^{j-1}}-\frac{ae^{aa_i}}{1-j}\int\frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt.$$

这样,被积函数中分母的次数便降低一次,再继续运用分部积分法 $(j-2)$ 次,即可得

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=g_{ij}(x)+B_{ij}\ \mathrm{li}(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数,B_{ij} 为常数. 因此,积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\,g_{ij}(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\,B_{ij}\ \mathrm{li}(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

【2092】 若 $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$,$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数,则在什么情形下,积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 为初等函数?

解 $\int\frac{a_k}{x^k}e^x dx=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx=\cdots$

$$=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}-\frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-2}}-\cdots-\frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x}+\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx.$$

于是, $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^x dx=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}dx$

$$=-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx+a_0e^x.$$

因而,若 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0$,即 $a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0$,则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

求含有 $\ln f(x)$, $\arctan f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$ 等函数的积分,其中 $f(x)$ 为代数函数:

【2103】 $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx.$

解 $\int\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\int\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})+\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$$

【2105】 $\int x\arctan(x+1)\mathrm{d}x$.

解 $\int x\arctan(x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan(x+1)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\arctan(x+1)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$

【2111】 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\arccos x\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$

求含有双曲函数的积分：

【2122】 $\int\sqrt{\mathrm{th}x}\,\mathrm{d}x$.

解 $\int\sqrt{\mathrm{th}x}\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1}}-\int\frac{\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-4x}}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})}{\sqrt{(\mathrm{e}^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-2x})^2}}=\frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}^{2x}+\sqrt{\mathrm{e}^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(\mathrm{e}^{-2x})+C.$

【2123】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}$.

解 设 $\mathrm{th}\,\frac{x}{2}=t$，则 $\mathrm{sh}x=\frac{2t}{1-t^2}$， $\mathrm{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$，$x=\ln\frac{1+t}{1-t}$， $\mathrm{d}x=\frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t$. 代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}x+2\mathrm{ch}x}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1+2\mathrm{th}\,\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

【2124】 $\int\mathrm{sh}ax\sin bx\,\mathrm{d}x$.

解 $\int\mathrm{sh}ax\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{ax}\,\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}^{*)}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-ax}\,\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}^{*)}+C=\frac{a\mathrm{ch}ax\sin bx-b\mathrm{sh}ax\cos bx}{a^2+b^2}+C.$

*） 利用 1829 题的结果.

§6. 求函数积分的各种例子

求积分：

【2126】 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}$.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6(1+x^2)}=\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^6}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4(1+x^2)}=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{5x^5}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4}+\int\frac{x^2}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}+\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C.$

【2127】 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}$.

解 $\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1-x^2)^3}=\int\frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^3}$

$$=-\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}-\left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}\right]^{*)}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}=-\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-1}\right\}^{(*)}+\frac{x}{4(1-x^2)^2}$$

$$=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

*） 利用 1921 题的递推公式.

【2135】 $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

解 $$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}=-\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

注 以上实际已设 $x>0$. 对于 $x<0$, 利用 1856 题的方法可得同一结果.

【2142】 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 $$\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\int\frac{\arcsin x\,dx}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\arcsin x\,d(\arcsin x)=-(\operatorname{sgn}x)\int\arcsin x\,d(\sqrt{x^{-2}-1})+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x-\int\frac{dx}{|x|}\right)+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x)^2+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C\quad(0<|x|<1).$$

【2148】 $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

解 设 $1+\cos x=t^2$，并限制 $t>0$，则 $\sin x=t\sqrt{2-t^2}$， $dx=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt$. 代入得

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2dt}{t^2(2-t^2)}=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)dt=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

【2151】 $\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+C$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

【2158】 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$.

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)\mathrm{d}x$

$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$=x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x.$

于是，$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C\quad(|x|<1).$

【2165】 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$

解 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=e^x\tan\frac{x}{2}-\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)+\int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}+C.$

【2170】 $\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x.$

解题思路 由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数. 可求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 易知

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1, C_2 为常数，并注意 $0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)$. 求得 C_1、C_2 后即获解.

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C_1$,

当 $x<0$ 时，$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C_2$.

由于 $\mathrm{e}^{-|x|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数 $F(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}-\mathrm{e}^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于 $0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)$，即 $0=-1+C_1=1+C_2$，因此，$C_1=1$, $C_2=-1$. 从而，

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & x<0.\end{cases}$$

所以，

$$\int\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}+C, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1+C, & x<0.\end{cases}$$

【2171】 $\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x.$

提示 仿 2170 题，可求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$.

解 仿 2170 题，

当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x=x+C_1$;

当 $x>1$ 时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_2$;

当 $x<-1$ 时，$\int\max(1,x^2)\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C_3$.

今求满足 $F(1)=1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知，必有

$$F(x)=\begin{cases} x+C_1, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3+C_2, & x>1, \\ \dfrac{1}{3}x^3+C_3, & x<-1, \end{cases}$$

其中 C_1,C_2,C_3 是三个常数. 由于 $1=F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)$，即 $1=1+C_1=\dfrac{1}{3}+C_2$，故 $C_1=0,C_2=\dfrac{2}{3}$. 再由 $F(-1)=\lim\limits_{x\to -1-0}F(x)$，得 $-1=-\dfrac{1}{3}+C_3$，故 $C_3=-\dfrac{2}{3}$. 由此可知，有

$$F(x)=\begin{cases} x, & -1\leqslant x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}, & x>1, \\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}, & x<-1. \end{cases}$$

最后得

$$\int \max(1,x^2)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & |x|\leqslant 1, \\ \dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}x+C, & |x|>1. \end{cases}$$

【2175】 $\int f(x)\mathrm{d}x$，式中 $f(x)=\begin{cases} 1, & -\infty<x<0, \\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x<+\infty. \end{cases}$

解 当 $-\infty<x<0$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x+C_1$；

当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int (x+1)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+x+C_2$；

当 $1<x<+\infty$ 时，$\int f(x)\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x=x^2+C_3$.

今求满足 $F(0)=0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)=F(0)$，$\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，仿 2170 题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2+\dfrac{1}{2}, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

于是，

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases} x+C, & -\infty<x<0, \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & 1<x<+\infty. \end{cases}$$

【2178】 设 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，求 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2)=\dfrac{1}{x}$，得 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$. 于是，

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

【2179】$^+$ 设 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$,求 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x=1-\sin^2 x$ 得 $f'(x)=1-x$. 于是,

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}x=x-\frac{1}{2}x^2+C\quad(|x|\leqslant 1).$$

【2180】 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<+\infty,\end{cases}$ 且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

提示 令 $\ln x=t$.

解 设 $t=\ln x$,则 $f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$ 于是,

$$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x+C_2, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 是两个常数. 由假定 $f(0)=0$,得 $C_1=0$. 再由 $f(x)$在 $x=0$ 的连续性知,$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$,由此得 $C_2=-1$. 于是,

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-1, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

第四章　定　积　分

§1. 定积分是积分和的极限

1° **黎曼积分**　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\text{，}(x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\Delta x_i=x_{i+1}-x_i)\tag{1}$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分*.

极限(1)存在的充分必要条件为：

$$\text{下积分和 }\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i\quad\text{及}\quad\text{上积分和 }\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i|\to 0$ 时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_i+1} f(x)\quad\text{及}\quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_i+1} f(x).$$

若等式(1)右端的极限存在，则函数 $f(x)$ 称为相应区间上的可积函数(常义的)，例如：(ⅰ)连续函数；(ⅱ)具有有限个不连续点的有界函数；(ⅲ)单调有界的函数，这些都是任意有限闭区间上的可积函数. 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，则它在 $[a,b]$ 上不可积(常义的).

2° **可积条件**　函数 $f(x)$ 在已知闭区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件为成立等式

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中 ω_i 为函数 $f(x)$ 有闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅.

【2182】　把所给区间分为 n 个相等的子区间，求下列函数 $f(x)$ 在相应区间上的下积分和 $\underline{S_n}$ 及上积分和 $\overline{S_n}$：(1) $f(x)=x^3$　$(-2\leqslant x\leqslant 3)$.

解　(1) 把区间 $[-2,3]$ n 等分，则每一个子区间的长为 $h=\frac{5}{n}$，且第 i 个子区间为 $[-2+ih,\ -2+(i+1)h]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$. 若令 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的下确界及上确界，则因 $f(x)=x^3$ 为增函数，所以，

$$m_i=(-2+ih)^3,\quad M_i=[-2+(i+1)h]^3\quad(i=0,1,2,\cdots,n-1).$$

于是，

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3h=-8nh+12h^2\sum_{i=0}^{n-1} i-6h^3\sum_{i=0}^{n-1} i^2+h^4\sum_{i=0}^{n-1} i^3$$
$$=-40+\frac{12\cdot 25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

【2184】+　从积分的定义出发，求 $\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t$，其中 T,v_0,g 为常数.

解　$f(t)=v_0+gt$ 在 $[0,T]$ 上为增函数 $(T>0)$.

---

* 这里的和 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为积分和.

$$h=\frac{T}{n},\quad m_i=v_0+igh,\quad M_i=v_0+(i+1)gh\quad(i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

于是，
$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+igh)h=nv_0h+gh^2\sum_{i=0}^{n-1}i=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=v_0T+\frac{gT^2}{2}-\frac{gT^2}{2n},$$
$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}[v_0+(i+1)gh]h=v_0T+\frac{gT^2}{2}+\frac{gT^2}{2n}.$$

因为
$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=v_0T+\frac{gT^2}{2},$$

所以，
$$\int_0^T(v_0+gt)\mathrm{d}t=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法分割积分区间，并视积分为相应积分和的极限，计算下列定积分：

【2185】 $\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x.$

解题思路 由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故所给的定积分存在，且它与分法无关，同时也与点 ξ_i 的取法无关. 本题将$[-1,2]n$ 等分，得子区间的长 $h=\frac{3}{n}$，并取点 $\xi_i=-1+ih\ (i=0,1,2,\cdots,n-1)$，这种和的极限就是所求的定积分. 以下各题如无特殊情况，不再说明定积分的存在性，直接对区间分段并取点 ξ_i，作和求极限.

解 将区间$[-1,2]n$ 等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取 $\xi_i=-1+ih\quad(i=0,1,\cdots,n-1)$.

作和
$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2h=nh-2h^2\sum_{i=0}^{n-1}i+h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2=3+\frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是，
$$\lim_{n\to\infty}S_n=3.$$

由于 $f(x)=x^2$ 在$[-1,2]$上连续，故积分 $\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x$ 是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关. 因此，上述和的极限就是所求的积分值，即定积分
$$\int_{-1}^{2}x^2\mathrm{d}x=3.$$

【2192】 计算泊松积分 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$. 考虑两种情形：(1) $|\alpha|<1$；(2) $|\alpha|>1$.

提示 分解多项式 $\alpha^{2n}-1$ 为二次因式.

解 因为$(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当$|\alpha|\neq 1$时，被积函数是连续的，于是，积分就存在. 把区间$[0,\pi]$分成 n 个相等部分，即有
$$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

另一方面，我们可以证明
$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

事实上，方程 $t^{2n}-1=0$ 共有 $2n$ 个根，记作
$$1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_n=-1,\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2,\cdots,\bar{\varepsilon}_{n-1},$$

其中
$$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}$$

及
$$\bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\quad(\mathrm{i}^2=-1).$$

于是，
$$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$$
$$=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\right)\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(1) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即 $\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=0$.

(2) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 S_n 改写成 $S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$后，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，即 $\int_0^\pi\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx=2\pi\ln|\alpha|$.

【2194】 证明：不连续函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积.

证 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在 $[0,1]$ 上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega\leqslant2$.

任给 $\varepsilon>0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$ 上只有有限个不连续点，故可积. 因此，存在 $\eta>0$，使得对 $\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x'_i|<\eta$，就有 $\sum\limits_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 显然，若 $[\alpha,\beta]\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},1\right]$，则对于 $[\alpha,\beta]$ 的任何分法，只要 $\max|\Delta x'_i|<\eta$，也有 $\sum\limits_{i'}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{5}$.

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$. 现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是 $[0,1]$ 的满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法，设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{5}<x_{i_0+1}$.

由上述，有 $\sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$. 又显然有

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant2\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<2\,\frac{2\varepsilon}{5}=\frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

于是，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 可积.

【2197】 证明：狄利克雷函数 $\chi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}\end{cases}$ 在任意区间上不可积.

提示 注意 $\omega_i=1$.

证 在任意区间 $[a,b]$ 的任何部分区间上均有 $\omega_i=1$，所以，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$，它不趋于零. 因此，函数 $\chi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

【2198】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$f_n(x)=\sup f(x)\ (x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}),$$

其中

$$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)\,(i=0,1,\cdots,n-1;n=1,2,\cdots).$$

证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证明思路 注意 $f_n(x)$是不超过$(n+1)$个不连续点的阶梯函数，因此，它在$[a,b]$上可积. 于是，有

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x,$$

从而，命题易获证.

证 $f_n(x)$是不超过 $n+1$ 个不连续点的阶梯函数，因此，$f_n(x)$在$[a,b]$上可积. 于是，

$$\left|\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\omega_i\mathrm{d}x=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\to 0 \quad \left(\text{当}\max|\Delta x_i|=\frac{b-a}{n}\to 0\text{ 时}\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

【2199】 证明:若函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积，则存在连续函数 $\varphi_n(x)(n=1,2,\cdots)$的序列，使得在 $a\leqslant c\leqslant b$时

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 将区间$[a,b]$$n$ 等分，设分点为

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b,$$

即

$$x_i^{(n)}=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

在 $\Delta x_i^{(n)}=[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上令 $\varphi_n(x)$为过点$[x_{i-1}^{(n)},f(x_{i-1}^{(n)})]$及$[x_i^{(n)},f(x_i^{(n)})]$的直线，即当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时，令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}[f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$是$[a,b]$上的连续函数，因此，它是可积的.

若令 $m_i^{(n)},M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$分别表示函数 $f(x)$在$[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$上的下确界，上确界及振幅，则当 $x\in[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$时，

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)},\quad m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而，

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}.$$

于是，当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时，

$$\left|\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^c|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}}|f(x)-\varphi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

由于 $f(x)$在$[a,b]$上可积，因此，当 $\max|\Delta x_i^{(n)}|=\frac{b-a}{n}\to 0$ 时，必有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\to 0.$$

由此可知 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant c\leqslant b)$.

【2201】 若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上绝对可积. 即积分 $\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在. 这个函数在$[a,b]$上是否为可积函数?

提示 不一定可积. 例如，函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\-1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

解 一般地说，不. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\-1, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

$|f(x)|=1$，它在$[a,b]$上连续，因此，它在$[a,b]$上可积. 但对于函数 $f(x)$ 而言，在$[a,b]$的任一部分区间上 $\omega_i=2$，所以，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a),$$

它不趋向于零. 于是，函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上不可积.

【2204】 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[A,B]$上可积，证明：函数 $f(x)$ 有积分连续性，即

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0,$$

其中$[a,b]\subset[A,B]$.

证 由 2199 题的结果可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $f(x)$ 在$[A,B]$上可积，故存在$[A,B]$上的连续函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_A^B|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$ 在$[A,B]$上一致连续，故存在 $\delta>0$，使当 $|x'-x''|<\delta$ $(x'\in[A,B],\ x''\in[A,B])$ 时，恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，当 $|h|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^b|f(x+h)-\varphi(x+h)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant2\int_A^B|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<2\,\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.\end{aligned}$$

故
$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

【2205】 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上可积，证明：等式

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$$

当且仅当对属于闭区间$[a,b]$内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x)=0$ 时方成立.

证 先证必要性：

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，但 $f(x_0)\neq0$，则存在 $\delta>0$，$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$，使当 $|x-x_0|\leqslant\delta$ 时

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而，
$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)\mathrm{d}x>\frac{f^2(x_0)}{4}\,2\delta=\frac{\delta f^2(x_0)}{2}>0.$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

再证充分性：

也即要证：$f(x)$ 在$[a,b]$上可积条件下，假设 $f(x)$ 在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0)=0$，则必有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0.$$

证明分两个部分. 第一，首先要指出当 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积时，$f(x)$ 的连续点在$[a,b]$中必定是稠密的. 此处所谓“稠密”性是指：对于任意区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，总存在一点 $x_0\in[\alpha,\beta]$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 第二，利用假设，并借助于稠密性，可证得充分性.

现在先证第二部分：由 $f(x)$ 在$[a,b]$上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0\in X$ 时有 $f(x_0)=0$ 的假设. 即知，对于区间$[a,b]$的任一分法，均可适当地取 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，使 $f(\xi_i)=0$. 从而积分和 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f^2(\xi_i)\Delta x_i=0$. 由此，再注意到 $f^2(x)$ 在$[a,b]$的可积性，便有

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i)\Delta x_i=0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明，若 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，则对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $[\alpha,\beta]$ 的子区间 $[\alpha',\beta']$，使得振幅

$$\varepsilon(\alpha',\beta')<\varepsilon.$$

事实上，如果上述结论不成立，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使对于 $[\alpha,\beta]$ 的任意分法，有

$$\sum_i \omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_i\Delta x=\varepsilon_0(\beta-\alpha)>0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 可积矛盾，因此，结论为真.

今取 $[\alpha,\beta]$ 为 $[a_1,b_1]$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$ 上可积，故存在区间 $[a_2,b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1,b_1]$，使 $\omega[a_2,b_2]<\frac{1}{2}$. 同样，存在区间

$$[a_3,b_3]\subset\left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},\ b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right]\subset[a_2,b_2],$$

使 $\omega[a_3,b_3]<\frac{1}{3}$. 这样继续下去，得一串闭区间 $[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$，满足

$$\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=\beta,$$

并且

$$b_n-a_n\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}\to 0,\quad \omega[a_n,b_n]<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由区间套定理，诸 $[a_n,b_n]$ 具有唯一的公共点 c. 显然 $a_n<c<b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 下证 $f(x)$ 在点 c 连续.

任给 $\varepsilon>0$，取正整数 n_0 使 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$. 再取 $\delta>0$ 使 $(c-\delta,c+\delta)\subset[a_{n_0},b_{n_0}]$. 于是，当 $|x-c|<\delta$ 时，必有

$$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega[a_{n_0},b_{n_0}]<\frac{1}{n_0}<\varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在点 $x=c$ 连续. 到此，充分性证毕.

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° **牛顿—莱布尼茨公式** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且连续，$F(x)$ 为它的原函数，即 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

当 $f(x)\geqslant 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$，OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 S（图 4—2）.

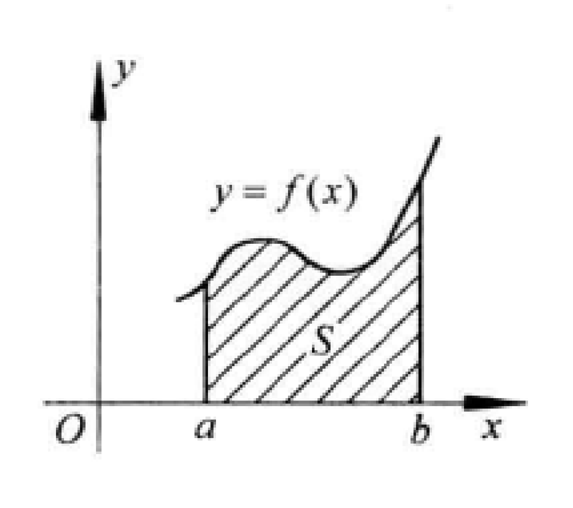


图 4—2

2° **分部积分法** 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$（即 $f(x),g(x)\in C^{(1)}(a,b)$），则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x.$$

3° **变量代换** 若：(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，(2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，其中 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$；(3) 复合函数 $f[\varphi(t)]$ 在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上有定义并连续，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

利用牛顿—莱布尼茨公式，求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积：

【2212】 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}\quad(0<\alpha<\pi)$.

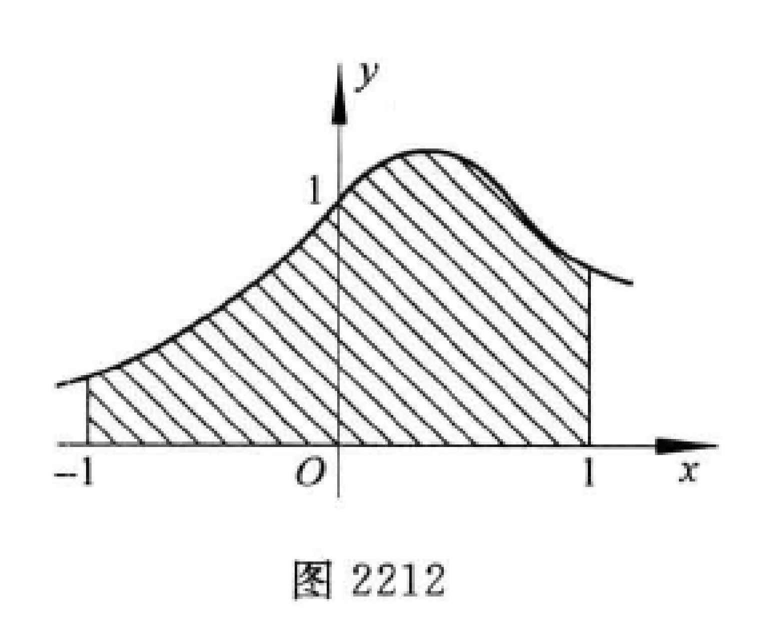


图 2212

解 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$

$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2}+\arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}$

$=\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ （图 2212）.

【2216】 对于下列定积分：（2）$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{2+\tan^2x}$； 说明为什么运用牛顿—莱布尼茨公式会得到不正确的结果.

解 （2）若应用公式得

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\mathrm{d}x}{2+\tan^2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{2\pi}=0.$$

但$\frac{\sec^2x}{2+\tan^2x}>0$，故积分若存在，必为正. 原因在于原函数在$[0,2\pi]$上 $x=\frac{\pi}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$为第一类不连续点，故不能直接运用公式.

【2217】 求 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$.

解 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

注意 被积函数$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在 $x=0$ 不连续，但易知

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0,$$

故 $x=0$ 是可去不连续点. 若我们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0，则被积函数在整个$[-1,1]$上都是连续的，从而，积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$ 存在. 以后，凡是被积函数有可去不连续点的情形，我们都按此法处理，理解为连续函数的积分，另外，

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为
$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Big|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后，凡是定积分存在而原函数有不连续点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果.

【2218】 求 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x$.

提示 在每一个区间$[(k-1)\pi,k\pi]$ $(k=1,2,\cdots,100)$上积分，再相加.

解 $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2x}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2x}\,\mathrm{d}x=100\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=200\sqrt{2}.$

利用定积分求下列和的极限值：

【2219】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间[0,1]上的定积分. 事实上，函数 $f(x)=x$ 在[0,1]上是连续的. 因而可积分. 这样便可将[0,1] n 等分，并取 ξ_i 为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明.

【2226】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]=\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

弃掉高阶无穷小量，求下列和的极限值：

【2228】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解 由于 $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$，式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}=\left(\lim_{n\to 1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

【2232】 求：(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$.

解 (3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$

$$=-\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\cos x)}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)\mathrm{d}t$$

$$=-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)^{*)}=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi-\pi\sin^2 x)=-\cos(\pi\sin^2 x)$.

【2234】 证明：当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}$.

提示 利用洛必达法则及变上限积分的求导法则.

证 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1$，所以，当 $x\to\infty$ 时，$\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}$.

【2236】 设 $f(x)$为连续正值函数，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

递增.

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数. 因为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right\}=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t>0$$

$(x>0)$，

所以，当 $x\geqslant 0$ 时，函数 $\varphi(x)$ 递增.

利用分部积分法公式，求下列定积分：

【2242】$^+$ $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x|\,\mathrm{d}x$.

提示 将区间$[\frac{1}{e},e]$分成$[\frac{1}{e},1]$及$[1,\frac{1}{e}]$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\lg x|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\lg x)\mathrm{d}x+\int_1^e \lg x\mathrm{d}x=\left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x\right)+x\lg x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{\ln 10}\mathrm{d}x$

$=2(1-\frac{1}{e})\lg e$.

利用适当的变量代换，求下列定积分：

【2246】 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\quad(a>0)$.

解 设 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

【2250】 令 $x-\frac{1}{x}=t$，计算积分 $\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数是偶函数，于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\lim_{N\to-\infty}2\int_N^0\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\lim_{N\to-\infty}\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_N^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

【2251】 对于下列定积分和代换 $x=\varphi(t)$：

(1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x$，$t=x^{\frac{2}{3}}$；　　(2) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，$x=\frac{1}{t}$.

说明为什么用 $\varphi(t)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

解 (1) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=2$. 但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$，则得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x=\pm\frac{3}{2}\int_1^1 t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果：$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=0$. 其错误在于 $x=\frac{1}{t}$，当$t=0$（0 属于$[-1,1]$）时不连续.

【2262】 计算积分 $\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|\mathrm{d}x$（$n$ 为正数）.

提示 令 $x=e^{-t}$.

解 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x=e^{-t}$，则 $\mathrm{d}x=-e^{-t}\mathrm{d}t$，$\frac{\sin(-\ln x)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^t\sin t$. 代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^{1}\left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx=\int_{0}^{2\pi n}|\sin t|\,dt=\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|\,dt=\sum_{k=1}^{2n}\int_{0}^{\pi}\sin t\,dt=2\cdot 2n=4n.$$

【2266】 证明：当 n 为奇数时，函数

$$F(x)=\int_0^x\sin^n x\,dx \quad 及 \quad G(x)=\int_0^x\cos^n x\,dx$$

为以 2π 为周期的周期函数；而当 n 为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数之和.

证 当 n 为奇数时，$\sin^n x$ 是奇函数，而且是以 2π 为周期的函数. 于是，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx+\int_{2\pi}^{2\pi+x}\sin^n x\,dx$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n(\pi-x)\,dx+\int_0^x\sin^n x\,dx=0+\int_0^x\sin^n x\,dx=F(x)$$

及

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n x\,dx$$
$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx+\int_0^{\pi}\cos^n(x+\pi)\,dx=G(x),$$

从而得知：$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数. 当 n 为偶数时，显然有

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx,\quad G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx.$$

但因

$$\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=a>0,$$

所以，$F(x)$ 和 $G(x)$ 都不是以 2π 为周期的周期函数.

设 $F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x$，则

$$F_1(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi)=F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a=F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，而

$$F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x.$$

所以，$F(x)$ 为周期函数与线性函数之和.

同理，可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和.

一般地，当 $f(x)$ 为周期函数时，可以证明：函数 $F(x)=\int_{x_0}^{x}f(t)\,dt$ 可表示成线性函数与周期函数之和.

计算下列积分：

【2270】+ $\int_1^e(x\ln x)^2\,dx.$

解 $\int_1^e(x\ln x)^2\,dx=x^3\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e x^2\ln x(1+\ln x)\,dx=e^3-2\int_1^e x^2\ln x\,dx-2\int_1^e(x\ln x)^2\,dx.$

移项合并得 $\int_1^e(x\ln x)^2\,dx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x\,dx=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{2}{9}x^3\ln x-\frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e=\frac{5}{27}e^3-\frac{2}{27}.$

【2276】 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

提示 注意 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$，并利用 2035 题的结果.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan 2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}.$

*) 利用 2035 题的结果.

【2278】 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x$.

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}$.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分：

【2281】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

提示 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

解 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\mathrm{d}x-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$,

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

【2282】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$.

提示 令$\frac{\pi}{2}-x=t$,并利用 2281 题的结果.

解 设$\frac{\pi}{2}-x=t$,则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$,且 $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t$.

代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t.$$

因此,与 2281 题的结果相同.

【2283】 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\mathrm{d}x$.

提示 $I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}$.

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n-2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}$,

即

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

由于 $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$,于是,利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^n I_0$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right)\right].$$

利用欧拉公式：$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$，计算下列积分（$m$ 及 n 为正整数）：

【2291】 $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx$.

解 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$，利用欧拉公式得 $u=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}$.

当 $n=2k$ 时，

$$\begin{aligned}u&=(e^{ikx}+e^{-ikx})(e^{i(k-1)x}+e^{i(k-3)x}+\cdots+e^{-i(k-3)x}+e^{-i(k-1)x})\\&=e^{(2k-1)ix}+e^{(2k-3)ix}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}+\cdots+e^{-(2k-1)ix}\\&=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x].\end{aligned}$$

于是，
$$\int_0^\pi u\,dx=2\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}+\cdots+\sin x\right]\Bigg|_0^\pi=0.$$

当 $n=2k+1$ 时，同上得 $u=2[\cos 2kx+\cos 2(k-1)x+\cdots+\cos 2x]+1$，

于是，$\int_0^\pi u\,dx=\pi$.

最后得到
$$\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \pi, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

求下列积分（n 为正整数）：

【2296】 $\int_0^\pi \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx$.

提示 对积分 $\int_0^\pi \cos^{n+1}x\sin(n+1)x\,dx$ 使用两次分部积分.

解 考虑积分
$$I=\int_0^\pi \cos^{n+1}x\sin(n+1)x\,dx,$$

并对它作两次分部积分，可得
$$I=I-\frac{n}{n+1}\int_0^\pi \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx.$$

于是，
$$\int_0^\pi \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

本题也可不用分部积分法. 事实上，$\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$ 是以 π 为周期的函数，又是奇函数，于是，

$$\int_0^\pi \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}x\sin(n+1)x\,dx=0.$$

【2299】 利用多次的分部积分法，计算欧拉积分：
$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,$$

式中 m 及 n 为正整数.

解 $B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}dx=\frac{n-1}{m}B(m+1,n-1)$.

继续利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}B(m,n)&=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}dx=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Bigg|_0^1\\&=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.\end{aligned}$$

【2300】 勒让德多项式 $P_n(x)$ 可由下面公式来定义：
$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

证明：
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n.\end{cases}$$

证 当 $m\neq n$ 时，不失一般性，设 $n<m$. 由于 $P_m(x)$ 为一 m 次的多项式，我们记
$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$
其中 $R(x)=\dfrac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$. 利用多次分部积分法，得
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\left[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{(m-2)}(x)+\cdots+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)\right]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^m\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(m)}(x)\mathrm{d}x$$
$$=0.$$
当 $m=n$ 时，
$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\mathrm{d}^n(x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n}\right]^2\mathrm{d}x,$$
设 $u=\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^n-1)^n]$，$v=(x^2-1)^n$，则
$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\right]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^n\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}vu^{(n)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}[(x^2-1)^n]\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^1(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\mathrm{d}t^{*)}$$
$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}^{**)}=\frac{2}{2n+1}.$$

*) 设 $x=\sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

【2301】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 内除了有限个内点 $c_i(i=1,\cdots,p)$ 及点 a 与 b 外皆满足等式 $F'(x)=f(x)$，而在这些点上 $F(x)$ 有第一类不连续点(广义原函数). 证明：
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

证 为确定起见，设 $a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$，并记 $a=c_0$，$b=c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=1}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x.$$
显然，在 $[c_i+\eta,c_{i+1}-\eta]$ 上 $F'(x)=f(x)$，从而可应用牛顿—莱布尼茨公式，得
$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)\mathrm{d}x=F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta),$$
由此可知
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\eta\to0+}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$
$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)-F(c_i-0)].$$

求下列有界不连续函数的不定积分：

【2304】 $\displaystyle\int\operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x.$

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积，故其原函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的

连续函数. 对任何 x,必存在唯一的整数 k 使 $k\pi\leqslant x<(k+1)\pi$. 于是,

$$F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}=\arccos(\cos x).$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)\mathrm{d}x=\arccos(\cos x)+C\quad(-\infty<x<+\infty).$$

计算下列有界不连续函数的定积分:

【2314】 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x$.

提示 注意原式 $=\int_{e^{-\pi}}^1 (-1)\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} \mathrm{d}x$.

解 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]\mathrm{d}x=\int_{e^{-\pi}}^1 (-1)\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n (-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} \mathrm{d}x$

$$=-1+2e^{-\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}e^{-(k-1)\pi}=-1+\frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

【2315】 求 $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$,其中 E 为闭区间 $[0,4\pi]$ 中使被积分式有意义的一切值的集合.

提示 E 中使被积函数有意义的区域为 $[0,\pi]$ 及 $[2\pi,3\pi]$;再将区间 $[0,\pi]$ 分成 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 及 $[\frac{\pi}{2},\pi]$,将区间 $[2\pi,3\pi]$ 分成 $[2\pi,\frac{5\pi}{2}]$ 及 $[\frac{5\pi}{2},3\pi]$.

解 $\int_E |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x)\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.$$

§3. 中值定理

1° **函数的平均值** 数

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则可求得一点 $c\in(a,b)$,使得

$$M[f]=f(c).$$

2° **第一中值定理** 若:(1)函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界并可积;(2)当 $a<x<b$ 时,函数 $\varphi(x)$ 不变号,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x,$$

式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 且 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$, $m=\inf\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$;(3)此外,若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $\mu=f(c)$,其中 $a\leqslant c\leqslant b$(作者注:可以证明,c 可取值使 $a<c<b$).

3° **第二中值定理** 若:(1)函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有界并可积;(2)当 $a<x<b$ 时,函数 $\varphi(x)$是单调的,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x,$$

式中 $a\leqslant\xi\leqslant b$;(3)此外,若函数 $\varphi(x)$单调下降(广义的)且不为负,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b);$$

(3′)若函数 $\varphi(x)$单调上升(广义的)且不为负,则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(b-0)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

【2316】 确定下列定积分的符号:(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

提示 (2)使用第一中值定理.

解 (2)由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)}>0,\quad(\text{其中 }0<c<\pi).$$

【2321】 电流强度依规律 $$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

变化,其中 i_0 为振幅,t 为时间,T 为周期,φ 为初相,求电流强度之平方的平均值.

解 $M(i^2)=\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\mathrm{d}t=\frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}$.

将上式开平方,即得电流的有效值$\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

利用第一中值定理,估计积分:

【2324】 $\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^9\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$,从而,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^9\mathrm{d}x,\quad\text{即}\quad\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}.$$

利用第二中值定理,估计积分:

【2328】 $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解 设 $$f(x)=\sin x,\ \varphi(x)=\frac{1}{x},$$

则 $f(x)$及 $\varphi(x)$在$[100\pi,200\pi]$上满足第二中值定理的条件,又 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$单调下降且不为负,于是,

$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1-\cos\xi}{100\pi}=\frac{\sin^2\frac{\xi}{2}}{50\pi}=\frac{\theta}{50\pi},$$

其中 $100\pi\leqslant\xi\leqslant200\pi$ 及 $0\leqslant\theta\leqslant1$.

【2331】 设函数 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$和它们的平方在区间$[a,b]$上可积.证明柯西—布尼亚科夫斯基不等式:

$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

提示 考虑积分 $\int_a^b[\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x$，其中 λ 为任意实数.

证 考虑积分 $\int_a^b[\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2\mathrm{d}x$，其中 λ 为任意实数. 从而有

$$\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x-2\lambda\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x+\lambda^2\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

这是关于变量 λ 的不等式，左端是二次三项式. 于是，其判别式

$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2-\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即
$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\psi^2(x)\mathrm{d}x.$$

【2332】 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续可微且 $f(a)=0$，证明不等式：

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$.

提示 利用 2331 题的结果，有

$$\left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t\int_a^x f'^2(t)\mathrm{d}t.$$

证 设 x 为 $[a,b]$ 上任一点，利用柯西—布尼亚科夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}x\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x,$$

即
$$f^2(x)=[f(x)-f(a)]^2\leqslant(x-a)\int_a^x f'^2(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$$

由此可知 $M^2=\sup\limits_{x\in[a,b]}f^2(x)\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)\mathrm{d}x.$

【2333】 证明：等式
$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0.$$

提示 使用第一中值定理或第二中值定理.

证 证法 1：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}p=0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值.

证法 2：应用第二中值定理，得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi_n'}\sin x\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{n}|\cos n-\cos\xi_n'|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中 ξ_n' 是界于 n 与 $n+p$ 之间的某值. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_p^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

§4. 广义积分

1° **函数的广义可积分性** 若函数 $f(x)$ 在每一个有限区间 $[a,b]$ 上依寻常的意义是可积的，则可定义

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

若函数 $f(x)$ 在点 b 的邻域内无界且在每一个区间 $(a,b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内依寻常的意义是可积的，则取

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

若极限 (1) 或 (2) 存在，则相应的积分称为收敛的，否则称为发散的（在基本的意义上）.

2° **柯西准则** 积分 (1) 收敛的充要条件为：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在数 $b=b(\varepsilon)$，当 $b'>b$ 及 $b''>b$ 时，下面

的不等式成立：

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

对于形如(2)的积分柯西准则的表述是类似的.

3° **绝对收敛的判别法** 若$|f(x)|$是广义可积的，则函数$f(x)$所对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的.

比较判别法Ⅰ.设当$x\geqslant a$时$|f(x)|\leqslant F(x)$.若$\int_a^{+\infty}F(x)\mathrm{d}x$收敛，则积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛.

比较判别法Ⅱ.若$\psi(x)>0$及当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)=O^*[\psi(x)]$，则积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$及$\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$同时收敛或同时发散.就特别情形来说，若当$x\to+\infty$时，$\varphi(x)\sim\psi(x)$，则上面的结果也成立.

比较判别法Ⅲ.(1) 设当$x\to+\infty$时，$f(x)=O^*\left(\frac{1}{x^p}\right)$. 在这种情况下，当$p>1$时，积分(1)收敛；当$p\leqslant1$时，积分(1)发散.

(2) 设当$x\to b-0$时，$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right]$.在这种情况下，当$p<1$时，积分(2)收敛；当$p\geqslant1$时，积分(2)发散.

4° **收敛性的较精密的判别法** 若(1)当$x\to+\infty$时，函数$\varphi(x)$单调地趋近于零；(2)函数$f(x)$有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

收敛，但一般地说，并非绝对收敛.

在特殊情形下，若$p>0$，则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

收敛.

5° **柯西主值** 若对于任意的$\varepsilon>0$，函数$f(x)$的积分

$$\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x \quad 及 \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$$

存在，则柯西主值(V·P·)为

$$\mathrm{V\cdot P\cdot}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\right].$$

相仿地，

$$\mathrm{V\cdot P\cdot}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

计算下列积分：

【2339】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.

提示 从定义出发，并利用1921题的递推公式.

解 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}^{*)}+C.$

由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right]-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以， $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

*） 利用 1921 题的递推公式.

利用递推公式计算下列广义积分（n 为正整数）：

【2349】$^+$ $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}\quad(ac-b^2>0).$

解题思路 利用 1921 题的递推公式及定义可得

$$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$$

并注意 $I_1=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$

解 $I_n=\frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}{}^{*)}=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$

即 $$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}\quad(n>1).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\arctan\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}},=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

*） 利用 1921 题的结果.

【2351】 $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$

解题思路 注意到当 $x\to1-0$ 时，

$$\sqrt{1-x}\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 I_n 收敛.

解 由于 $\sqrt{1-x}\,\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\frac{1}{2}$（当 $x\to1-0$ 时），且 $p=\frac{1}{2}<1$，所以，积分 I_n 收敛.

其次，设 $x=\sin t$，则 $$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2k,^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & n=2k-1.\end{cases}$$

*） 利用 2281 题的结果.

【2353】 (1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$； (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx.$

解题思路 首先，容易证明它们是收敛的.

其次，令 $t=\frac{\pi}{2}-x$，可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=A$. 相加即得 $2A=A-\frac{\pi}{2}\ln2$.

解 先证明它们是收敛的. 事实上，当 $x\to+0$ 时，$\sqrt{x}\ln\sin x\to0$，所以，积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛. 同法可证积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 也收敛.

其次，求这两个积分的值. 设 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=A.$$

相加得
$$\begin{aligned}2A&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\ln\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin2x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin2x\mathrm{d}x-\ln2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln2=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin t\mathrm{d}t\right)-\frac{\pi}{2}\ln2\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\ln2=A-\frac{\pi}{2}\ln2,\end{aligned}$$

于是，$2A=A-\frac{\pi}{2}\ln2$，$A=-\frac{\pi}{2}\ln2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln2.$$

【2356】 数
$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)\mathrm{d}\xi$$
称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的平均值. 求下列函数在此区间上的平均值：

(2) $f(x)=\arctan x$； (3) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (2) $M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\arctan\xi\mathrm{d}\xi=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2};$$

(3) 利用第二中值定理，得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi\mathrm{d}\xi=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\quad(0\leqslant c\leqslant x).$$

于是，$M[f]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\mathrm{d}\xi=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$

【2357】 求：(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t}{x^3}$； (3) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t}{\ln\frac{1}{x}}$ *)，

其中 $a>0$，$f(t)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数.

解 (2) 由于 $t^2<\sqrt{1+t^4}$，所以，$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}$，从而，当 $x\to+\infty$ 时，$\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\to+\infty$. 利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\frac{1}{3};$$

(3) 由于 $\lim\limits_{t\to+0}t(t^{-1}\mathrm{e}^{-t})=1$，故广义积分 $\int_0^{+\infty}t^{-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 发散. 从而，所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式. 利用洛必达法则，得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-e^{-x}x^{-1}}{-\frac{1}{x}}=1.$$

*) 原题(3)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$.

研究下列积分的收敛性:

【2361】 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx.$

解题思路 先将原积分分成

$$原式=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx.$$

对于上式右端第一个积分,只要注意当 $x\to+0$ 时,$x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x})\to1$;而对于第二个积分,只要注意当 $x\to+\infty$时,$x^2(x^{p-1}e^{-x})\to0$. 从而,当 $p>0$ 时,原积分收敛.

解 将积分分成

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx.$$

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$. 由于 $x^{1-p}(x^{p-1}e^{-x})\to1$ (当 $x\to+0$ 时),故当 $p>0$ 时 (从而 $1-p<1$),积分 $\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

对于积分 $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$. 由于

$$x^2(x^{p-1}e^{-x})=\frac{x^{p+1}}{e^x}\to0\quad(当\ x\to+\infty时),$$

故对于一切 p 值,积分 $\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 恒收敛.

于是,当 $p>0$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$ 收敛.

【2362】 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx.$

解 将积分分成

$$\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx.$$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$,由于

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)^{-q}x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to1-0}x^p\left(\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left(\lim_{x\to1-0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q=\left[\lim_{x\to1-0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1}\right]^q=1,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $-q<1$ (即 $q>-1$)时收敛,当 $-q\geqslant1$ (即$q\leqslant-1$)时发散. 于是,当 $q\leqslant-1$ 时,积分 $\int_0^1 x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$ 必发散. 故下面可在 $q>-1$ 的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$.

若 $p>-1$,可取 $\tau>0$ 充分小,使 $p-\tau>-1$. 于是,

$$\lim_{x\to+0}x^{-p+\tau}x^p\ln^q\frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau}=0.$$

由于 $-p+\tau<1$,故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}}x^p\ln^q\frac{1}{x}dx$ 收敛;

若 $p\leqslant -1$(设 $q>-1$),则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p\ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1}\ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^q\mathrm{d}\left(\ln\frac{1}{x}\right)=-\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty.$$

故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p\ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

总之,仅当 $p>-1$ 且 $q>-1$ 时,积分 $\int_0^1 x^p\ln^q \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

【2367】$^+$ $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x\quad(n\geqslant 0)$.

解 当 $a\neq 0$ 时,设 $f(x)=\cos ax$,$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$,则对于任意的 $A>0$,均有 $\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{a}$;其次,当 $n>0$ 时,$g(x)$单调下降且趋于零($n\to+\infty$).从而得知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 收敛.至于当 $n=0$ 时,积分显然发散.

当 $a=0$ 时,由于 $x^n\frac{1}{1+x^n}\to 1$(当 $x\to+\infty$时),故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 仅当$n>1$ 时收敛.

于是,当 $a\neq 0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$.收敛.

【2368】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

解题思路 首先,注意到$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right)$.

其次,易证 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.而 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$发散.于是,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散,从而,原积分也发散.

解 方法 1:

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}$显然发散.

又因对于任意的 $A>1$,$\left|\int_1^A\cos 2x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$,且当 $x\to+\infty$时,$\frac{1}{x}$单调地趋于零,故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

于是,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散,从而,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

方法 2:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

由于不论 N 取多大,只要取 $p=N$,就有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{2N}>\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N个}=\frac{1}{2N}N=\frac{1}{2},$$

故递增数列 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ $(n=1,2,\cdots)$ 的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 是$+\infty$,即 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$.

于是,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

【2369】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.对于任何 q 值,由于

$$\lim_{x\to+0} x^p \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^p \lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^q x}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 仅当 $p<1$（q 为任意值）时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$. 对于任何 p 值，由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q \frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^q \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^p x}\right)=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^q=1,$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 仅当 $q<1$（p 为任意值）时收敛.

于是，当 $p<1$ 且 $q<1$ 时，积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛.

【2371】 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$.

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$. 不妨设 $\min(p,q)=p$，由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^p \frac{dx}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x^{q-p}}=1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $p<1$，即当 $\min(p,q)<1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$. 不妨设 $\max(p,q)=q$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^q \frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(q-p)}+1}=1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $q>1$ 即当 $\max(p,q)>1$ 时收敛.

于是，当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$ 收敛.

【2374】 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 对于任意的 p，由于

$$\lim_{x\to1+0}\left[(x-1)^q \frac{1}{x^p\ln^q x}\right]=\lim_{x\to1+0}\left[\frac{1}{x^p}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right]=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim_{x\to1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1,$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 仅当 $q<1$ 且 p 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$. 如果 $p>1$，取 $\alpha>0$ 充分小，使 $p-\alpha>1$，则对于任意的 q，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}\right)=0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛；如果 $p\leqslant1$，$q<1$，由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^q x}=\left.\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\right|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 发散.

于是，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

【2378】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解题思路 易证积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 而积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 显然收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛.

其次，由 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$ $(x>0)$ 及 2368 题的结果可知，原积分不是绝对收敛的.

解 对于任意的 $A>1$，由于 $\left|\int_1^A\sin x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 而积分 $\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 是普通的定积分（$\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 有可去不连续点，故补充定义其值为 1 后，$\frac{\sin x}{x}$ 可视为 $[0,1]$ 上的连续函数），故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 但它不是绝对收敛的.

事实上，当 $x>0$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$，由 2368 题知，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散，故积分 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\mathrm{d}x$ 发散.

【2380】 $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x\quad(q\neq 0)$.

解 设 $t=x^q$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}$. 于是，

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$. 由于

$$\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 仅当 $-\frac{p+1}{q}<1$，即当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时收敛. 又由于被积函数在 $[0,1]$ 上非负，故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$. 如果 $\frac{p+1}{q}<1$，则由于对任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A\sin t\mathrm{d}t\right|\leqslant 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零（当 $t\to+\infty$ 时），故此时积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q}=1$，则积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 显然发散. 从而，积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q}>1$，则由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$，故对任给的 $A>0$，总存在正整数 N，使有 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$，且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$.

今取 $A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$，$\quad A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$，则有

$$\left|\int_{A'}^{A''}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t\mathrm{d}t\right|=1,$$

它不可能小于任给的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，因而，积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 发散，从而，积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}t\mathrm{d}t$ 也发散.

于是，仅当 $-1<\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 收敛，且当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时，积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛.

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 的绝对收敛性. 分三种情形讨论：

(1) 当 $\frac{p+1}{q}<0$ 时，由于

$$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}\quad(1\leqslant t<+\infty),$$

且 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\mathrm{d}t$ 收敛，故当 $\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛；

(2) 当 $\frac{p+1}{q}=0$ 时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t=+\infty$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

(3) 当 $\frac{p+1}{q}>0$ 时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\mathrm{d}t\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t=+\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的.

于是，当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\mathrm{d}t$ 绝对收敛.

最后我们得到：当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；当 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分条件收敛.

【2384】 若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则当 $x\to+\infty$ 时是否必有 $f(x)\to0$? 研究例子：

(1) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$.

解 不一定. 例如，

(1) 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$ 收敛. 事实上，它是 2380 题之特例：$p=0,q=2$. 但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$ 不存在；

【2385】 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义且无界，可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

看作对应积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i\quad(x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1},\Delta x_i=x_{i+1}-x_i)$$

的极限？

提示 不能.

解 不能. 因为若 $c(a\leqslant c\leqslant b)$ 是瑕点，则对于 $[a,b]$ 的任何分法，不论其 $\max|\Delta x_i|$ 多么小，当分法确定以后，设 $c\in[x_j,x_{j+1}]$，则总可以取 ξ_j，使 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何预先给定的值. 因此，当 $\max|\Delta x_i|\to0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

【2386】 设

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\tag{1}$$

收敛，函数 $\varphi(x)$ 有界，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x\tag{2}$$

是否必定收敛？举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛，问积分(2)的收敛性如何？

解题思路 不一定收敛. 例如，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，$\varphi(x)=\sin x$ 有界，但是，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

其次，设 $|\varphi(x)|\leqslant L$，则由 $|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)|$ 及 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，即知 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

解 不一定. 例如，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛*)，且 $\varphi(x)=\sin x$ 有界，但是积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 是发散的**).

若积分(1)绝对收敛，$\varphi(x)$有界，则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上，设$|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L|f(x)| \quad 及 \quad \int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果. **) 利用 2368 题的结果.

【2390】 证明：(2) $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0$.

提示 从定义出发.

证 (2) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{1-x^2}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|=0,$$

所以， $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0$.

求下列积分：

【2392】 $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

提示 注意点 $x=1$ 及 $x=2$ 为被积函数的瑕点，从而，由定义即易获解.

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{2+\eta}^{b}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)=-\ln2=\ln\frac{1}{2},$$

所以， $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\ln\frac{1}{2}$.

§ 5. 面积的计算法

1° **直角坐标系中的面积** 以两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ $[y_2(x)\geqslant y_1(x)]$ 与两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(a<b)$ 为界的图形 $A_1A_2B_2B_1$（图 4－5(1)），其面积等于

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx.$$

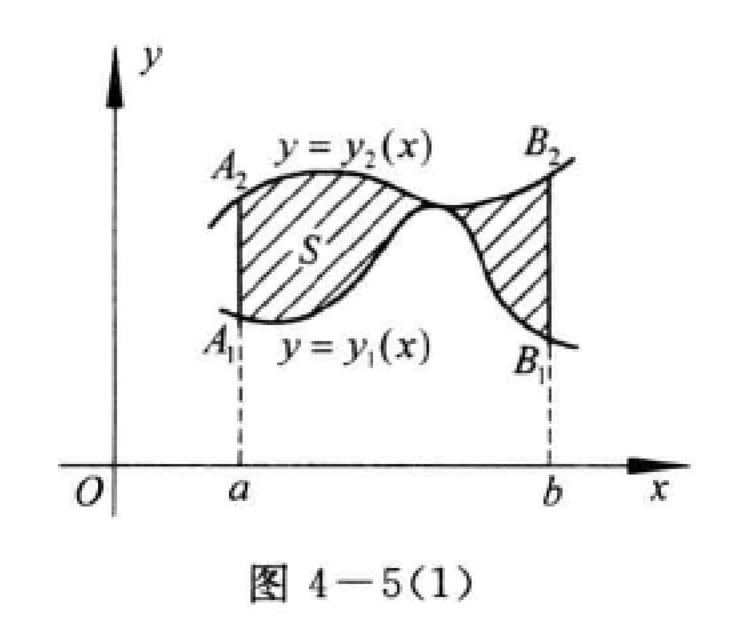


图 4－5(1)

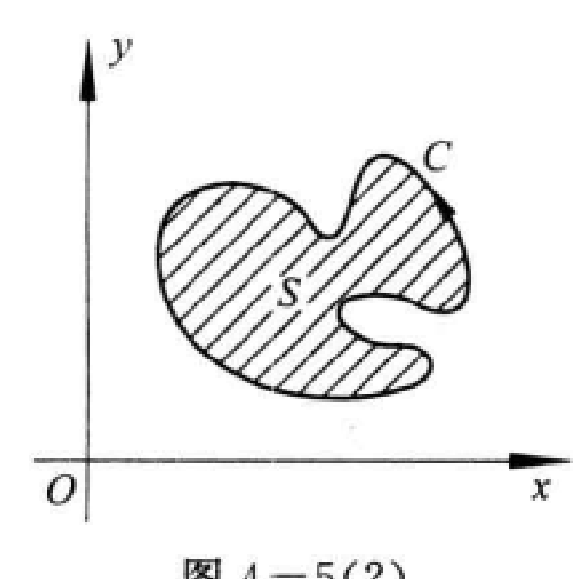


图 4－5(2)

2° 用参数方程给出的曲线所围成的面积 若 $x=x(t), y=y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ 为一分段光滑的简单封闭曲线 C 的参数方程，并且沿曲线的环绕方向为逆时针方向，使得该曲线所围图形总是位于其左侧(图 4－5(2))，则此图形的面积 S 等于

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T x(t)y'(t)\mathrm{d}t$$

或
$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]\mathrm{d}t.$$

3° 极坐标系中的面积 以连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ $(\alpha<\beta)$ 为界的扇形 OAB(图 4－5(3))．其面积 S 等于

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

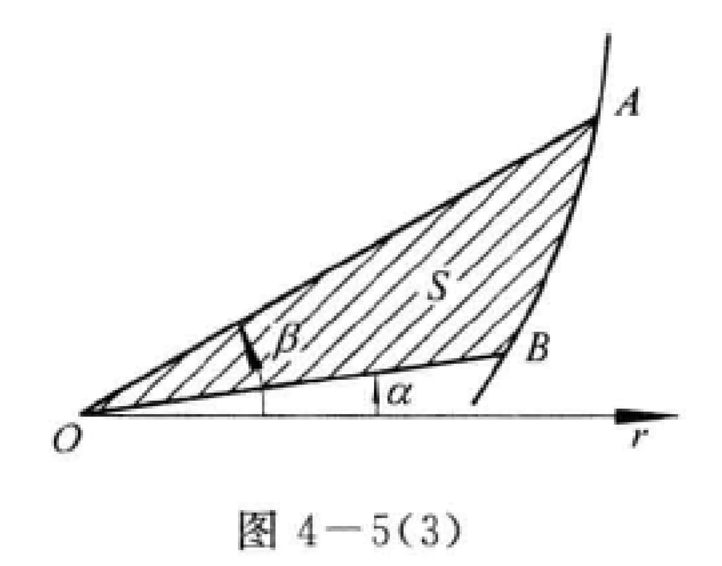


图 4－5(3)

求以下列直角坐标方程所给曲线为界的图形的面积*：

【2405】 $y^2=2px$，$27py^2=8(x-p)^3$．

解 曲线 $L_1: 27py^2=8(x-p)^3$ 与曲线 $L_2: y^2=2px$ 在第一象限内的交点为 $A(4p, 2\sqrt{2}p)$，如图 2405 所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2p}y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=2\left(py+\frac{9}{10}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6p}y^3\right)\Bigg|_0^{2\sqrt{2}p}=\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2.$$

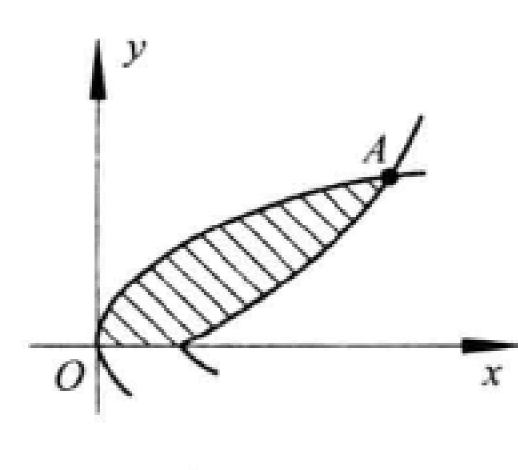


图 2405

【2406】 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ $(AC-B^2>0)$．

解 解方程，得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C} \quad \text{及} \quad y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

当 $B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant 0$，即 $|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$ 时，y_1 及 y_2 才有实数值．设 $a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$，则所求的面积为

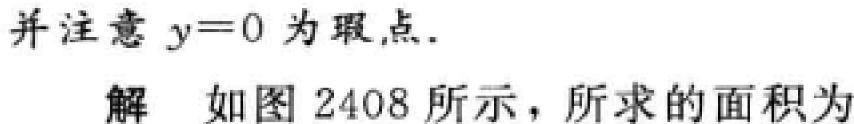
$$S=\int_{-a}^a (y_2-y_1)\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\int_{-a}^a \sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\;\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

【2408】 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ (曳物线)，$y=0$．

提示 所求面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)\mathrm{d}y,$$


并注意 $y=0$ 为瑕点．

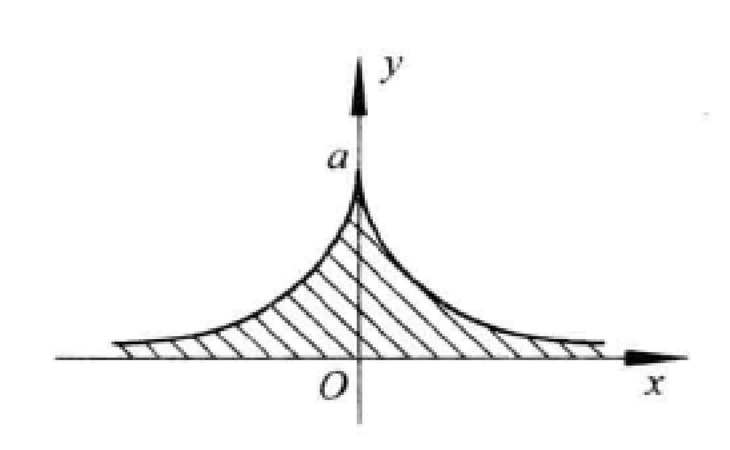


图 2408

解 如图 2408 所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a \ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\mathrm{d}y-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_0^a$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Bigg|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}=\pi a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

---

* 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的．

求下列参数方程所给曲线所围图形的面积：

【2415】 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$（圆的渐伸线）及 $x=a$，$y\leqslant 0$.

解 所求的面积为

$$S=-\int_0^{2\pi}a(\sin t-t\cos t)at\cos t\mathrm{d}t-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x$$

$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x$ 表沿着从点 $A(a,-2\pi a)$ 到点 $B(a,0)$ 的直线 $\overline{AB}$ 上的积分. 由于在 $\overline{AB}$ 上 $x\equiv a$，故 $\mathrm{d}x=0$. 从而，$\int_{\overline{AB}}y\mathrm{d}x=0$.

于是，得 $S=\dfrac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

求下列极坐标方程所给曲线所围图形 S 的面积：

【2421】 $r=\dfrac{p}{1-\cos\varphi}$（抛物线），$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^4\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{p^2}{4}\left(\cot\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\cot^3\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)^{*)}.$$

*） $\cot\dfrac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

【2422】 $r=\dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$（椭圆）.

解 所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{p^2\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=p^2\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设 $\tan\dfrac{\varphi}{2}=t$，并记 $a^2=\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$，则有

$$\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\int\frac{2(t^2+1)\mathrm{d}t}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}=\frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\arctan\frac{t}{a}+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}+\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{t}{a}\right\}^{*)}+C.$$

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 时，$0\leqslant t<+\infty$，从而得一广义积分. 于是，经计算得

$$S=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}p^2=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*） 利用 1921 题的递推公式.

变为极坐标，求下列曲线所围图形的面积：

【2426】 $x^3+y^3=3axy$（笛卡儿叶形线）.

提示 注意 $r=\dfrac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$，$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，并令 $\tan\varphi=t$.

解 $r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$，于是，$r=\dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$.

当 $\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$r\geqslant 0$，且当 $\varphi=0$ 及 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$r=0$. 所以，从 $\varphi=0$ 到 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$，

叶形线位于第一象限部分所围成的面积,即为所要求的面积(图 2426)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2}{}^{*)}=\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{3a^2}{2}.$$



*) 设 $\tan\varphi=t$.

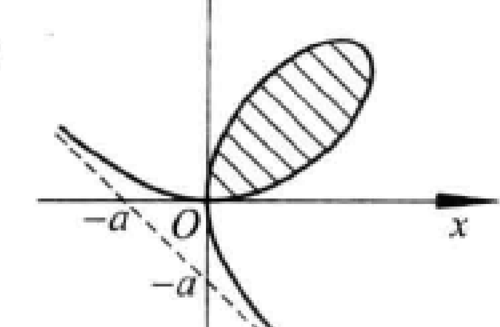


图 2426

用参数方程的形式给出下列曲线,再求曲线所围图形的面积:

【2429】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ (星形线).

提示 令 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$,它对应于四分之一的面积.

解 设 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,

其中 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$,它对应于四分之一的面积.所求的面积为其四倍,即

$$S=4\int_0^a y\mathrm{d}x=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)\mathrm{d}t=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

§6. 弧长的计算法

1° **直角坐标系中的弧长** 一段光滑(连续可微)曲线 $y=y(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 的弧长等于

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

2° **参数方程所给曲线的弧长** 若曲线 C 由参数方程

$$x=x(t),\quad y=y(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant T),$$

给出,式中 $x(t),y(t)\in C^{(1)}[t_0,T]$,则曲线 C 的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

3° **极坐标系中的弧长** 若 $r=r(\varphi)$ $(\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta)$,

式中 $r(\varphi)\in C^{(1)}[\alpha,\beta]$,则相应曲线段的弧长等于

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章.

求下列曲线的弧长:

【2433】 $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ 从点 $A(0,a)$ 至点 $B(b,h)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x=\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\operatorname{sh}\frac{x}{a}\Bigg|_0^b=a\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}{}^{*)}.$$

*) 由于 $h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$,故 $\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}$.

【2441】 $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$, $c^2=a^2-b^2$ (椭圆的渐屈线).

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}$. 所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\}^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

【2450】 $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant3\pi)$（图 2450）. 所求的弧长为

$$s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}\mathrm{d}\varphi=\frac{3\pi a}{2}.$$

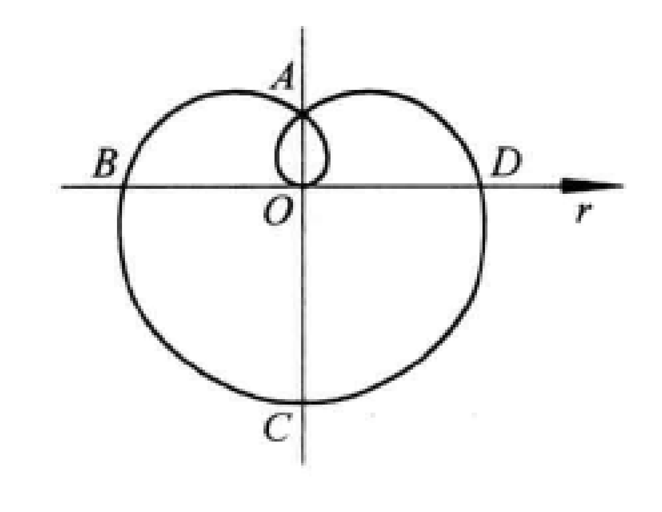


图 2450

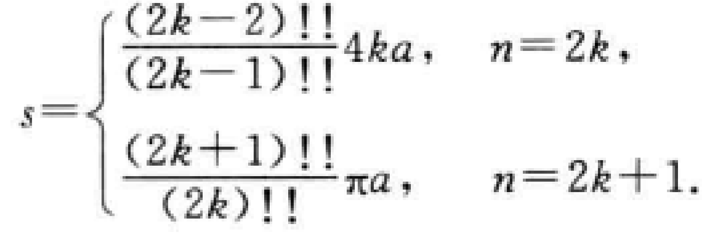
我们甚至可以证明：

1° 弧$\overset{\frown}{AB}$为弧$\overset{\frown}{OABC}$的三分之一；

2° $\overset{\frown}{OA}$，$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$之间依次是等差的，其公差为$\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此，我们还可以证明更一般的情况：

曲线：$r=a\sin^n\frac{\theta}{n}$（$n$ 为正整数）之全长为



$$s=\begin{cases}\dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & n=2k,\\ \dfrac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & n=2k+1.\end{cases}$$

【2453】 证明：椭圆 $x=a\cos t, y=b\sin t$ 的弧长等于正弦曲线 $y=c\sin\frac{x}{b}$ 的一波之长，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

证 对于椭圆，其全长为

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}\,\mathrm{d}t.$$

对于正弦曲线，其一波（x 由 0 到 $2\pi b$）之长为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2t}\,\mathrm{d}t=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2t}\,\mathrm{d}t.$$

所以，$s_1=s_2$，本题得证.

§7. 体积的计算法

1° **由已知横截面计算物体的体积** 若物体的体积 V 存在，且 $S=S(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 为物体的横截面面积，此横截面经过点 x 且垂直于 Ox 轴，则 $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

2° **旋转体的体积** 曲边梯形

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x.$$

在这里 $y(x)$ 为单值连续函数. 在更一般的情形下，图形

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

绕 Ox 轴旋转所成的环状体的体积等于

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]\mathrm{d}x.$$

这里 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数

求下列曲面所围成的体积：

【2463】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （椭球面）.

提示 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面，其截痕为一椭圆，易知其面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\ -a\leqslant x\leqslant a.$$

解 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球面得截痕为一椭圆，它在 yOz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\quad 及\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

从而，此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),\quad -a\leqslant x\leqslant a.$$

于是，所求的椭球面的体积为 $V=\int_{-a}^{a}S(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi abc.$

【2466】 $x^2+y^2+z^2=a^2,\quad x^2+y^2=ax.$

解 如图 2466 所示，过点 $M(x,0,0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

给出（上半面），其变化范围为：

$$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}\quad（如图中 ABCD）.$$

从而，其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

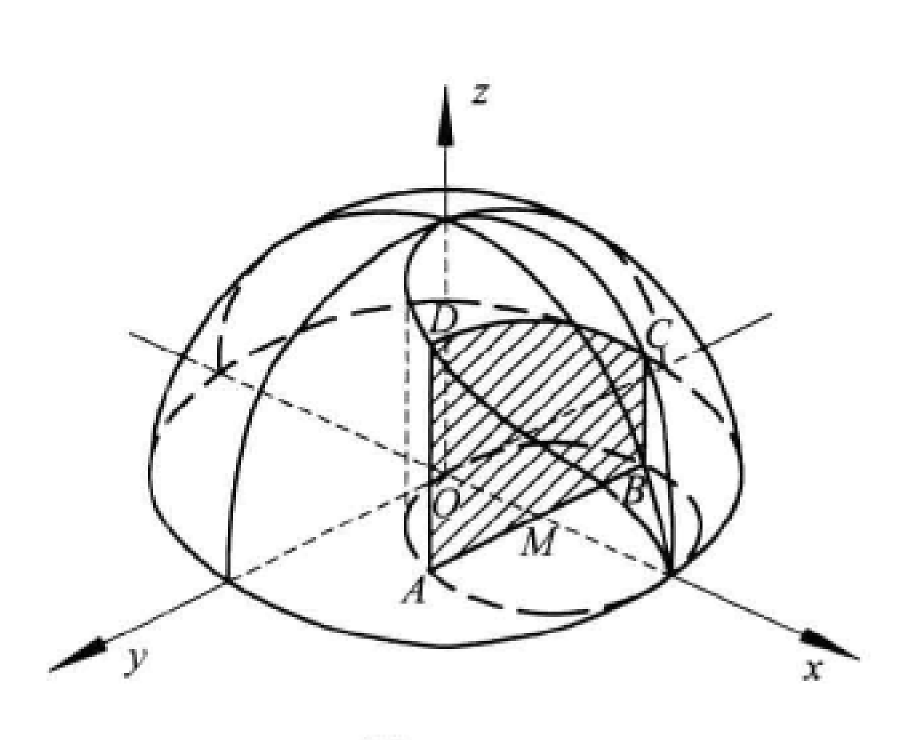


图 2466

于是，所求的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a\left[a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=4\left\{\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{5}a^3+\left[\left(\frac{\pi a^3}{4}-\frac{1}{2}a^3\right)-\left(\frac{1}{12}\pi a^3-\frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}=\frac{2}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right).$$

求下列曲线段旋转所成旋转体的体积：

【2480】 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ \ (0\leqslant t\leqslant 2\pi),\ y=0$：

(1) 绕 Ox 轴；(2) 绕 Oy 轴；(3) 绕直线 $y=2a$.

解 所求的体积为

(1) $V_x=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=5\pi^2a^3$；　(2) $V_y=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi^3a^3$；

(3) 作平移：$y=\bar{y}+2a,\ x=\bar{x}$ 则曲线方程为，

$$\bar{x}=a(t-\sin t),\quad \bar{y}=-a(1+\cos t),$$

及

$$\bar{y}=-2a.$$

于是，所求的体积为 $V_{\bar{x}}=\pi\int_0^{2\pi}[4a^2-a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.$

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P=2\pi\int_A^B y\mathrm{d}s,$$

式中 $\mathrm{d}s$ 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

【2489】 $y^2=2px\quad(0\leqslant x\leqslant x_0)$:(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴.

解 (1) $\sqrt{1+y_x'^2}=\dfrac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$. 于是,所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\ \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2].$$

(2) $\sqrt{1+x_y'^2}=\dfrac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$. 于是,所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}x\sqrt{1+x_y'^2}\mathrm{d}y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}}y^2\sqrt{p^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\right].$$

【2495】 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$:

(1) 绕 Ox 轴; (2) 绕 Oy 轴; (3) 绕直线 $y=2a$.

解 先求 $\mathrm{d}s$:

$$\mathrm{d}s=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t.$$

于是,所求的表面积为

(1) $P_x=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3u\mathrm{d}u=\frac{64}{3}\pi a^2.$

(2) $P_y=2\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=16\pi^2a^2.$

(3) 作平移 $x=\bar{x}$, $y=\bar{y}+2a$ 则 $\bar{y}=-a(1+\cos t)$.

$$P_{\bar{y}}=\left|2\pi\int_0^{2\pi}[-a(1+\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t]\right|^{*)}=\frac{32}{3}\pi a^2.$$

*) 在此取绝对值,是由于被积函数始终不为正之故.

【2498】 $r^2=a^2\cos2\varphi$:(1) 绕极轴; (2) 绕轴 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$; (3)绕轴 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

解 (1) $y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi$, $\mathrm{d}s=\dfrac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

(2) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right)$. 于是,所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

(3) $x=a\sqrt{\cos2\varphi}\cos\varphi,\quad y=a\sqrt{\cos2\varphi}\sin\varphi,\quad ds=\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi.$

注意到在$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$内恒有$x-y\geqslant0$，于是，所求的表面积为

$$P=2\cdot2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos2\varphi}}d\varphi=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)d\varphi=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4\pi a^2.$$

§9. 矩的计算法．质心的坐标

1° **矩** 若密度为$\rho=\rho(y)$的质量M充满了Oxy平面上的某有界连续统Ω（曲线，平面的区域），而$\omega=\omega(y)$为Ω中纵坐标不超过y的部分的相应度量（弧长，面积），则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta y_i|\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)=\int_\Omega\rho y^k d\omega(y)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量M对于Ox轴的k次矩．

作为特殊情形，当$k=0$时得质量M，当$k=1$时得静矩，当$k=2$时得转动惯量．

类似地可定义出质量对于坐标平面的矩．

若$\rho=1$，则相应的矩称为几何矩（线矩，面积矩，体积矩等）．

2° **质心** 均质平面图形S的质心的坐标(x_0,y_0)可由以下公式来定义：

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\qquad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中$M_1^{(y)}$，$M_1^{(x)}$为图形S对于Oy轴和Ox轴的几何静矩．

【2504】 求底半径为r和高为h的均质圆锥对其底平面的静矩和转动惯量（$\rho=1$）．

解 取坐标系如图2504所示，则

$$M_1=\int_0^h xP(x)dx,$$

其中
$$P(x)=\pi y^2=\pi\left[\frac{r}{h}(h-x)\right]^2.$$

于是，所求的静矩和转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2dx=\frac{\pi r^2h^2}{12};$$

$$M_2=\int_0^h x^2P(x)dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2dx=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

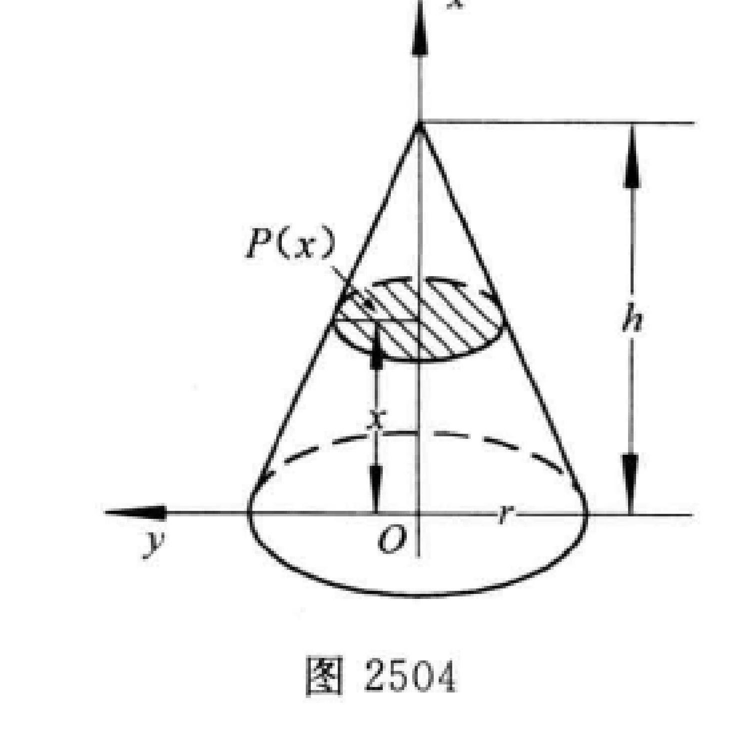


图 2504

【2505】 证明古尔丹第一定理：平面曲线弧C绕此弧所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转面，其面积等于此弧的长度与它的质心所画出的圆周之长的乘积．

证 质心(ξ,η)具有这样的性质，即如把曲线的全部"质量"都集中到它上面，则此质量对于任何一个轴的静矩，都与曲线对此轴的静矩相同．即

$$\xi s=M_y=\int_0^s xds,\quad \eta s=M_x=\int_0^s yds,$$

式中s表示弧长．于是
$$2\pi\eta s=2\pi\int_0^s yds.$$

上式右端是弧C旋转而成的曲面面积，左端$2\pi\eta$表示弧C绕Ox轴旋转时其质心所画出的圆周之长．从而，定理得证．

【2506】 证明古尔丹第二定理：平面图形S绕此图形所在平面上不与它相交的轴旋转而成的旋转体，其体积等于图形S的面积与此图形的质心所画出的圆周之长的乘积．

证 由于 $\eta S=M_x=\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$，所以，

$$2\pi\eta S=\pi\int_a^b y^2\,dx.$$

上式右端即为旋转体的体积，从而，定理得证.

【2509】 求图形 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ $(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 的质心的坐标.

解 首先，我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$.

其次，我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积. 因为 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$，所以，

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔丹第二定理，我们有 $2\pi\eta\,\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2$，$\eta=\frac{4b}{3\pi}$. 在结果中间将 a 和 b 对调即得 $\xi=\frac{4a}{3\pi}$.

于是，所求的质心为 $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$.

【2510】 求半径为 a 的均质半球的质心的坐标.

解 取圆心作为原点，则球的方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$.

设质心为 (ξ,η,ζ)，显见 $\xi=\eta=0$. 而 $V_{半球}=\frac{2\pi a^3}{3}$. 将圆 $y^2+z^2=a^2$绕 Oz 轴旋转，即得球. 又

$$M_1^{(z)}=\int_{(V)}z\,dV=\pi\int_0^a zy^2\,dz=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)\,dz=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8}.$$

于是，所求的质心为 $\left(0,\ 0,\ \frac{3a}{8}\right)$.

【2511】 求对数螺线 $r=ae^{m\varphi}\quad(m>0)$

上由点 $O(-\infty,0)$到点 $P(\varphi,r)$的弧 OP 的质心 $C(\varphi_0,r_0)$的坐标. 当点 P 移动时，点 C 画出怎样的曲线？

解 质心的直角坐标为

$$\xi=\frac{\int_{(l)}x\,ds}{\int_{(l)}ds}=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}r\cos\varphi\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}e^{2m\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}e^{2m\varphi}\,d\varphi}=\frac{ma\,e^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得

$$\eta=\frac{\int_{(l)}y\,ds}{\int_{(l)}ds}=\frac{ma\,e^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是，质心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}\,e^{m\varphi}=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},\quad \tan\varphi_0=\frac{\eta}{\xi}=\frac{2m\tan\varphi-1}{\tan\varphi+2m}=\frac{\tan\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\tan\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$，其中 $\alpha=\arctan\frac{1}{2m}$.

当点 P 移动时，点 $C(\varphi_0,r_0)$画出的曲线为

$$r_0=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\varphi}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\varphi_0+\alpha)},$$

这也是一条对数螺线.

§10. 力学和物理学中的问题

组成适当的积分和并求出其极限,以便求解下列问题:

【2520】 求水对于垂直壁上的压力,这壁的形状为半圆形,半径为 a 且其直径位于水的表面上.

解 为求出水对半圆形的压力,只要计算出作用于四分之一圆上的压力,然后再把它两倍起来.现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形(图 2520).作用于该小扇形上的压力的近似值为

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\ \frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

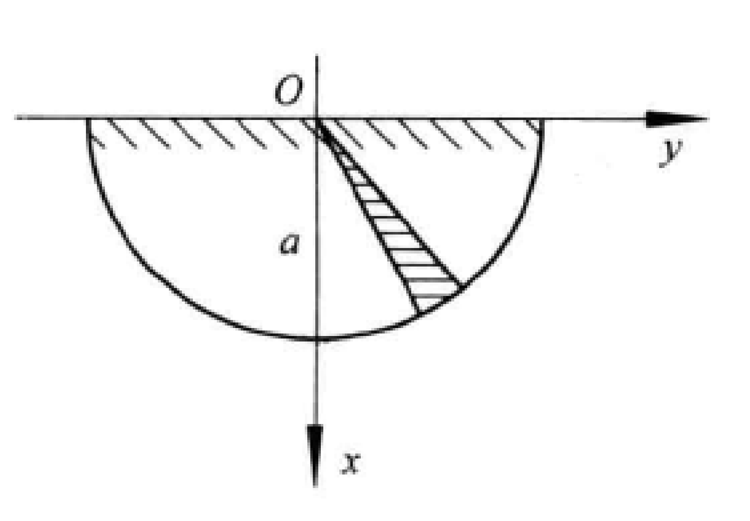


图 2520



其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{2n}$, $\theta_i=\frac{i\pi}{2n}$. 于是,作用于半圆上的压力为

$$P=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}a^2\ \frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2a^3}{3}.$$

写出微分方程并解下列问题:

【2523】 半径为 R 而密度为 δ 的均质球体以角速度 ω 绕其直径旋转.求此球的动能.

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$.不妨设球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

则考察以 $\mathrm{d}z$ 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘,其转动惯量为

$$\mathrm{d}J_z=\frac{1}{2}\pi(R^2-z^2)\delta\ (R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z.$$

从而,球体的转动惯量为

$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2\mathrm{d}z=\frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是,球的动能为

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\delta\omega^2R^5.$$

注 *原题误为球壳,现根据答案予以改正.*

【2524】 线密度 μ_0 为常数的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

解 取坐标系如图 2524 所示,$|AO|=a$.设引力在坐标轴上的投影为 F_x 和 F_y.由于

$$\mathrm{d}F_y=k\frac{m\mu_0\mathrm{d}x}{a^2+x^2}\cos\varphi=-\frac{km\mu_0 a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

于是,

$$F_y=-2km\mu_0 a\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-2km\mu_0 a\left.\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right|_0^{+\infty}=-\frac{2km\mu_0}{a}.$$

图 2524

由对称性知,$F_x=0$.事实上,我们有

$$F_x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{km\mu_0\sin\varphi}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=km\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=0.$$

其中 k 为引力常数.由上述分析知,引力指向 y 轴的负向.

【2525】 计算半径为 a 且面密度 δ_0 为常数的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P,此质点位

于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的直线上，距离 PQ 等于 b.

解 取坐标系如图 2525 所示. 显然，引力指向 y 轴的正向. 对于以 x 为半径的圆环，其质量为 $dm=\delta_0 2\pi x dx$，对质点 P 的引力为

$$dF_y=2km\delta_0\pi\frac{\cos\theta}{b^2+x^2}dx=2km\delta_0\pi\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

于是，所要求的引力为

$$F_y=2km\delta_0\pi\int_0^a\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=2km\delta_0\pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

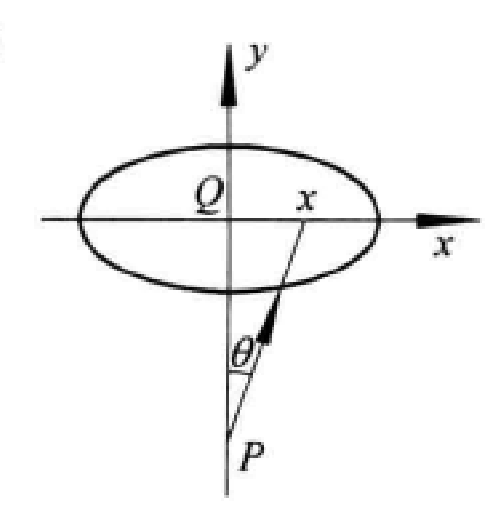


图 2525

【2528】 镭在每一时刻的衰变速度与其现存的量成正比，设镭的量在初始时刻 $t=0$ 有镭 Q_0，经过时间 $T=1600$ 年它的量减少了一半. 求镭的衰变规律.

解 设 Q 为现存的量，按题设有 $\frac{dQ}{dt}=kQ$，其中 k 为比例系数，即 $\frac{dQ}{Q}=kdt$，

两端积分
$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}kdt,$$

从而，
$$k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是，
$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,\qquad \ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}}$$

所以，镭的衰变规律为 $Q=Q_0\,2^{-\frac{t}{1600}}$.

§11. 定积分的近似计算法

1° **矩形公式** 若函数 $y=y(x)$ 在有限的闭区间 $[a,b]$ 上连续且充分多次可微，并且

$$h=\frac{b-a}{n},\ x_i=a+ih\ (i=0,1,\cdots,n),y_i=y(x_i),$$

则
$$\int_a^b y(x)dx=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

式中 $R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$.

2° **梯形公式** 在相同的记号下，有

$$\int_a^b y(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中 $R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi')\quad(a\leqslant\xi'\leqslant b)$.

3° **抛物线公式(辛普森公式)** 命 $n=2k$，得

$$\int_a^b y(x)dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中 $R_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi'')\quad(a\leqslant\xi''\leqslant b)$.

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

【2534】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx\quad(n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{12}=0.2618$，

$x_0=0,\quad y_0=1;$

$x_6=\frac{\pi}{2},\ y_6=0.8660;\qquad \frac{y_0+y_6}{2}=0.9330,$

$x_1=\frac{\pi}{12},\qquad y_1=0.9916;\qquad x_2=\frac{\pi}{6},\qquad y_2=0.9682;$

$x_3=\frac{\pi}{4},\qquad y_3=0.9354;\qquad x_4=\frac{\pi}{3},\qquad y_4=0.9014;$

$x_5=\frac{5\pi}{12},\qquad \underline{y_5=0.8756\quad (+}$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i=4.6722.$$

按梯形公式,得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\ \mathrm{d}x\approx h\left(\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5}y_i\right)=0.2618(0.9330+4.6722)\approx 1.4674.$$

误差为

$$|R_n|=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\cdot 6^2}|y''(\xi)|,$$

式中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$, $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 及 $y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$,依次求导可得 $|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^3}{8\times 12\times 6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<2.59\times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

【2536】 $\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\,\mathrm{d}x\quad(n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0,\qquad y_0=2;$

$x_1=\frac{\pi}{6},\quad y_1=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966;$

$x_2=\frac{\pi}{3},\quad y_2=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871;$

$x_3=\frac{\pi}{2},\quad y_3=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732;$

$x_4=\frac{2\pi}{3},\quad y_4=\sqrt{3+\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}=1.581;$

$x_5=\frac{5\pi}{6},\quad y_5=\sqrt{3+\cos\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}=1.461;$

$x_6=\pi,\qquad y_6=\sqrt{3+\cos\pi}=\sqrt{2}=1.414.$

按辛普森公式,得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{3+\cos x}\ \mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{18}[(2+1.414)+4(1.966+1.732+1.461)+2(1.871+1.581)]$$
$$\approx 5.4025.$$

【2541】 计算 $\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$,精确到 0.001.

解 采用辛普森公式计算,则其误差为

$$R_n(x)=-\frac{1}{180n^4}2e^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)\quad(0<\xi<1),$$

故有
$$|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}2\mathrm{e}\cdot 38.$$

要 $|R_n(x)|<10^{-3}$，只要 $\frac{2\cdot 38\mathrm{e}^1}{180n^4}<10^{-3}$，即只要取 $n=6$.

现取 $n=6$，则有

$x_0=0$, $y_0=1$ $x_1=\frac{1}{6}$, $y_1=\mathrm{e}^{\frac{1}{36}}=1.0282$;

$x_2=\frac{1}{3}$, $y_2=\mathrm{e}^{\frac{1}{9}}=1.1175$; $x_3=\frac{1}{2}$, $y_3=\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}=1.2840$

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=\mathrm{e}^{\frac{4}{9}}=1.5596$; $x_5=\frac{5}{6}$, $y_5=\mathrm{e}^{\frac{25}{36}}=2.0026$;

$x_6=1$, $y_6=\mathrm{e}=2.7183$.

于是，
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]\approx 1.463.$$

第五章 级 数

§1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° **一般概念** 对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \tag{1}$$

若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S \quad (\text{级数的和}),$$

式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则称级数(1)为收敛的. 反之，则称级数(1)为发散的.

2° **柯西准则** 级数(1)收敛的充分必要条件为：对于任何的 $\varepsilon>0$，都存在数 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时，不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

成立. 特别是，若级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3° **比较判别法 Ⅰ** 设除级数(1)外，还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots. \tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$ 时，不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立，则：1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛；2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是，当 $n\to\infty$ 时，若 $a_n\sim b_n$，则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° **比较判别法 Ⅱ** 若

$$a_n=O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^*,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $p\leqslant1$ 时级数(1)发散.

5° **达朗贝尔判别法** 若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

6° **柯西判别法** 若 $a_n\geqslant0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

7° **拉比判别法** 若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛；(ⅱ)当 $p<1$ 时级数(1)发散.

---

* 记号 O^* 的意义参阅第一章§6,1°.

8° **高斯判别法** 若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中$|\theta_n|<C$而$\varepsilon>0$,则(ⅰ)当$\lambda>1$时级数(1)收敛;(ⅱ)当$\lambda<1$时级数(1)发散;(ⅲ)当$\lambda=1$时,若$\mu>1$则级数(1)收敛;若$\mu\leqslant 1$则级数(1)发散.

9° **柯西积分判别法** 若$f(x)$ $(x\geqslant 1)$是非负不增函数,则

$$\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}f(n)\quad\text{与}\quad\text{积分}\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

同时收敛或同时发散.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和:

【2546】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots.$

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$,即所给级数收敛,且其和为$\frac{2}{3}$.(以下有关各题省略这两句话)

【2552】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

提示 $S_n=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})\\&\quad+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$.

【2554】 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则把该级数的各项在不变更其先后次序的情况下分别组合起来,所得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\quad(\text{其中 }A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\quad(p_1=1,\ p_1<p_2<\cdots))$$

也收敛且有相同的和.反之不真.举出例子.

证明思路 注意到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 的前n项之和为 $l_n=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k=\sum\limits_{k=1}^{p_{n+1}-1}a_k$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前$p_{n+1}-1$项之和 $S_{p_{n+1}-1}=\sum\limits_{k=1}^{p_{n+1}-1}a_k$,故 $l_n=S_{p_{n+1}-1}$.由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性,即知 $\lim\limits_{n\to\infty}l_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{p_{n+1}-1}=S$,其中$S$为定值.于是,命题获证.

反之不真.例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$ 发散,但按下述方法组成的级数$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$ 却收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和数列为 $l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots$，则 $l_n = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} a_k$.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故其部分和数列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S，因此，

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和. 反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

研究下列级数的收敛性：

【2562】 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

提示 注意 $0<\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

解 由于 $0<\frac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

【2565】 证明：由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证明思路 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$，其中 d 为公差. 可以从下面三种情况来证明命题.

(1) $d>0$，总存在正整数 n_0，使有 $a<(n_0-1)d$，则当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$. 于是，只需注意到

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 发散.

(2) $d=0$，则 $a\neq0$，该级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}$ 显然发散.

(3) $d<0$. 将此级数的各项乘以 -1，即化为 $d>0$ 的情形.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$，其中 d 为公差.

当 $d>0$ 时，总存在正整数 n_0，使 $a<(n_0-1)d$，则当$n\geqslant n_0$时，有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$. 于是，

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$ 发散，因而，级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 发散，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 也发散.

当 $d=0$ 时，a 不可能为零，此时级数 $\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\cdots$ 显然发散.

当 $d<0$ 时，将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d>0$ 的情形，于是，这级数也发散.

总上所述，不论 d 为何值，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

【2569】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

证明思路 首先，只要注意 $0\leqslant2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$，第一个结果即获证. 其次，由 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+2a_nb_n+b_n^2$，

易证第二个结果. 对于最后一个结果, 只要令 $b_n=\frac{1}{n}$, 利用第一个结果即获证.

证 由于 $0\leqslant 2|a_nb_n|\leqslant a_n^2+b_n^2$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛.

其次, 由于 $(a_n+b_n)^2=a_n^2+b_n^2+2a_nb_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 皆收敛, 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 也收敛.

最后, 设 $b_n=\frac{1}{n}$, 利用第一个结果即证得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

【2572】 若当 $p=1,2,3,\cdots$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛?

提示 不一定收敛. 例如, $a_n=\frac{1}{n}$.

解 若当 $p=1,2,3\cdots$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0, \tag{1}$$

并不一定有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 例如, 取 $a_n=\frac{1}{n}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 但却有

$$0<a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}<\frac{p}{n+1},$$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{p}{n+1}=0$, 故对于一切 p, (1) 式均成立.

这个事实与柯西准则并不矛盾, 因为在柯西准则中, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 存在数 $N=N(\varepsilon)$, 使当 $n>N$ 和 $p>0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 其中的 N 只依赖于 ε, 而与 p 无关. 本题的叙述中, 条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用柯西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

【2574】 $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$.

提示 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 以及有 $|S_{n+p}-S_n|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$.

证 $|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$. (1)

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 故按柯西准则, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 总存在正整数 N, 使当 $n>N$ 时, 对任意正整数 p, 有

$$\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}<\varepsilon. \tag{2}$$

由 (1) 式及 (2) 式得知, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$ 对一切正整数 p 皆成立.

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

利用柯西准则, 证明下列级数的发散性:

【2577】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

证明思路 不论 n 多大, 若令 $p=3n$, 则有

$$|S_{3n+p}-S_{3n}|=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}$$
$$>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{6}.$$

解 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{6}$. 不论 n 多大，若令 $p=3n$，则有

$$|S_{3n+p}-S_{3n}|=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n}$$
$$>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+3}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}-\frac{1}{6n}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{ 项}}\right)=\frac{1}{6}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}\right)$ 发散.

运用达朗贝尔判别法、柯西判别法或比较判别法，研究下列级数的收敛性：

【2585】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$.

提示 利用达朗贝尔判别法并利用 63 题的结果.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n=1}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

【2586】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

提示 利用柯西判别法及 65 题的结果：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\ \sqrt[n]{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

【2587】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

提示 注意通项 $a_n\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}\to e^{-1}$，并利用比较判别法.

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}\geqslant\frac{n^n\cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}>0$，对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\sqrt[n]{n}$. 由于其通项趋于 $\frac{1}{e}\neq0$，故它是发散的. 因此，原级数也是发散的.

注意 若用达朗贝尔判别法，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，无明确结论，此时还应改用高斯判别法.

【2590】 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$.

提示 注意$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4}$,利用数学归纳法,可证通项 $a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$,并利用达朗贝尔判别法.

解 $$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}=2\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{4}}=2\sin\frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{8}}=2\sin\frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法,可证得通项为 $a_n=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1,$$

故级数收敛.

【2591】 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q\ (a_n>0)$,则 $a_n=o(q_1^n)$,其中 $q_1>q$.

证 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$,故利用 141 题的结果,即得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$.

令 $\varepsilon=\frac{1}{2}(q_1-q)>0$,则由上式知存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $|\sqrt[n]{a_n}-q|<\varepsilon$, 从而有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon=\lambda q_1 \quad (n\geqslant n_0),$$

其中 $\lambda=\frac{q_1+q}{2q_1}<1$. 利用 $\lambda^n=o\ (1)$,即证得 $a_n=\lambda^n q_1^n=o(q_1^n)$.

【2592】 证明:若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1\ (a_n>0)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

逆命题不成立. 研究例子$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$.

证 取 $0<\varepsilon<1-q$,由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$,故存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon=l<1$. 从而,

$$0<a_n\leqslant a_{n_0}l^{n-n_0} \quad (n\geqslant n_0).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}l^{n-n_0}$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,从而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

反之不真,例如,级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots$ 显然是收敛的. 但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}, & n=2m+1,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^m, & n=2m,\end{cases}$$

故有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=+\infty$.

【2593】 证明:若对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n>0)$,存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q, \tag{1}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q \tag{2}$$

也存在.

逆命题不成立:若极限(2)存在,则极限(1)可以不存在.研究例子 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.

证 利用 141 题的结论,本题的前半部分即得证.

反之不真.例如,对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2\cdot\sqrt[n]{2}}=\frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3+(-1)^{n+1}}{2[3+(-1)^n]}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & n\text{ 为偶数};\\ 1, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

故极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$不存在.

【2594】 证明:若$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q\ (a_n\geqslant 0)$,则 (1) 当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;(2) 当 $q>1$ 时级数发散(柯西判别法的推广).

证 (1) 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}(1-q)$. 由于$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q$,故存在 n_0,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有 $0<\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon$. 从而,

$$0<\sqrt[n]{a_n}<\frac{q+1}{2}\quad(n\geqslant n_0)\quad\text{或}\quad 0<a_n<\left(\frac{q+1}{2}\right)^n\quad(n\geqslant n_0).$$

由于 $0\leqslant q<1$,故 $0<\frac{q+1}{2}<1$. 又因级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{q+1}{2}\right)^n$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}a_n$ 收敛,从而,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 由于 $q>1$,故对于数列 $\{a_n\}$,必有无穷多个 a_n,能使不等式$\sqrt[n]{a_n}>1$ 成立,从而,$a_n>1$.

于是,当 $n\to\infty$时,a_n 不可能趋于零,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

利用拉比判别法和高斯判别法,研究下列级数的收敛性:

【2599】 $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots\quad(a>0,b>0,d>0)$.

提示 注意$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{b-a}{d}$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{b+nd}{a+nd}$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b-a)n}{a+nd}=\frac{b-a}{d}$,

故当$\frac{b-a}{d}>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\cdots[b+(n-1)d]}$收敛.

【2603】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}\quad(p>0,q>0)$.

提示 注意$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=q+1-p$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\frac{1+n}{p+n}-1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1+x)^{q+1}}{1+px}-1}{x}=q+1-p,$$

故当 $q+1-p>1$ 即 $q>p$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$收敛.

【2606】 证明：若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p$，则 $a_n=o\left(\dfrac{1}{n^{p-\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon>0)$.

证 下面记 $\alpha_n,\alpha_n',\beta_n,\beta_n',\beta_n'',\varepsilon_n$ 为无穷小量，即

$$\alpha_n=o(1),\alpha_n'=o(1),\ \beta_n=o(1),\ \beta_n'=o(1),\ \beta_n''=o(1),\ \varepsilon_n=o(1)\ (n\to\infty).$$

由题设知，当 $n\to\infty$ 时有 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{p}{n}+\dfrac{\alpha_n}{n}$. 取对数，即得

$$\ln a_n-\ln a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}\right)=\frac{p}{n}+\frac{\alpha_n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

令 $n=1,2,\cdots,N-1$ 并求和，则得

$$\ln a_1-\ln a_N=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}(p+\alpha_n').$$

由 143 题(在其中令 $x_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{\alpha_n'}{n}$，$y_N=\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{1}{n}$)知

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{\alpha_n'}{n}\right)}{\left(\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{1}{n}\right)}=\lim_{N\to\infty}\alpha_N'=0.$$

又由 146 题知 $\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{1}{n}=C+\ln(N-1)+\varepsilon_n$，其中 C 是欧拉常数，$\varepsilon_N\to0$. 于是，令

$$\beta_N=\frac{\left(\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{\alpha_n'}{n}\right)}{\left(\sum\limits_{n=1}^{N-1}\dfrac{1}{n}\right)},$$

有

$$\ln a_1-\ln a_N=(p+\beta_N)\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}=(p+\beta_N)[C+\ln(N-1)+\varepsilon_N]=(p+\beta_N)\ln(N-1)+k+\beta'_N,$$

其中 $k=Cp$ 为常数. 于是，

$$\ln a_N=-(p+\beta_N)\ln(N-1)+k'-\beta'_N,$$

其中 $k'=\ln a_1-k$ 为常数，从而，

$$a_N=\mathrm{e}^{k'-\beta_N'}(N-1)^{-(p+\beta_N)}=\mathrm{e}^{k'-\beta_N'}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}N^{\beta_N''}N^{-p}.$$

其中 $\beta''_N=-\beta_N$. 由于 $\beta''_N=o(1)$，故对于任给的 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，有 $|\beta_N''|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而，$N^{\beta_N''}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-(p+\beta_N)}=1,$$

即知：当 N 充分大时，有

$$0<a_N\leqslant k''N^{\frac{\varepsilon}{2}}N^{-p}=O\left(\frac{1}{N^{p-\frac{\varepsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是，得 $a_N=o\left(\dfrac{1}{N^{p-\varepsilon}}\right)$. 本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶，从而研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性：

【2608】 $a_n=\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

提示 注意 $a_n=O^*\left(\dfrac{1}{n^{p+1}}\right)$.

解 由于 $a_n\geqslant0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}}=\pi \quad 或 \quad a_n=O^*\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right),$$

故仅当 $1+p>1$ 即 $p>0$ 时，级数收敛.

【2614】 $a_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

提示 注意 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

解 由于 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}=O^*\left(\dfrac{1}{n}\right)$，故级数发散.

【2615】 证明：若存在 $\alpha>0$ 使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha\ (a_n>0)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n>0)$ 收敛；若 $n\geqslant n_0$ 时 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$，则此级数发散（对数差别法）.

证明思路 分别注意 $0<a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 及 $a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$，利用比较判别法，命题即获证.

证 若 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\geqslant 1+\alpha$，则 $\dfrac{1}{a_n}\geqslant n^{1+\alpha}$ 或 $a_n\leqslant\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

若 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\leqslant 1$，则 $\dfrac{1}{a_n}\leqslant n$ 或 $a_n\geqslant\dfrac{1}{n}$. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

研究具有如下通项的级数的收敛性：

【2618】 $a_n=\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\quad(n>1)$.

解 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}$. 由洛必达法则知

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln\ln x)^2}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\ln x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\ln x}=0,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln\ln n)^2}{\ln n}=0$，从而，存在 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$，利用 2615 题的结论，即知级数发散.

利用柯西积分判别法，研究具有如下通项的级数的收敛性：

【2620】 $a_n=\dfrac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}\quad(n>2)$.

解 易知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$（不论 p,q 为何实数）的导数当 x 充分大时是负的，故当 x 充分大时，$f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p=1$，则

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^q}=\begin{cases}\left.\dfrac{1}{(1-q)(\ln\ln x)^{q-1}}\right|_3^{+\infty}, & q\neq 1,\\[2ex] \left.\ln\ln\ln x\right|_3^{+\infty}, & q=1.\end{cases}$$

当 $q>1$ 时收敛，$q\leqslant 1$ 时发散，故由柯西积分判别法知，原级数当 $p=1,q>1$ 时收敛，$p=1,q\leqslant 1$ 时发散.

若 $p\neq 1$，作代换 $\ln x=t$，有

$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}=\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}.$$

当 $p>1$ 时，取 $\eta>0$ 使 $p-\eta>1$，由于(不论 q 为何实数)

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p-\eta}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t^\eta(\ln t)^q}=0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$ 收敛，从而，原级数收敛；当 $p<1$ 时，取 $\tau>0$ 使 $p+\tau<1$. 由于

$$\lim_{t\to+\infty}t^{p+\tau}\frac{1}{t^p(\ln t)^q}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^\tau}{(\ln t)^q}=+\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^p(\ln t)^q}$ 发散. 从而，原级数发散.

综上所述，可知原级数仅当 $p=1$，$q>1$ 及 $p>1$，q 任意时收敛.

【2622】 证明：设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项单调递减，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证明思路 令 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，由不等式

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n}$$

和不等式

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^n a_{2^n})>0,\end{aligned}$$

命题即获证.

证 设 $S_{2^n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2^n}$，则因 $a_1>a_2>\cdots>a_{2^n}>a_{2^n+1}>\cdots>0$，故得

$$0<S_{2^n}<a_1+(a_2+a_3)+\cdots+(a_{2^n}+\cdots+a_{2^{n+1}-1})<a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n},\tag{1}$$

且有

$$\begin{aligned}S_{2^n}&=a_1+a_2+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})\\&>\frac{1}{2}a_1+a_2+2a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}(a_1+2a_2+2^2a_{2^2}+\cdots+2^n a_{2^n})>0.\end{aligned}\tag{2}$$

由(1)式得知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；由(2)式得知：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散. 由此本题获证.

注 在此命题中，用作比较的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 可以用更普遍的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}m^n a_{m^n}$ 来代替，其中 m 为任一正整数. 证法类似.

【2624】 证明叶尔马科夫判别法：设 $f(x)$ 为单调递减的正值函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda.$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 在 $\lambda<1$ 时收敛，在 $\lambda>1$ 时发散.

证 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)}{f(x)}=\lambda$，故对任给的 $\varepsilon>0$，总存在 $N>0$，使当 $x>N$ 时，有

$$\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)<(\lambda+\varepsilon)f(x).$$

当 $\lambda<1$ 时，取 ε 使 $\lambda+\varepsilon=\rho<1$，则有 $\mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)<\rho f(x)$. 于是，当 $m>N$ 时有

$$\int_N^m \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x<\rho\int_N^m f(x)\mathrm{d}x,$$

即 $\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx$，也即

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^m f(x)dx-\rho\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx=\rho\int_N^{e^N} f(x)dx-\rho\int_m^{e^m} f(x)dx.$$

由于 N 充分大且 $m>N$，故 $m<e^m$. 又因 $f(x)>0$，故 $\int_m^{e^m} f(x)dx>0$. 从而，

$$(1-\rho)\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\rho\int_N^{e^N} f(x)dx,\quad \int_{e^N}^{e^m} f(x)dx<\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx.$$

固定 N，让 $m\to+\infty$，取极限即得

$$\int_{e^N}^{+\infty} f(x)dx\leqslant\frac{\rho}{1-\rho}\int_N^{e^N} f(x)dx=\text{常数}.$$

于是，由柯西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda>1$ 时，则取 N 为充分大，可得

$$e^x f(e^x)\geqslant f(x)\quad (x>N).$$

从而，$\int_N^m e^x f(e^x)dx\geqslant\int_N^m f(x)dx$，即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x)dx\geqslant\int_N^m f(x)dx\quad\text{或}\quad\int_{e^N}^m+\int_m^{e^m}\geqslant\int_N^{e^N}+\int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x)dx\geqslant\int_N^{e^N} f(x)dx\quad (m>N).$$

今设 $e_0=N+1$，$e_1=e^{e_0}$，$e_2=e^{e_1}$，…，$e_{k+1}=e^{e_k}$，…，并分别取 $m=e_0,e_1,e_2,\cdots$，则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)dx\geqslant\int_N^{e^N} f(x)dx,\quad \int_{e_2}^{e_3} f(x)dx\geqslant\int_N^{e^N} f(x)dx,\quad\cdots,\quad \int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x)dx\geqslant\int_N^{e^N} f(x)dx,\cdots$$

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x)dx\geqslant\lim_{n\to\infty} n\int_N^{e^N} f(x)dx=+\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x)dx$ 发散，故由柯西积分判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性：

【2626】 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$.

提示 注意 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}}=2$.

解 由于 $0<\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}=\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^a(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}}=2,$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ 仅当 $a+\frac{1}{2}>1$（即 $a>\frac{1}{2}$）时收敛，即知原级数仅当 $a>\frac{1}{2}$ 时收敛.

【2628】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

解题思路 注意 $\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}=\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$.

分别考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$，它们均为正项级数. 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4}\quad\text{及}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32}.$$

即知原级数发散.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-1\right)+\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)\right]$.

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)\quad\text{及}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

它们都是正项级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{4},\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cot\frac{n\pi}{4n-2}\right)$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\frac{n\pi}{4n-2}-\sin\frac{n\pi}{2n+1}\right)$ 发散.

【2631】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$.

提示 利用拉比判别法可获解.

解 $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n(e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1)=\frac{e^{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}-1}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}\cdot n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}=+\infty,$$

利用 $\lim\limits_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=+\infty$，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

【2643】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}\quad(a>0)$.

解 $a_n=a^{-(b\ln n+c\ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时，显然 $a_n=1$，因而，级数发散. 当 $a\neq1$ 时，考虑

$$\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=(b+c\ln n)\ln a.$$

利用 2615 题的结果（对数差别法），即知：

(1) 当 $c=0$，$b\ln a>1$，即 $a^b>e$ 时，原级数收敛；而当 $c=0$，$b\ln a\leqslant1$，即 $a^b\leqslant e$ 时，原级数发散.

(2) 当 $c\neq0$，$c\ln a>0$，即 $a^c>1$ 时，原级数收敛；而当 $c\neq0$，$c\ln a<0$ 即 $a^c<1$ 时，原级数发散.

综上所述，仅当 $c=0$，$a^b>e$ 及 $a^c>1$ 时，原级数收敛.

研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性，其通项如下：

【2647】 $u_n=\dfrac{1}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}$.

提示 注意 $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n x\,dx}=\dfrac{2}{n^2}$.

解 由于 $0<u_n\leqslant\dfrac{1}{\int_0^n x\,dx}=\dfrac{2}{n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

用相应的级数来代替数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，然后研究它们的收敛性，设：

【2653】 $x_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$.

解题思路 注意

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

解 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$$=-\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，记 $x_0=0$，故 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})$ 当 $n\to\infty$ 时的极限存在，即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

【2655】 对于级数 (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$，大约应取多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5}.

解 (2) 余项 $R_N=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\dfrac{2^n}{(n+1)!}$. 利用 74 题的不等式 $k!>\left(\dfrac{k}{e}\right)^k(k=1,2,\cdots)$，于是，当 $n\geqslant N+1$，有

$$\frac{2^n}{(n+1)!}<2^n\left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{2e}{n+1}\right)^n\leqslant\frac{1}{N+2}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^n=\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}.$$

因此得

$$R_N<\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{n-(N+1)}=\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^l.$$

取 $N\geqslant4$，则 $\dfrac{2e}{N+2}<1$，此时又有

$$R_N<\frac{1}{2e}\left(\frac{2e}{N+2}\right)^{N+2}\frac{1}{1-\frac{2e}{N+2}}.$$

取 $N=11$，则有 $R_N=\dfrac{1}{2e}\left(\dfrac{2e}{13}\right)^{13}\dfrac{1}{1-\frac{2e}{13}}=\Delta_N$. 利用对数对于 Δ_N 作数值计算，有

$$\Delta_N\leqslant\frac{13}{15.126e}\left(\frac{2e}{13}\right)^{13}\approx10^{-5.42266}<10^{-5},$$

即此级数取 $N\geqslant11$ 项求和就可保证精确到 10^{-5}.

§2. 变号级数收敛性的判别法

1° **级数的绝对收敛性** 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛，若

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛，绝对收敛级数的和与各项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性，只需把对于同号级数收敛性的已知判别法应用于级数(2)即可.

若级数(1)收敛，而级数(2)发散，则称级数(1)为*条件收敛*(*非绝对收敛*). 通过改变各项的顺序，可使条件收敛级数的和等于任何数(*黎曼定理*).

2° **莱布尼茨判别法** 若交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots \quad (b_n \geqslant 0)$$

满足条件 1) $b_n \geqslant b_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 和 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，则该级数收敛（一般说来，非绝对收敛）. 在这种情形下，对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leqslant \theta_n \leqslant 1).$$

3° **阿贝尔判别法** 若：1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；2) 数 b_n $(n=1,2,\cdots)$ 构成单调有界数列，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \tag{3}$$

收敛.

4° **狄利克雷判别法** 若：1) 全体部分和 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 是有界的；2) 当 $n\to\infty$ 时 b_n 单调地趋近于零，则级数(3)收敛.

【2656】 证明：可把非绝对收敛级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来，使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数. 利用柯西准则，即知：

对于给定的 $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}$，存在 N_1，使对于任意正整数 m_1，有 $|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \varepsilon_1$；

对于给定的 $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2^2}$，存在 N_2（可取 $N_2 > N_1$），使对于任意正整数 m_2，有 $|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \varepsilon_2$；

⋮

对于给定的 $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$，存在 N_k（可取 $N_k > N_{k-1}$），使对于任意正整数 m_k，有 $|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \varepsilon_k$；

⋮

令

$$A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1}, \quad A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2}, \quad \cdots, \quad A_k = a_{N_k+1} + a_{N_k+2} + \cdots + a_{N_{k+1}}, \quad \cdots$$

则有 $|A_k| < \varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$ $(k=1,2,\cdots)$，且 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项在不变更其顺序的情况下分群组合起来所得

的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$$

收敛，故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|A_k|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k$ 绝对收敛. 证毕.

【2658】 证明：若将收敛级数的各项重新排列，使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置（m 为预先给定的数），则级数的和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，当然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 又记重排出的新级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，再记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 N 项部分和为 $S_N=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n$，记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的前 N 项部分和为 $\sigma_N=\sum\limits_{n=1}^{N}b_n$. 当然有 $\lim\limits_{N\to\infty}S_N=S$. 今证 σ_N 的极限也存在，且等于 S.

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N=\sigma_N-S_N.$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2m}>0$，则存在 N_1，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $|a_n|<\varepsilon_1$. 今取

$$N\geqslant N_1+2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 $\widetilde{S}_k$，记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\widetilde{\sigma}_k$，则有

$$\Delta_N=\sum_{b_n\in\widetilde{\sigma}_N}b_n-\sum_{a_n\in\widetilde{S}_N}a_n.$$

今从 a_1 查起，看 $a_1,a_2,\cdots$ 至 a_N，注意每一个 a_i 被重排成 b_j 时，i 与 j 的标号差不超过 m. 因此，对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j=a_i$. 反过来，从 b_1 查起，看 $b_1,b_2,\cdots$ 至 b_N，对每一个 b_j 总可以在 a_j 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i=b_j$. 但也可能且只有那种可能：最后一段不超过个 m 元素的 a_i，即 $a_N,a_{N-1},\cdots,a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后，从而，在 $\widetilde{\sigma}_N$ 内找不到搬迁元素，但个数（设为 r 个）不超过 m. 同样，也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j，即 $b_N,b_{N-1},\cdots,b_{N-m}$ 之内若干个元素在 $\widetilde{S}_n$ 内找不到搬迁元素，但个数（设为 s 个）不超过 m. 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是，

$$|\Delta_N|=\left|\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\bar{\in}\widetilde{S}_N}}b_n-\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\bar{\in}\widetilde{\sigma}_N}}a_n\right|\leqslant\sum_{\substack{b_n\in\widetilde{\sigma}_N\\ b_n\bar{\in}\widetilde{S}_N}}|b_n|+\sum_{\substack{a_n\in\widetilde{S}_N\\ a_n\bar{\in}\widetilde{\sigma}_N}}|a_n|<s\varepsilon_1+r\varepsilon_1\leqslant m\varepsilon_1+m\varepsilon_1=\varepsilon.$$

上式中 a_n 的下标 $n\geqslant N_1+m>N_1$，故 $|a_n|<\varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n\geqslant N_1+m$，记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来，其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m，故此时 $i\geqslant N_1$，因而，此时 $|b_n|=|a_i|<\varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N\to\infty}\Delta_N=0,\quad 也即有\quad \lim_{N\to\infty}\sigma_N=\lim_{N\to\infty}S_N=S.$$

从而，命题得证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2660】 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$.

证明思路 显然该级数绝对收敛，从而它是收敛的，记其和为 S. 可考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}.$$

解 显然该级数绝对收敛,从而,它是收敛的,记其和为 S. 考虑一个特殊的部分和

$$S_{3n}=\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-3}}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-2}}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{3n-1}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{3n}}}{1-\frac{1}{2^3}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2^3}}=\frac{10}{7}$.

【2662】 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$. 将该级数的各项重排,得到下列级数:

(1) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$;

求级数的和.

提示 可考虑特殊的部分和 S_{3n},S_{3n+1} 及 S_{3n+2}.

解 (1) 考虑部分和 S_m. 当 $m=3n$ 时,有

$$S_{3n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

记 $\sigma_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $l_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,则 $l_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$, $l_{4n}=\sigma_{4n}-\sigma_{2n}$,且有

$$S_{3n}=\sigma_{4n}-\frac{1}{2}\sigma_{2n}-\frac{1}{2}\sigma_n=(\sigma_{4n}-\sigma_{2n})+\frac{1}{2}(\sigma_{2n}-\sigma_n)=l_{4n}+\frac{1}{2}l_{2n}.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}l_{4n}=\lim\limits_{n\to\infty}l_{2n}=\ln 2$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2$. 易证当$m=3n+1$ 及 $m=3n+2$ 时,有

$$S_{3n+1}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad S_{3n+2}=S_{3n}+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n\to\infty$时,它们与 S_{3n}有相同的极限,从而,$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=\frac{3}{2}\ln 2$,即原级数收敛,且其和为$\frac{3}{2}\ln 2$.

【2663】 把收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$的各项重排,使它成为发散的.

解题思路 可这样重排:先取两个正项,然后取一个负项,得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots$$

将上述重排后所得的级数每相邻三项结合而得一个新级数,并注意

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0.$$

解 我们这样进行重排:先取两个正项,然后取一个负项,得

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\cdots \tag{1}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数,如果它发散,当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},\quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}>\frac{2}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}},$$

因而，

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}}>0 \quad (n=1,2,\cdots).$$

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$ 发散，从而，重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性：

【2665】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$.

解 $a_n=(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1,$$

故原级数绝对收敛，从而也是收敛的.

【2667】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{n\pi}{4}$.

提示 利用狄利克雷判别法.

解 由于当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\ln^{100}n}{n}$ 单调下降趋于零，且

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{4}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{8}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{8}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

为有界的，故按狄利克雷判别法即知原级数收敛.

【2674】 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)>0$，则交错级数 $b_1-b_2+b_3-b_4+\cdots+(-1)^{n-1}b_n+\cdots\ (b_n>0)$ 收敛.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=A$，我们取 $\varepsilon>0$，使得 $A-\varepsilon>0$，则存在正整数 N，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$A-\varepsilon<n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)<A+\varepsilon \quad 或 \quad 1<1+\frac{A-\varepsilon}{n}<\frac{b_n}{b_{n+1}}<1+\frac{A+\varepsilon}{n}.$$

因此，当 $n\geqslant N$ 时，$b_n>b_{n+1}$，即 b_n 单调下降.

下面证明 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 事实上，利用 2606 题的结果即知，

$$b_n=o\left(\frac{1}{n^{A-\varepsilon}}\right).$$

例如，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，于是，当 $n\to\infty$ 时，有 $b_n\to0$.

因此，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

【2675】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$.

提示 当 $p\leqslant0$ 时，级数发散. 当 $0<p\leqslant1$ 时，级数条件收敛. 当 $p>1$ 时，级数绝对收敛.

解 当 $p<0$ 时，由于 $n^{-p}\to+\infty$，故级数发散.

当 $p=0$ 时，由于 $n^{-p}=1$，故级数也发散.

当 $0<p\leqslant1$ 时，由于 $a_n>a_{n+1}$ 且 $a_n\to0$（其中 $a_n=\frac{1}{n^p}$），故此交错级数收敛；然当 $0<p\leqslant1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散，故此时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p>1$ 时，由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

【2686】 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$.

解 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n\to\infty$ 时单调下降趋于零，又部分和

$$\left|\sum_{m=2}^{n}\sin\frac{m\pi}{12}\right|=\left|\frac{\cos\frac{\pi}{24}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{12}}{2\sin\frac{\pi}{24}}\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}$$

有界，故级数收敛. 但是，

$$\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{\sin^2\frac{n\pi}{12}}{\ln n}=\frac{1-\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n}=\frac{1}{2\ln n}-\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{2\ln n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}\right|$ 发散. 从而，原级数仅为条件收敛.

研究下列级数的收敛性：

【2693】 $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

解 当 $p>1$，$q>1$ 时，显然级数绝对收敛.

当 $0<p=q\leqslant1$ 时，显然级数并非绝对收敛，但由莱布尼茨判别法知级数收敛. 因此，当 $0<p=q\leqslant1$ 时，级数条件收敛.

当 p、q 中有一个小于或等于零时，由于通项不趋于零（当 $n\to\infty$），故级数发散.

【2698】 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}\quad(0<x<\pi)$$

对全体参数 (p,x) 定出：(1)绝对收敛域；(2)非绝对收敛域.

解 当 $p>1$ 时，由于

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p},\quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}\quad(0<x<\pi),$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，故这两个级数当 $p>1$ 时，对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0<p\leqslant1$ 时，由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零，且部分和 $\sum\limits_{n=1}^{N}\cos nx$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin nx$ 均有界 $(0<x<\pi)$，故由狄利克雷判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散，事实上，

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},\quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant1$ 时发散到 $+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0<p\leqslant1$ 时收敛，故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos nx|}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0<p\leqslant 1$ 时均发散. 因此, 当 $0<p\leqslant 1$ 时, 对于 $(0,\pi)$ 内任一 x 值, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛. 当 $p\leqslant 0$ 时, 两级数显然发散.

总之, 当 $0<x<\pi$ 时, 两级数的(1)绝对收敛域为 $p>1$; (2)条件收敛域为 $0<p\leqslant 1$.

【2703】 证明: 对于每一个 $p>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先, 由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^p}\right]$$

中的每一个括号内的数大于零, 故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调递增的数列. 又因

$$S_{2n}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5^p}\right)-\cdots-\left[\frac{1}{(2n-2)^p}-\frac{1}{(2n-1)^p}\right]-\frac{1}{(2n)^p}<1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的数列. 从而知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p>0$ 时是收敛的, 故对于数列 $\{S_{2n}\}$, 它的极限与级数的和相等, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\leqslant 1\quad (p>0)$$

(对于 $p=1$, 此级数的和为 $\ln 2$).

其次, 我们证明此和不小于 $\frac{1}{2}$, 仍考虑前 $2n$ 项的部分和 $\widetilde{S}_{2n}$, 则有 $S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\widetilde{S}_{2n}$, 其中

$$\widetilde{S}_{2n}=\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(2k-1)^p}-\frac{1}{(2k)^p}\right]=\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0<\theta_k<1$ $(k=2,3,\cdots,n)$. 由于 $p>0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}}\geqslant\frac{1}{(2k)^{p+1}}\quad (k=2,3,\cdots),$$

即得
$$\widetilde{S}_{2n}\geqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{p}{(2k)^{p+1}}=\frac{p}{2^{p+1}}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^{p+1}}\geqslant\frac{p}{2^{p+1}}\left[\int_2^n\frac{\mathrm{d}x}{x^{p+1}}+\frac{1}{n^{p+1}}\right]=\frac{p}{2^{p+1}}\left[-\frac{1}{px^p}\Big|_2^n+\frac{1}{n^{p+1}}\right]$$
$$=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}+\frac{p}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^{p+1}}=\frac{1}{2^{2p+1}}-\frac{1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=\frac{1}{2^{2p+1}}+\Delta_n,$$

此处

$$\Delta_n=\frac{-1}{2^{p+1}}\cdot\frac{1}{n^p}\left(1-\frac{p}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^p}\right)\quad (当\ n\to\infty 时).$$

于是, 对任给的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N_0, 使当 $n\geqslant N_0$ 时, 有 $|\Delta_n|<\varepsilon$. 这时有

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2^p}+\widetilde{S}_{2n}\geqslant 1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}-\varepsilon.$$

但当 $p>0$ 时, $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2}$, 这是因为 $2^p+\frac{1}{2^p}>2$, 故得

$$1+\frac{1}{2^{2p}}>\frac{2}{2^p}\quad 或\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p+1}}>\frac{1}{2^p}.$$

从而, $S_{2n}>\frac{1}{2}-\varepsilon$, 故收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S=\lim_{n\to\infty}S_{2n}\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性, 即得 $S\geqslant\frac{1}{2}$. 综上所述, $\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant 1$.

§3. 级数的运算

级数的和与积 我们定义：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$，

式中 $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛，则等式(1)并非仅有形式上的意义；至于等式(2)，则要求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 二者收敛，并且其中最少有一个是绝对收敛的.

【2706】 若两个级数，(1)一个收敛，而另一个发散；(2)两个都发散，则关于这两个级数的和可下何种断言？

提示 (1)一定发散. (2)可以收敛，也可以发散.例如，$a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$ 及 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$.

解 (1) 一定发散.因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，如果其和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛，得出矛盾.于是，此时两级数的和一定发散.

(2) 可以收敛，也可以发散.例如：

(ⅰ) 设 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，但 $c_n=0$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛；

(ⅱ) 设 $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$，则 $c_n=\dfrac{2}{n}$.显见，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散.

求下列级数的和：

【2709】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

解题思路 级数显然绝对收敛，且其和为

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1,$$

其中： $A_1=\{n\,|\,n=3k,\ k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_2=\{n\,|\,n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots\}$，

$A_3=\{n\,|\,n=3k+2,\ k=0,1,2,\cdots\}$.

以上这样计算是合理的.

解 原级数显然绝对收敛，记其和为 S，则有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1.$$

设将 $n=0,1,2,\cdots$分成三类：

$A_1=\{n\,|\,n=3k,\ k=0,1,2,\cdots\}$，

$$A_2=\{n\,|\,n=3k+1,\ k=0,1,2,\cdots\},$$

$$A_3=\{n\,|\,n=3k+2,\ k=0,1,2,\cdots\},$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n\in A_1}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_2}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}+\sum_{n\in A_3}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(\pi+\frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2^2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^3}\right)^k=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7},$$

以上计算是合理的,因为上述三个级数均绝对收敛,故其和为$\frac{5}{7}$.从而,原级数的和为

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}-1=\frac{5}{7}-1=-\frac{2}{7}.$$

【2715】 验证下面二发散级数

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n \quad 和 \quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

证 记 $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}u_m$, $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}v_m$,

其中

$$u_1=1,u_2=-\frac{3}{2},u_3=-\left(\frac{3}{2}\right)^2,\cdots,u_m=-\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1}\quad(m=2,3,\cdots),$$

$$v_1=1,v_2=2+\frac{1}{2^2},v_3=\frac{3}{2}\left(2^2+\frac{1}{2^3}\right),\cdots,v_m=\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}\left(2^{m-1}+\frac{1}{2^m}\right)\quad(m=2,3,\cdots).$$

因此 $c_1=u_1v_1=1$.一般地,在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 中,按乘积定义有

$$\begin{aligned}c_n&=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_{n-1}v_2+u_nv_1\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-3}\left(2^{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\cdots+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right]\left(2+\frac{1}{2^2}\right)\\&\quad+\left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[(2^{n-1}-2^{n-2}-2^{n-3}-\cdots-2-2^0)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\cdots-\frac{1}{2}\right)\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left[\left(2^{n-1}-\frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)\right]\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\cdot\frac{3}{2^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§4. 函数项级数

1° **收敛域** 使函数项级数

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

收敛的 x 值的集合 X 叫做此级数的收敛域,而函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(x\in X)$$

称为级数的和.

2° **一致收敛性** 对于函数序列

$$f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x),\cdots\tag{1'}$$

若:1) 存在极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\quad(x\in X);$$

2) 对于任何的数 $\varepsilon>0$,可以确定 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $x\in X$ 时,

$$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

成立,则称此函数序列在集合 X 上一致收敛.

当序列(1′)一致收敛于 $f(x)$ 时,我们使用记号 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$.

若函数项级数(1)的部分和序列:

$$S_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x)\quad(n=1,2,\cdots)$$

在集合 X 上一致收敛,则称级数(1)在此集合上一致收敛.

3° **柯西准则** 级数(1)在集合 X 上一致收敛的充分必要条件为:对于每一个 $\varepsilon>0$,都存在数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}u_i(x)\right|<\varepsilon$$

对一切 $x\in X$ 都成立.

4° **魏尔斯特拉斯判别法** 对于级数(1),若存在收敛的数项级数

$$c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots,\tag{2}$$

使得对于 $x\in X$ 下列不等式都成立:

$$|u_n(x)|\leqslant c_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

则级数(1)在集合 X 上绝对并一致收敛.

5° **阿贝尔判别法** 若:1)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛;2)函数 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 全体是有界的并对每一个 x 组成一单调序列,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)\tag{3}$$

在集合 X 上一致收敛.

6° **狄利克雷判别法** 若:1)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的部分和全体是有界的;2)序列 $b_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 对于每一个 x 都是单调的,并且当 $n\to\infty$ 时在 X 上一致地趋于零,则级数(3)在集合 X 上一致收敛.

7° **函数项级数的性质** 1) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

2) 若函数项级数(1)在每一个区间 $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ 上一致收敛且有有限的极限 $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n$ $(n=1,2,\cdots)$,则:ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 收敛,ⅱ)成立等式

$$\lim_{x\to a}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to a}u_n(x)\right].$$

3) 若收敛级数(1)的各项当 $a<x<b$ 时皆连续可微,并且导数的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在区间 (a,b) 内一致收敛,则

$$\Big[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big]' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

4) 若级数(1)的各项连续，并且此级数在有限区间(a,b)内一致收敛，则

$$\int_a^b \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big\}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

一般说来，若当$n\to\infty$时$\int_a^b R_n(x)\mathrm{d}x\to 0$，这里$R_n(x)=\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i(x)$，则公式(4)成立. 最后这个条件也适合于积分限是无穷大的情况.

定出下列函数项级数的绝对收敛域和条件收敛域.

【2717】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\right|}=1$，故仅当$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$即$(1-x)^2<(1+x)^2$或$x>0$时，级数绝对收敛.

当$x=0$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$，显见它为条件收敛，当$x<0$时，原级数通项不趋于零，故发散.

【2724】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ （兰伯特级数）.

解 考虑级数 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$ 与 (2) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$.

当$|x|<1$时，级数(2)绝对收敛. 根据阿贝尔判别法，以单调递减且有下界的因子$\frac{1}{1-x^{2n}}$乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^{2n}} \tag{3}$$

也收敛，且为绝对收敛.

同理，再以单调递减且有界的因子x^n乘级数(3)的对应项所得的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$仍然收敛，且为绝对收敛. 由于

$$\frac{x^n}{1-x^n}=\frac{x^n}{1-x^{2n}}+\frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当$|x|<1$时绝对收敛.

当$|x|=1$时，级数(1)显然无意义.

当$|x|>1$时，级数(2)显然发散. 下证级数(1)也发散. 若不然，当$|x|>1$时，由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛，再根据阿贝尔判别法，我们就会推出级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$也收敛. 从而会得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}-\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}1$$

也收敛，这是错误的. 因此，当$|x|>1$时，级数(1)发散.

【2737】 证明:若洛朗级数 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$($|x_1|<|x_2|$)时收敛,则此级数当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时也收敛.

证明思路 注意级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$ 均收敛,由此只要证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 的收敛性(当 $|x_1|<|x|<|x_2|$).

证 由于洛朗级数当 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 时收敛,故级数

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$, (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n}$, (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$, (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$

均收敛.于是,由(3)知,当 $|x|<|x_2|$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛.由(2)知,当 $\left|\frac{1}{x}\right|<\left|\frac{1}{x_1}\right|$ 即当 $|x_1|<|x|$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛.因而,当 $|x_1|<|x|<|x_2|$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛,也即 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

【2740】 证明:若狄利克雷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x=x_0$ 收敛,则此级数当 $x>x_0$ 时也收敛.

证明思路 注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$,并利用阿贝尔判别法.

证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n^{x_0}}\cdot\frac{1}{n^{x-x_0}}\right)$.由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛,并且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x>x_0$ 时单调下降趋于零,故根据阿贝尔判别法即知:当 $x>x_0$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

【2741】 证明:序列 $f_n(x)$($n=1,2,\cdots$)在集合 X 上一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0,$$

式中 $\gamma_n(x)=|f(x)-f_n(x)|$.

提示 利用一致收敛的定义即获证.

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$,故对任给的 $\varepsilon>0$,总存在 $N(\varepsilon)>0$,使当 $n>N(\varepsilon)$ 时,对于集合 X 上的一切 x 值,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有 $\sup\limits_{a<x<b}\{\gamma_n(x)\}\leqslant\varepsilon$,从而,$\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$.

再证充分性.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\sup\limits_{a<x<b}\gamma_n(x)\}=0$,故对任给的 $\varepsilon>0$,总存在 $N(\varepsilon)>0$,使当 $n>N(\varepsilon)$ 时,有

$$\sup_{a<x<b}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是,对于集合 X 上的一切 x 值,只要当 $n>N(\varepsilon)$ 时,就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此,$f_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛于 $f(x)$.

研究序列在所给区间上的一致收敛性:

【2746】 $f_n(x)=x^n$; (1) $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; (2) $0\leqslant x\leqslant 1$.

提示 (1)一致收敛于零.(2)收敛而不一致收敛.取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$(不论 n 多大)即可证不一致收敛.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给$\varepsilon>0$，由于

$$|f_n(x)-f(x)|=|x|^n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要$\frac{1}{2^n}<\varepsilon$，即只要 $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}$. 取$N=\left[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2}\right]$，则当 $n\geqslant N$ 时，对于$[0,\frac{1}{2}]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|=|f_n(x)-0|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)=x^n$ 在$[0,\frac{1}{2}]$上一致收敛于零.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & x=1,\\ 0, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$ 取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)-f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

【2756】 (1) $f_n(x)=\arctan nx$；$0<x<+\infty$.

解 (1) 当 $0<x<+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan nx=\frac{\pi}{2}=f(x)$. 取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{\pi}{4}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{n}$，就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\left|\arctan 1-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{4}>\varepsilon_0.$$

因此，$f_n(x)$在$(0,+\infty)$上收敛而不一致收敛.

【2762】 $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$；$0\leqslant x\leqslant 2$.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-1|$$
$$=\frac{x^n}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+1}<\frac{1}{n};$$

(2) 当 $1<x\leqslant 2$ 时，

$$|f_n(x)-f(x)|=|\sqrt[n]{1+x^n}-x|$$
$$=\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{n-1}{n}}+x(1+x^n)^{\frac{n-2}{n}}+\cdots+x^{n-2}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}+x^{n-1}}<\frac{1}{nx^{n-1}}<\frac{1}{n}.$$

因此，对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon>0$，要使$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，则当 $n>N$ 时，对于$[0,2]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[0,2]$上一致收敛.

【2765】 设函数 $f(x)$在区间(a,b)内有连续的导数$f'(x)$，且

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right].$$

证明：在闭区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上（其中 $a<\alpha<\beta<b$），$f_n(x)\rightrightarrows f'(x)$.

证 考虑$[\alpha',\beta']$，其中 $a<\alpha'<\alpha<\beta<\beta'<b$. 由于 $f_n(x)$（n 充分大）在$[\alpha',\beta']$上有连续导数，由微分学中值公式，得

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=nf'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}=f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)\quad(0<\theta<1).$$

又因 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上连续，所以 $f'(x)$在$[\alpha',\beta']$上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于$[\alpha',\beta']$上的任意点 x'及 x''，只要当$|x'-x''|<\delta$时，就有$|f'(x')-f'(x'')|<\varepsilon$. 今取 $N=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1=N(\varepsilon)$，则当 $n>N$ 时，有$\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\delta$. 于是，对$[\alpha,\beta]$上的一切 x 值，只要 N 足够大，就可保证 x 与$x+\frac{\theta}{n}$均属于$[\alpha',\beta']$. 于是，对于$[\alpha,\beta]$上的一切 x 值，均有

$$|f_n(x)-f'(x)|=\left|f'\left(x+\frac{\theta}{n}\right)-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

因此，$f_n(x)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛于 $f'(x)$.

研究下列级数的收敛性：

【2769】 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$；在闭区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上.

提示 注意 $S_n(x)=1-x^{n+1}$及 $S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 收敛而不一致收敛. 取 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$ 及 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$（不论 n 多大）即可证不一致收敛.

解 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k=(1-x)\sum\limits_{k=0}^{n}x^k=1-x^{n+1}$.

于是，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$，不论 n 多么大，只要取 $x=\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$，就有

$$\left|S_n\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)-S\left(\frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上收敛而不一致收敛.

【2774】 利用魏尔斯特拉斯判别法，证明下列函数项级数在所指区间内的一致收敛性：

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$，$0\leqslant x<+\infty$.

提示 注意(3) $1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$ $(x>0)$.

解 (3) 当 $x=0$ 时，级数显然收敛于零. 当 $x>0$ 时，$1+n^4x^2\geqslant 2n^2x$，于是，$\left|\frac{x}{1+n^4x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n^2}$.

又因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性：

【2777】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$；$0<x<+\infty$.

提示 利用狄利克雷判别法.

解 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\right|\leqslant 1$. 当 $0<x<+\infty$时，$\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$，它单调一致地趋于零. 因此，由狄利克雷判别法

知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0<x<+\infty$ 时一致收敛.

【2781】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$；$0\leqslant x<+\infty$.

解 当 $x=2m\pi\ (m=0,1,2,\cdots)$ 时，$\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx=0$. 当 $x\neq 2m\pi\ (m=0,1,2,\cdots)$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|=|\sin x|\cdot\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant|\sin x|\cdot\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}=2\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2.$$

于是，对于一切 $x\in[0,+\infty)$，均有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin x\sin kx\right|\leqslant 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x\in[0,+\infty)$ 关于 n 都是单调递减的，且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$ 知，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上一致地趋于零. 因此，由狄利克雷判别法知，级数在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

【2783】 不连续函数序列可否一致收敛于连续函数？

解题思路 可以. 例如，函数序列 $f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)$，其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

利用 734 题的结果，可知 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上每一点均不连续，但它在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于连续函数 $f(x)=0$.

解 可以. 例如，函数序列

$$f_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x)\ (n=1,2,\cdots),\quad \text{其中}\quad \varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ 1, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$$

显然，$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上每一点均不连续，但由于

$$|f_n(x)|\leqslant\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots;\ -\infty<x<+\infty),$$

故当 $n\to\infty$ 时，$f_n(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x)\equiv 0\ (-\infty<x<+\infty)$ 显然是连续函数. 此例说明，不连续函数的序列仍然可以一致收敛于连续函数.

【2784】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛.

提示 由柯西准则并注意不等式

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|,$$

命题即可获证.

证 由柯西准则及题设知：对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N=N(\varepsilon)$，使当 $n>N$ 时，对于 $[a,b]$ 上的一切 x 值，均有

$$|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

其中 p 为任意正整数. 由于

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_{n+p}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|+|f_{n+2}(x)|+\cdots+|f_{n+p}(x)|<\varepsilon,$$

故根据一致收敛的柯西准则知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

【2785】 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对并一致收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在 $[a,b]$ 上是否必定一致收敛？

解 未必. 例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上绝对并一致收敛，但其绝对值级数不一致收敛. 事实上，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$$

在$[0,1]$上收敛而不一致收敛*). 因此，我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛就可以了. 首先，当$x=0$及$x=1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 显然收敛. 当$0<x<1$时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n$ 是交错级数且满足莱布尼茨条件，故也收敛. 要证其一致收敛，只要证其余式$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0\leqslant x\leqslant 1$)即可. 按满足莱布尼茨条件的交错级数的余式估计，有

$$|R_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).\tag{1}$$

令 $f(x)=(1-x)x^{n+1}$，通过求导数易知此函数在 $x=\frac{n+1}{n+2}$时达到其在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值，故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$0\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}<\frac{1}{n+2}.$$

于是，由(1)式知

$$|R_n(x)|<\frac{1}{n+2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1;\ n=1,2,\cdots).$$

由此即知，当 $n\to\infty$时 $R_n(x)$关于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 一致趋于零.

*) 利用 2769 题的结果.

【2788】 证明：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证明思路 设幂级数的收敛区间为$(-R,R)$ $(R>0)$，$[a,b]\subset(-R,R)$.
令 $r=\max(|a|,|b|)$，则$|a_n x^n|\leqslant|a_n r^n|$. 并利用魏尔斯特拉斯判别法.

证 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛区间为$(-R,R)$ $(R>0)$，$[a,b]\subset(-R,R)$. 令

$$r=\max(|a|,|b|),$$

则当 $x\in[a,b]$时，有

$$|a_n x^n|\leqslant|a_n|\cdot|r|^n=|a_n r^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n r^n|$收敛，故原幂级数在$[a,b]$上绝对并一致收敛，由$[a,b]$的任意性，本题获证.

【2790】 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则狄利克雷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

提示 利用阿贝尔判别法.

证 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant 1$，且$\frac{1}{n^x}$对每一个 $x\geqslant 0$ 是单调的. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛，故由阿贝尔判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$当 $x\geqslant 0$ 时一致收敛.

【2795】 确定函数 $f(x)$的存在域并研究它们的连续性，设 (1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$.

解 (1) 由于$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|}=|x|$，故当$|x|<1$ 时，级数绝对收敛；而当$|x|>1$ 时，级数发散. 当

$|x|=1$ 时,通项不趋于零,因而级数也发散.于是,$f(x)$的存在域为$(-1,1)$.下面证明 $f(x)$在$(-1,1)$内连续.设 $0<\delta<1$,则当$|x|\leqslant 1-\delta$ 时,有

$$\left|\left(x+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leqslant\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n.$$

上面已证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\delta+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$ 在$[-1+\delta,1-\delta]$上一致收敛,从而,$f(x)$在该区间上连续.由于 δ 可以任意的小,故知 $f(x)$在开区间$(-1,1)$内连续.

【2797】 证明:黎曼 ζ 函数 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在区域 $x>1$ 内是连续的并且在此区域内有连续的各阶导数.

证 显然级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$当 $x>1$ 时收敛.各项求导数所得级数为$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$.下证它在 $1<a\leqslant x<+\infty$上一致收敛(a 为大于一的任何数).事实上,当 $a\leqslant x<+\infty$时,有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^a}$收敛(这是由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\ln n}{n^a}}{\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}}=0$,而$\frac{a+1}{2}>1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$收敛),故知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在 $a\leqslant x<+\infty$上一致收敛.再注意到每项$\frac{\ln n}{n^x}$都是 x 的连续函数,即知:在$a\leqslant x<+\infty$上可逐项求导数,得

$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x},\tag{1}$$

并且 $\zeta'(x)$在 $a\leqslant x<+\infty$上连续.再由 $a>1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1<x<+\infty$成立,并且 $\zeta'(x)$在 $1<x<+\infty$上连续.当然 $\zeta(x)$更在 $1<x<+\infty$上连续.

利用数学归纳法,并注意到对任何正整数 k,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^a}$ $(a>1)$都收敛,仿照上述,可证:对任何正整数 k,$\zeta^{(k)}(x)$在 $1<x<+\infty$上都存在且连续,并且可由原级数逐项求导数 k 次而得:

$$\zeta^{(k)}(x)=(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^x}\quad(1<x<+\infty).$$

【2800】 证明:序列 $f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$ $(n=1,2,\cdots)$在区间$(-\infty,+\infty)$内一致收敛,但

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}\neq\lim_{n\to\infty}f'_n(1).$$

提示 注意$|f_n(x)|<\frac{\pi}{2n}$.

证 由于当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,$|\arctan x^n|<\frac{\pi}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$,故有

$$|f_n(x)|<\frac{\pi}{2n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易见 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0=f(x)$. 任给 $\varepsilon>0$,选取 $N=\left[\frac{\pi}{2\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,对于一切的 $x\in(-\infty,+\infty)$,均有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\pi}{2n}\leqslant\frac{\pi}{2(N+1)}<\frac{\pi}{2\cdot\frac{\pi}{2\varepsilon}}=\varepsilon.$$

于是,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零.但 $f'_n(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$,易见

$$[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'_{x=1}=f'(x)|_{x=1}=0,\quad \lim_{n\to\infty}f'_n(1)=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此,两个极限不相等.值得注意的是,$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于零,但 $f'_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内

却不一致收敛于其极限函数：

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

【2802】 试确定参数 α 取何值时下列命题为真：

(1) 序列

$$f_n(x)=n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}\ (n=1,2,\cdots) \tag{1'}$$

在闭区间[0,1]上收敛；

(2)序列(1′)在[0,1]上一致收敛；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 可在积分号下取极限？

解 (1) 当 $x=0$ 时，对于任意 α，均有 $f_n(x)=0$；当 $x\neq 0$ 且 $x\in(0,1]$时，对于任意 α，均有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}x\mathrm{e}^{-nx}=0.$$

因此，对于任意的 α，$f_n(x)$在[0,1]上收敛于函数 $f(x)=0$.

(2) 由于 $f_n'(x)=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$，故当 $x=\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)=0$. 又由于当 $x<\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)>0$；当 $x>\frac{1}{n}$时，$f_n'(x)<0$，故 $x=\frac{1}{n}$为$f_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的最大值点. 因此，

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant f_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

当 $\alpha<1$ 且 $n\to\infty$时，$n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1}\to 0$. 于是，当 $\alpha<1$ 时，对任给的$\varepsilon>0$，总存在 N，使当 $n>N$ 时，对于一切的 $x\in[0,1]$，均有

$$|f_n(x)-0|<\varepsilon,$$

即当 $\alpha<1$ 时，$f_n(x)$在[0,1]上一致收敛于零. 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，由于 $f_n(\frac{1}{n})\not\to 0$，故 $f_n(x)$在[0,1]上不一致收敛于零.

(3) 要证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 可在积分号下取极限，即只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x. \tag{2'}$$

事实上，

$$\int_0^1 [\lim_{n\to\infty} f_n(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}\left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n}-\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n}+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-2}(1-\mathrm{e}^{-n}-n\mathrm{e}^{-n}).$$

要(2′)式成立，只要下式

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

当 $\alpha<2$ 时成立. 于是，当 $\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 可在积分号下取极限.

【2805】 在表达式$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x$ 中，在积分符号下取极限是否合理？

解 由于 $\int_0^1\left[\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^4}\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 0\cdot\mathrm{d}x=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\arctan nx^2\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$，

故在积分号下取极限不合理.

一般说来，若序列 $f_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则是保证在积分符号下取极限为合理的一个充分条件，但当它不一致收敛时，则就不一定能保证可以在积分符号下取极限了，本题就是其中一例. 事实上，取 ε_0 使

$0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x=\frac{1}{n}$,就有

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-0\right|=\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^4}}>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在$[0,1]$上并不一致收敛.

【2810】 在闭区间$[0,1]$上逐项积分级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})$合理否?

解 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x^{\frac{1}{2k+1}}-x^{\frac{1}{2k-1}})$,则 $x=0,1$ 时,$S_n(x)=0$;当 $0<x<1$ 时,$S_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}-x$.因此,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=0,1,\\ 1-x, & 0<x<1.\end{cases}$$

取 ε_0 使 $0<\varepsilon_0<\frac{1}{2}$,不论 n 多么大,只要取 $x_n=\frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

因此,$S_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛.

注意,对于不一致收敛的级数而言,一般地讲逐项积分级数不一定合理.但对于本题来说,由于

$$\int_0^1\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})\right]dx=\int_0^1(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

及

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1(x^{\frac{1}{2n+1}}-x^{\frac{1}{2n-1}})dx&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}-\frac{2n-1}{2n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2n+2}\right)-\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故本题所给出的级数在$[0,1]$上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明,级数在$[a,b]$上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件,并不是必要条件.

【2811】 设 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$是无穷多次可微的函数,且其导数 $f^{(n)}(x)(n=1,2,\cdots)$的序列在每一个有限区间(a,b)内一致收敛于函数 $\varphi(x)$.证明:$\varphi(x)=C\,e^x$,其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$无穷多次可微,故 $f^{(n)}(x)$在(a,b)内连续可微$(n=1,2,\cdots)$.又按题设 $f^{(n)}(x)$在(a,b)内一致收敛于$\varphi(x)$,且其导数序列 $f^{(n+1)}(x)(n=1,2,\cdots)$在$(a,b)$内也一致收敛于 $\varphi(x)$,故 $\varphi(x)$在(a,b)内可微,并且

$$\varphi'(x)=[\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}[f^{(n)}(x)]'=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x).$$

积分之,即得 $\ln\varphi(x)=x+C_1$,也即 $\varphi(x)=Ce^x$,其中 $C=e^{C_1}$ 为常数.

§5. 幂 级 数

$1°$ **收敛区间** 对于每一个幂级数

$$a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+\cdots$$

都存在封闭的收敛区间:$|x-a|\leqslant R$,该级数在其内收敛,而在其外发散.收敛半径 R 可按柯西—阿达马公式

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 来计算(若此极限存在).

2° **阿贝尔定理** 若幂级数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,(|x|<R)$ 在收敛区间的端点 $x=R$ 处收敛，则

$$S(R)=\lim_{x\to R-0} S(x).$$

3° **泰勒级数** 在点 a 解析的函数在该点的某邻域内可展开为幂级数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

可以表示为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta<1)\quad(\text{拉格朗日形式})$$

或

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta_1(x-a)]}{n!}(1-\theta_1)^n(x-a)^{n+1}\quad(0<\theta_1<1)\quad(\text{柯西形式}).$$

必须记住下列五个基本展开式：

Ⅰ. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅱ. $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅲ. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

Ⅳ. $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$.

Ⅴ. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1)$.

4° **幂级数的运算** 在公共的收敛区间 $|x-a|<R$ 内有：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\pm\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-a)^n$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$， 式中 $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-a)^n$；

(4) $\int\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right]\mathrm{d}x=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

5° **在复数域内的幂级数** 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

式中 $c_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，$a=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$z=x+\mathrm{i}y$，$\mathrm{i}^2=-1$. 对于每一个这样的级数都有一封闭的收敛圆 $|z-a|\leqslant R$，该级数在其内收敛(并且绝对收敛)，而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质：

【2812】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$.

解 记 $a_n=\frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p=1,$$

故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时，若 $p>1$，则幂级数为绝对收敛；若 $0<p\leqslant1$，则为条件收敛；当 $p\leqslant0$ 时，则为发散.

当 $x=1$ 时，若 $p>1$，则为绝对收敛；若 $p\leqslant1$，则为发散.

【2821】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\quad(a>0,\ b>0)$.

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n\quad 及\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1=\frac{1}{a}$ 及 $R_2=\frac{1}{b}$，故原级数的收敛半径 $R=\min(R_1,R_2)=\min\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$；收敛区间为 $(-R,R)$.

当 $x=-R$ 时，若 $a<b$，则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\tag{1}$$

对于上式右端的第一个级数，利用达朗贝尔判别法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n\dfrac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}}\right|=\frac{a}{b}<1,$$

故知其为绝对收敛，而第二个级数显然为绝对收敛. 因此，当 $a<b$ 时，级数(1)绝对收敛. 当 $a\geqslant b$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,\tag{2}$$

上式右端的第一个级数条件收敛，第二个级数绝对收敛($b<a$)或条件收敛($b=a$)，故当 $a\geqslant b$ 时，级数(2)条件收敛.

当 $x=R$ 时，若 $a<b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由前段知其为绝对收敛；若 $a\geqslant b$，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和，故为发散级数.

【2828】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$.

提示 记 $a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4$.

解 记 $a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$. 由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=4$，故收敛半径 $R=\frac{1}{4}$；收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

当 $x=\frac{1}{4}$ 时，级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n\cdot4^n}.\tag{1}$$

将它拆成两部分，一部分为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$，一部分为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散；而对于后一级数，利用

柯西判别法或达朗贝尔判别法易知其为收敛. 因此,级数(1)发散.

当 $x=-\frac{1}{4}$,同法可证,原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此,它是发散的.

求下列广义幂级数的收敛域:

【2836】 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

解 记 $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(e^{-x})^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}|<\frac{1}{e^{-1}}=e$ 即当 $1+x>0$ 或 $x>-1$ 时,级数绝对收敛;当 $x<-1$ 时,级数发散;当 $x=-1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^n=1\neq0,$$

故级数发散. 于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$ 的收敛域为 $(-1,+\infty)$.

写出下列函数按变量 x 的非负整数次幂的展开式,并求出相应的收敛区间:

【2845】 $f(x)=\sin(u\arcsin x)$.

解 $\arcsin x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^x\left(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\cdots\right)dt=x+\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5+\cdots\quad(|x|<1)$,

$$\begin{aligned}f(x)&=u\arcsin x-\frac{u^3}{3!}(\arcsin x)^3+\frac{u^5}{5!}(\arcsin x)^5-\cdots\\&=ux+\frac{u(1^2-u^2)}{3!}x^3+\frac{u(1^2-u^2)(3^2-u^2)}{5!}x^5+\cdots,\end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1,1)$.

利用基本展开式 Ⅰ～Ⅴ,写出下列函数关于 x 的幂级数展开式

【2855】 $\frac{1}{(1-x)^2}$.

解
$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2}&=(1-x)^{-2}\\&=1+(-2)(-x)+\frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2+\cdots+\frac{(-2)(-2-1)\cdots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\quad(|x|<1).\end{aligned}$$

【2860】 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

提示 先将所给函数分解成部分分式,再利用基本展开式及 2855 题的结果.

解
$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}&=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\\&=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n*)}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)-\frac{1+(-1)^n}{2}\right]x^n\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1-(-1)^n}{2}\right]x^n \qquad (|x|<1).$$

*） 利用 2855 题的结果.

【2863】 $\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 $$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=-1-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha}{x-(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}+\frac{\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha}{x-(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)}+\frac{1}{1-x(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}\right]$$

$$=-1+\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha-\mathrm{i}\sin n\alpha+\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,$$

其中 $|x|<\min\left(\dfrac{1}{|\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha|},\dfrac{1}{|\cos\alpha-\mathrm{i}\sin\alpha|}\right)=1$，即$|x|<1$.

【2867】 $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln[(1+x)(1+x^2)]=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$.

但

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x\leqslant 1),$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n} \quad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

故当$-1<x\leqslant 1$时，有

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{[\frac{m}{2}]-1}[1+(-1)^m]\frac{x^m}{m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{[\frac{m}{2}]-1}[1+(-1)^m]}{m}x^m.$$

首先展开导数，然后用逐项积分的方法求下列函数的幂级数展开式.

【2872】 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$.

解 $$\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=\int_0^x\frac{2t-2\cos\alpha}{1-2t\cos\alpha+t^2}\mathrm{d}t=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\ \frac{t\cos\alpha-t^2}{1-2t\cos\alpha+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-2\int_0^x\left(\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}t^n\cos n\alpha\right)\mathrm{d}t^{*)}=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n,$$

收敛区间为$|x|<1$. 当$|x|=1$时，由 2698 题知，对于$0<\alpha<\pi$，级数收敛. 因此，当$0<\alpha<\pi$时，级数的收敛域为$|x|\leqslant 1$. 但当$\alpha=0$且$x=1$时，级数发散；当$\alpha=0$且$x=-1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=1$时，级数条件收敛；当$\alpha=\pi$且$x=-1$时，级数发散.

*） 利用 2863 题的结果.

对幂级数进行相应的运算，从而求出下列函数的幂级数展开式：

【2884】 $f(x)=\ln^2(1-x)$.

解 $f(x)=\left(-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]x^{n+1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{n+1}+\cdots+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{n+1}\right]x^{n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}\quad(|x|<1).$$

当 $x=-1$ 时,级数为

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}>\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2}\quad(n=2,3,\cdots),$$

并且有

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}=\frac{C+\ln n+\varepsilon_n}{n+1}{}^{*)}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故它是收敛的.

当 $x=1$ 时,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数,故 $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}$ 也发散. 因此,级数

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1\leqslant x<1$.

*) 利用 146 题的结果.

【2886】 $f(x)=e^x\cos x$.

提示 注意 $e^x(\cos x+i\sin x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

解 $e^x\cos x$ 为 $e^x(\cos x+i\sin x)$ 的实部. 由于

$$e^x(\cos x+i\sin x)=e^xe^{ix}=e^{(1+i)x}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)x]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(1+i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

比较上式两端的实部,即得 $e^x\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n\quad(|x|<+\infty)$.

【2890】 $f(x)=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$.

解 令 $\varphi(x)=(\arcsin x)^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (-1<x<1)$,则

$$\varphi'(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\quad(-1<x<1).$$

由于 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$,故 $a_0=a_1=0$. 由 $\sqrt{1-x^2}\varphi'(x)=2\arcsin x$ 得

$$\sqrt{1-x^2}\varphi''(x)-\frac{x\varphi'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

即

$$(1-x^2)\varphi''(x)-x\varphi'(x)=2\quad(-1<x<1),$$

将 $\varphi(x)$ 的展开式代入，并注意到 $a_0=a_1=0$，可得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}na_n x^n=2$$

或 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^2a_n x^n=2$，也即

$$2a_2+6a_3x+\sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n]x^n=2\quad(-1<x<1).$$

比较上式 x 的同次幂的系数，得

$$a_2=1,\quad a_3=0,\quad a_{n+2}=\frac{n^2}{(n+2)(n+1)}a_n\quad(n\geqslant 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1}=0,\quad a_{2k+2}=\frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!}=\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

于是，

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k+2}\quad(-1<x<1).$$

从而得

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}x^{2k}\quad(-1<x<1).$$

显然右端的幂级数当 $x=\pm1$ 时均收敛，而左端的函数当 $x=\pm1$ 时连续，故由幂级数的阿贝尔定理知，上述展式当 $x=1$ 及 $x=-1$ 时也成立.

【2894】 设 $\sec x$ 的展开式写为以下形式：

$$\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}.$$

求出系数 E_n（欧拉数）的递推公式.

解 在等式 $\sec x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}$ 的两端同乘 $\cos x$，并注意 $\cos x$ 的展开式，就有

$$\begin{aligned}1&=\cos x\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{E_s}{(2s)!}x^{2s}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s+k=n}(-1)^k x^{2(k+s)}\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{s+k=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}\right]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^{2n}.\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性，就有 $A_0=E_0=1$，而 $A_n=0\ (n=1,2,\cdots)$，其中

$$A_n=\sum_{k+s=n}(-1)^k\frac{E_s}{(2k)!(2s)!}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!}=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

例如，已知 E_0，由上式令 $n=1$，即得 $E_1-E_0=0$，从而，$E_1=E_0=1$. 由 E_0,E_1，令 $n=2$，又可推出 $E_2,\cdots$，等等. 一般说来，由 $E_0,E_1,E_2,\cdots,E_{n-1}$，从上式可推出 E_n.

【2897】 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 有收敛半径 R_1，而级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 有收敛半径 R_2，则级数：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$； (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

提示 利用柯西—阿达马公式即可求得:(1)$R\geqslant\min(R_1,R_2)$.(2)$R\geqslant R_1R_2$.

解 (1)记 $A_n=a_n+b_n$,则有

$$\sqrt[n]{|A_n|}=\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|+|b_n|}\leqslant\sqrt[n]{2\max(|a_n|,|b_n|)}$$
$$=\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{\max(|a_n|,|b_n|)}=\sqrt[n]{2}\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,故有

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|A_n|}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{2}\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}=\varlimsup_{n\to\infty}\{\max(\sqrt[n]{|a_n|},\sqrt[n]{|b_n|})\}$$
$$=\max\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}=\max\left(\frac{1}{R_1},\frac{1}{R_2}\right),$$

从而得 $R\geqslant\dfrac{1}{\max\left(\dfrac{1}{R_1},\dfrac{1}{R_2}\right)}=\min(R_1,R_2)$.

(2)记 $B_n=a_nb_n$,则有 $\sqrt[n]{|B_n|}=\sqrt[n]{|a_nb_n|}=\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|}$.于是,

$$\frac{1}{R}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|B_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\{\sqrt[n]{|a_n|}\sqrt[n]{|b_n|}\}\leqslant\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\}\{\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}\}$$
$$=\frac{1}{R_1}\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_1R_2},$$

故得 $R\geqslant R_1R_2$.

【2898】 设 $l=\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 和 $L=\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.证明:幂级数的收敛半径 R 满足下列不等式 $l\leqslant R\leqslant L$.

证 记 $l_1=\dfrac{1}{l}$,$L_1=\dfrac{1}{L}$.注意 $l\geqslant0$,$L\geqslant0$.若 $l=0$,则记 $l_1=+\infty$;若 $l=+\infty$,则记 $l_1=0$.对 L 与 L_1 也作同样规定.易见 $L_1\leqslant l_1$.任给 $\varepsilon>0$,总可选 $\delta_1>0$,$\delta_2>0$,使

$$\frac{1}{1+\delta_1}=1-\frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{1}{1-\delta_2}=1+\frac{\varepsilon}{2}.$$

注意对 δ_1,δ_2 而言,存在正整数 m,使当 $n>m$ 时,有

$$l(1-\delta_2)<\left|\frac{a_n}{a_n+1}\right|<L(1+\delta_1)\quad 或\quad \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{1+\delta_1}<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n>m$ 时,有

$$L_1\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

易见当 $n>m$ 时,有

$$\frac{|a_n|}{|a_m|}=\frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\cdot\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}<\left[l_1\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^{n-m}$$

或

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).\tag{1}$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>\left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).\tag{2}$$

注意到若 $A>0$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A}=1$,故存在充分大的 $n_0(>m)$,使当 $n\geqslant n_0$ 时,有

$$\left(\frac{|a_m|}{l_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\quad 及\quad \left(\frac{|a_m|}{L_1^m}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.\tag{3}$$

将(3)式代入(1)式及(2)式,即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1}<1+\varepsilon \quad 及 \quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1}>1-\varepsilon.$$

于是，有 $L_1(1-\varepsilon)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{\frac{1}{n}}\leqslant l_1(1+\varepsilon)$. 从而得

$$\frac{1}{l_1(1+\varepsilon)}\leqslant R\leqslant\frac{1}{L_1(1-\varepsilon)}^{*)}. \quad 即 \quad \frac{l}{1+\varepsilon}\leqslant R\leqslant\frac{L}{1-\varepsilon}.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性知，即得 $l\leqslant R\leqslant L$.

*） 若 $L_1=+\infty$，即 $L=0$，此时显然有 $R=0$（级数除 $x_0=0$ 点收敛以外，对任一点 $x\neq x_0$ 均发散），故可设 $L_1<+\infty$.

【2899】 证明：若函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 且 $|n!a_n|<M \quad (n=1,2,\cdots)$，其中 M 是常数，则：

(1) $f(x)$在任一点 a 无穷次可微；(2) 展开式 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (|x|<+\infty)$ 成立.

证 (1) 由于$|n!a_n|<M$，故有

$$|a_n|<\frac{M}{n!} \qquad (n=1,2,\cdots).$$

设$[-N,N]$是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n|<\frac{M}{n!}(2N)^n$$

及级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}(2N)^n$ 收敛，故由魏尔斯特拉斯判别法知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛，即其收敛半径 $R=+\infty$. 于是，此级数在任一点 $a\in(-\infty,+\infty)$无穷次可微.

(2) 由(1)段已证可知级数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在任何点无穷次可微，故

$$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m}=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}a_n(x-x_0)^{n-m} \quad (m=1,2,\cdots).$$

今设$|x-a|<R$（R 为任意固定的正数），于是，

$$|x-x_0|\leqslant|x-a|+|a-x_0|<R+|a-x_0|=L,$$

故由假定知

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}|a_n|L^{n-m}\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\frac{M}{n!}L^{n-m}=M\sum_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}=MP \quad (m=1,2,\cdots),$$

其中 $P=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\frac{L^s}{s!}<+\infty$.

考虑余项 $R_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ 的拉格朗日形式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

于是，当$|x-a|<R$ 时，有

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{MP}{(n+1)!}R^{n+1} \quad (n=1,2,\cdots).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$，从而，$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. 由此可知，当$|x-a|<R$时，展式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

成立. 再由 $R>0$ 的任意性即知，此展式对一切 $x(|x|<+\infty)$皆成立. 证毕.

【2900】 证明：若(1)$a_n\geqslant0$；(2)存在 $\lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n=S$.

证 首先，如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 收敛，则根据阿贝尔定理可知，函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x=R$ 处左连续. 因此，

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次，我们证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 发散是不可能的. 采用反证法，引出矛盾. 事实上，根据 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n=+\infty$ 知，对于任取的正整数 $A>S$，总存在正整数 N，使有

$$\sum_{n=0}^{N} a_n R^n > A > S.$$

从而有

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n R^n > A > S.$$

注意到 $a_n\geqslant 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\ (x\geqslant 0)$，即得

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > A > S,$$

此与假设 $\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S$ 相矛盾. 因此，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ 一定收敛. 从而，命题获证.

运用逐项微分法计算下列级数的和：

【2908】 $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots.$

提示 令 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，将 $F(x)-F'(x)$ 与 $F(x)+F'(x)$ 相加即获解.

解 设 $F(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$. 在收敛域 $|x|<+\infty$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots.$$

于是，有

$$F(x)-F'(x)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{-x}, \tag{1}$$

$$F(x)+F'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^{x}. \tag{2}$$

将(1)式和(2)式相加，最后得 $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x\quad(|x|<+\infty).$

【2909】 $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots.$

解 设 $F(x)=\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^3}{3\cdot 4}+\cdots$. 在收敛域 $|x|\leqslant 1$ 内逐项微分之，得

$$F'(x)=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}+\cdots=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$
$$=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}[-\ln(1-x)]\quad(0<|x|<1).$$

注意 $F(0)=0$，即得

$$F(x)=\int_0^x F'(t)\,dt=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x)\quad(0<|x|<1).$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于零. 当 $x=1$ 时，级数收敛于 1. 当$x=-1$时，级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上，

$$-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=-\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$=2\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\right)+1=1-2\ln 2.$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1,\\ 0, & x=0,\\ 1-2\ln 2, & x=-1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

运用逐项积分法计算下列级数的和：

【2911】 $x+2x^2+3x^3+\cdots$.

提示 令 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$，注意 $\int_0^x F(t)\,dt=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)$ $(|x|<1)$.

解 设 $F(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)\,dt=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{3}\right)x^3+\left(1-\frac{1}{4}\right)x^4+\cdots$$
$$=(x^2+x^3+x^4+\cdots)-\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\cdots\right)$$
$$=x(1+x+x^2+\cdots)-\left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)=\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\quad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\left[\frac{x}{1-x}+\ln(1-x)\right]'=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，由于级数的通项不趋于零，故它是发散的.

【2913】 $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$.

提示 利用 2911 题的结果.

解 设 $F(x)=1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\cdots$. 在收敛域内逐项积分之，得

$$\int_0^x F(t)\,dt=x^2+2x^3+3x^4+\cdots=x(x+2x^2+3x^3+\cdots)=x\cdot\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).$$

于是，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n=\left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad(|x|<1).$$

当 $|x|=1$ 时，级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

利用适当的展开式，计算下列函数精确到所指出的程度的值.

【2927】 $\ln 1.2$，精确到 10^{-4}.

解 $\ln 1.2=\ln(1+0.2)=0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4+\cdots$.

若取头 n 项，则其误差 $\Delta<\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}$. 要 $\Delta<10^{-4}$，只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}<10^{-4}$. 取 $n=4$ 即可保证 $\Delta<\frac{1}{5}(0.2)^5<10^{-4}$. 于是，当每项取到小数点后五位，即得

$$\ln 1.2\approx 0.2-\frac{1}{2}(0.2)^2+\frac{1}{3}(0.2)^3-\frac{1}{4}(0.2)^4\approx 0.1823.$$

【2929】 利用等式$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{3}$计算数 π,精确到 0.001.

解 按题设,有

$$\frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^9}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\cdots\right).$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼茨型的,故在被加数与加数中,弃去未写出项的校正数分别为

$$0<\Delta_1<\frac{4}{11\cdot 2^{11}}<0.0002,\quad 0<\Delta_2<\frac{4}{9\cdot 3^9}<0.00002,$$

于是,总误差 $\Delta\leqslant\Delta_1+\Delta_2<0.001$.计算保留下来的项近似到小数点后四位(末位由四舍五入而得),即可保证达到所需误差,列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号):

正 项	负 项
$\frac{4}{2}=2.0000$	$\frac{4}{3\cdot 2^3}=0.1667(-)$
$\frac{4}{5\cdot 2^5}=0.0250$	$\frac{4}{7\cdot 2^7}=0.0045(-)$
$\frac{4}{9\cdot 2^9}=0.0009(-)$	$\frac{4}{3\cdot 3^3}=0.0494(-)$
$\frac{4}{3}=1.3333(+)$	+) $\frac{4}{7\cdot 3^7}=0.0003(-)$
+) $\frac{4}{5\cdot 3^5}=0.0033(-)$	0.2209
3.3625	
−) 0.2209	
3.1416	

于是,$3.1415<\pi<3.1420$.因此,取 $\pi\approx 3.142$ 即可精确到 0.001.

§6. 傅里叶级数

1° **展开定理** 若函数 $f(x)$在区间$(-l,l)$内分段连续并有分段连续的导数 $f'(x)$,并且一切不连续点 ξ 是正则的$\left[\text{即 } f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi-0)+f(\xi+0)]\right]$,则函数 $f(x)$在此区间上可用傅里叶级数表示:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\tag{1}$$

式中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).\tag{2'}$$

特别是:

(i) 若函数 $f(x)$是偶函数,则有:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\tag{3}$$

式中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots)$;

(ii) 若函数 $f(x)$是奇函数,则有:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\tag{4}$$

式中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$.

一个在区间$(0,l)$中有定义的并且具有上述连续性的函数$f(x)$,可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2° **完全性条件** 对于任何在区间$(-l,l)$上可积的且其平方也可积的函数 $f(x)$,组成具有系数(2),(2′)的级数(1),则李雅普诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\mathrm{d}x.$$

3° **傅里叶级数的积分法** 在区间$(-l,l)$内按黎曼意义可积的函数 $f(x)$之傅里叶级数(1)(即使是发散的),可以在此区间内逐项积分.

在所指定的区间内把下列函数展开为傅里叶级数:

【2943】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ bx, & 0<x<\pi,\end{cases}$ 其中 a 和 b 为常数.

解 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} bx\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} bx\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a-b}{n^2\pi}[1-(-1)^n];$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} ax\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} bx\sin nx\mathrm{d}x=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为

$$\frac{b-a}{4}\pi+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}ax, & -\pi<x<0,\\ 0, & x=0,\\ bx, & 0<x<\pi.\end{cases}$$

【2946】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=\sin ax$(a 不是整数).

解 因为 $f(x)=\sin ax$ 为奇函数,从而,$a_0=a_n=0$,且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin ax\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-a)x-\cos(n+a)x]\mathrm{d}x=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2-a^2},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为 $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2-a^2}=\sin ax\quad(-\pi<x<\pi)$.

【2950】 在区间$(-\pi,\pi)$内展开 $f(x)=x\sin x$.

解 因为 $f(x)$为偶函数,从而,$b_n=0$,且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\mathrm{d}x\right)=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{x\cos(n-1)x}{n-1}-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}\quad(n=2,3,\cdots),$$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{2},$$

故按展开定理,$f(x)$可展开为 $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx=x\sin x\quad(-\pi<x<\pi)$.

将下列周期函数展开成傅里叶级数：

【2955】 $f(x)=x-[x]$.

提示 注意函数 $f(x)$ 的周期为 1.

解 因为

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数，而且，除 $x=k,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 诸点外，$f(x)$ 都连续. 由于

$$a_0=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\cos2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\frac{x}{2n\pi}\sin2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos2n\pi x\right]\Big|_0^1=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1\{x-[x]\}\sin2n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sin2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=2\left[-\frac{x}{2n\pi}\cos2n\pi x+\frac{1}{4(n\pi)^2}\sin2n\pi x\right]\Big|_0^1=-\frac{1}{n\pi},$$

故按展开定理，$f(x)$ 可展开为 $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin2n\pi x}{n}=x-[x]\quad(x\neq k,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

【2961】 将函数 $f(x)=x^2$ 展开成傅里叶级数：(1) 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内按倍角的余弦展开；(2) 在区间 $(0,\pi)$ 内按倍角的正弦展开；(3) 在区间 $(0,2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图像及情形(1)、(2)与(3)的傅里叶级数之和的图像.

利用这些展开式，求级数的和：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$.

解 (1) 由于 $b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}=(-1)^n\frac{4}{n^2},$$

故 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内按余弦展开为 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$.

这里展式右端的成立区间中取等号，是由于当 $x=\pm\pi$ 时展式仍成立. 以后有类似情况不再一一说明.

(2) 由于 $a_0=a_n=0$，且

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2}{n^2}x\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1],$$

故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内按正弦展开为 $2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx-\frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=x^2\quad(0\leqslant x<\pi)$.

(3) 由于 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{8\pi^2}{3}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx+\frac{2}{n^3}\cos nx\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内可展开为 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=x^2 \quad (0<x<2\pi)$.

函数的图像，(1)、(2)及(3)的傅里叶级数之和的图像，如图 2961—1、图 2961—2、图 2961—3 及图 2961—4 所示.

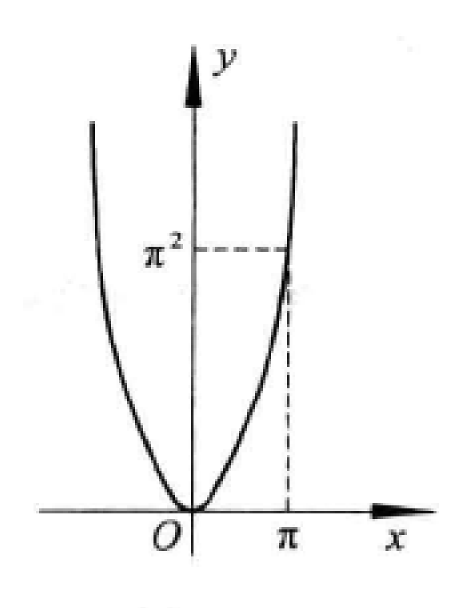


图 2961—1

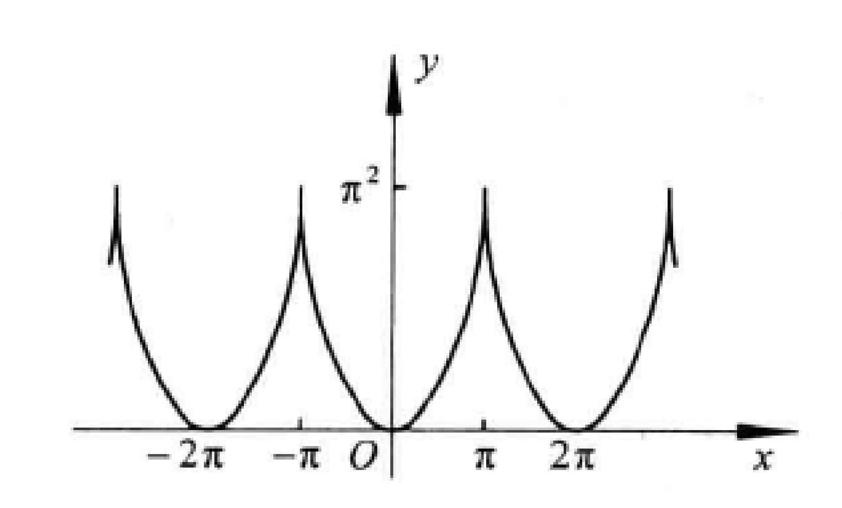


图 2961—2

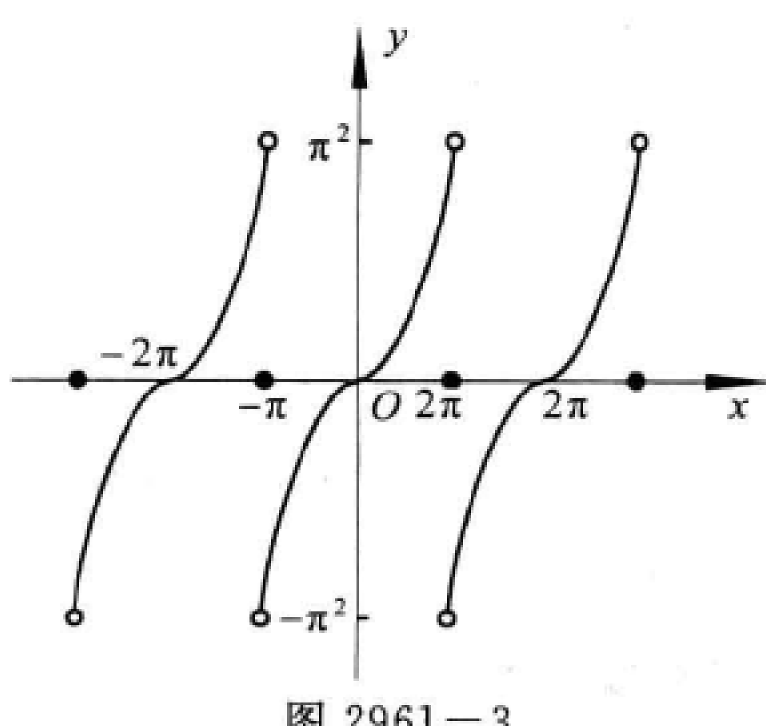


图 2961—3

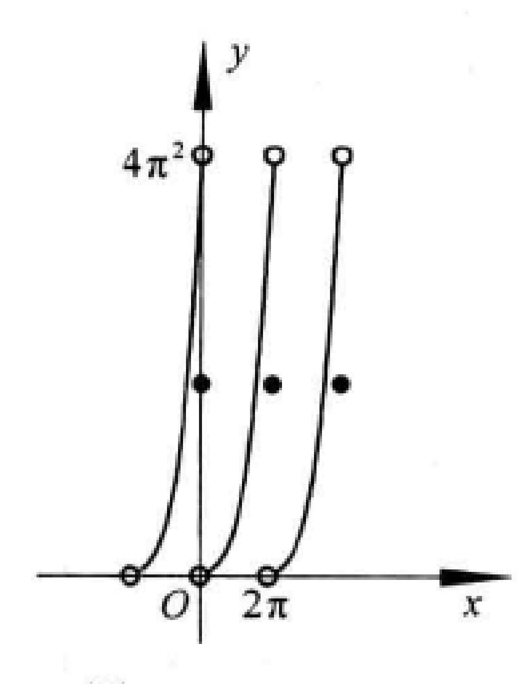


图 2961—4

若在展开式(1)中令 $x=\pi$，则得 $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n=\pi^2$，于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{1'}$$

若在展开式(3)中令 $x=\pi$，则得 $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\pi^2$，于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \tag{2'}$$

将级数(1′)和(2′)相加，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]=\frac{\pi^2}{4}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}. \tag{3'}$$

【2963】 写出函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha, \\ 0, & \alpha<|x|<\pi\end{cases}$ 的李雅普诺夫等式.

利用李雅普诺夫等式，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$ 之和.

解 由于 $f(x)$ 为偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}, \quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\sin n\alpha}{n\pi},$$

又 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}$，故对应于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开的李雅普诺夫等式为

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{2\alpha^2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2\alpha}{\pi}.$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}^{*)}-\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\pi^2-3\pi\alpha+3\alpha^2}{6}.$$

*）利用 2961 题的结果.

利用公式 $\cos x=\frac{1}{2}(t+\bar{t})$，$\sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(t-\bar{t})$，式中 $t=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 及 $\bar{t}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$，将下列函数展开成傅里叶级数：

【2966】 $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ （$|q|<1$）.

解 由于

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=\frac{\frac{q}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{1-q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+q^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}{(1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})(1-q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}-\frac{1}{1-q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\right)$$
$$=\frac{1}{2\mathrm{i}}[(1+q\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+q^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\cdots)-(1+q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+q^2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\cdots)]=q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots,$$

及级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

满足 $|q^n\sin nx|\leqslant q^n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$（$|q|<1$）收敛，故级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 因此，级数

$$q\sin x+q^2\sin 2x+\cdots+q^n\sin nx+\cdots$$

即为其和 $\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$（它是周期为 2π 的奇函数）的傅里叶级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

【2969】 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ （$|q|<1$）.

解 由于 $1-2q\cos x+q^2\geqslant 1-2q+q^2=(1-q)^2>0$，故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，而且是周期为 2π 的偶函数，将函数对 x 求导数，得

$$[\ln(1-2q\cos x+q^2)]'=\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx^{*)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

对上式从 0 到 x 积分（由于上式中级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛，故可在有限区间上逐项积分），则有

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=\int_0^x\frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}\mathrm{d}x+2\ln(1-q)=2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x q^n\sin nx\mathrm{d}x+2\ln(1-q)$$
$$=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}+2\ln(1-q).$$

而 $\ln(1-q)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}$，于是，

$$\ln(1-2q\cos x+q^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{n}\cos nx\quad(-\infty<x<+\infty).$$

由于右端级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛，故它就是左端函数的傅里叶级数.

*）利用 2966 题的结果

将下列无界周期函数展开成傅里叶级数：

【2970】 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

解 $f(x)$是以 2π 为周期的周期函数，当 $x=2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$是偶函数，从而，$b_n=0$，且

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)^{*)}=-2\ln2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin nx\ln\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t,$$

由于

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}t=\pi^{**)}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\mathrm{d}x=\pi.$$

在上式左端第二个积分中令 $\pi-x=u$，即得与第一个积分相同的积分，从而，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)}{\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

利用这一结果，易得

$$a_n=-\frac{1}{n},\quad(n=1,2,\cdots).$$

由于 $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$在$(-\pi,\pi)$内绝对可积(参看上面 a_0 计算)：

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\left|\ln\sin\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x=-2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=2\pi\ln2<+\infty,$$

且除 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$诸点外，在其他的点 $f(x)$均可微，故根据傅里叶级数收敛的 Lipschitz 判别法(参看 T. M. 菲赫金哥尔茨著，微积分学教程，第三卷第三分册 658 目)知，除上述诸点外，$f(x)$的傅里叶级数收敛于 $f(x)$本身，即

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|=-\ln2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}\quad(x\neq2k\pi;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

*) 利用 2353 题的结果.

**) 利用 2291 题的结果.

【2975】 应当如何把给定在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内的可积函数$f(x)$延拓到区间$(-\pi,\pi)$内，使得它展开成傅里叶级数后具有以下形式：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n-1)x\quad(-\pi<x<\pi)?$$

提示 应有 $f(-x)=f(x)$，$f(\pi-x)=-f(x)$ $(-\pi<x<\pi)$.

解 由于展开式中无正弦项，故 $f(x)$延拓到$(-\pi,\pi)$内应满足 $f(-x)=f(x)$. 函数 $f(x)$延拓到$(\frac{\pi}{2},\pi)$的部分记以$g(x)$，则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos2nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}g(x)\cos2nx\mathrm{d}x=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$，即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\cos 2ny\mathrm{d}y+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}[f(\pi-x)+g(x)]\cos 2nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

为要上式成立，显然只要求对于$(\frac{\pi}{2},\pi)$内任一 x 值，恒有

$$f(\pi-x)+g(x)=0, \quad \text{即} \quad g(x)=-f(\pi-x).$$

总之，首先要在$(\frac{\pi}{2},\pi)$内定义一个函数，使它等于$-f(\pi-x)$；然后，再按偶函数延拓到$(-\pi,0)$，不妨将延拓到$(-\pi,\pi)$内的函数仍记为 $f(x)$，则由上述讨论知，必有

$$f(-x)=f(x), \quad f(\pi-x)=-f(x) \quad (-\pi<x<\pi).$$

【2981】 若函数 $\varphi(-x)\equiv\psi(x)$，问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的傅里叶系数 a_n,b_n 与 $\alpha_n,\beta_n(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？

提示 $a_n=\alpha_n(n=0;1,2,\cdots)$，$b_n=-\beta_n(n=1,2,3,\cdots)$.

解 函数 $\varphi(x),\psi(x)$的傅里叶系数分别为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x;$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x, \qquad \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

由于

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right],$$

故在上式右端两个积分中代作换$-x=y$，并将 $\varphi(-x)=\psi(x)$代入，即得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\cos nx\mathrm{d}x=\alpha_n.$$

同理，有

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\pi}\left[-\int_{0}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\beta_n.\end{aligned}$$

因此，$\varphi(x)$、$\psi(x)$的傅里叶系数 a_n、b_n 与 α_n、β_n 的关系为

$$a_n=\alpha_n(n=0,1,2,\cdots), \qquad b_n=-\beta_n(n=1,2,3,\cdots).$$

【2985】 设 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，并且 a_n,b_n $(n=0,1,2,\cdots)$为其傅里叶系数. 求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 $A_n,B_n(n=0,1,2,\cdots)$.

利用所得的结果，推出李雅普诺夫等式.

提示 $A_0=a_0^2$，$A_n=a_n^2+b_n^2(n=1,2,3,\cdots)$；$b_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$. 由此易得李雅普诺夫等式.

解 由于 $F(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+2\pi+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=F(x)$，

故 $F(x)$仍为以 2π 为周期的函数. 于是，有

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{\pi^2}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\right]^2=a_0^2,\end{aligned}$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\cos n\xi\cos nt+\sin n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[a_nf(t)\cos nt+b_nf(t)\sin nt]\mathrm{d}t=a_n^2+b_n^2\quad(n=1,2,3,\cdots);$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(\xi)(\sin n\xi\cos nt-\cos n\xi\sin nt)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[b_nf(t)\cos nt-a_nf(t)\sin nt]\mathrm{d}t=b_na_n-a_nb_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由 $f(x)$ 的连续性知，$F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数，故按展开定理，注意到 $B_n=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$，即得

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx.$$

因此，特别地，有

$$F(0)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n.$$

但已知 $A_0=a_0^2$，$A_n=a_n^2+b_n^2$，且

$$F(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(0+t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t,$$

故得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

这就是李雅普诺夫等式.

§7. 级数求和法

1° **直接求和法** 若 $u_n=v_{n+1}-v_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v_\infty$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=v_\infty-v_1.$$

特别地，若 $u_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$，其中数 a_i $(i=1,2,\cdots)$ 组成以 d 为公差的等差数列，则

$$v_n=-\frac{1}{md}\cdot\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形下，未知级数能表示为下列已知级数的线性组合：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2;\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

等等.

2° **阿贝尔方法** 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

在最简单的例子中，借助于逐项微分法或积分法来求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和.

3° **三角级数求和法** 为了求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad 及 \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin nx$$

的和，通常把前者视为复数域内的幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$（其中 $z=e^{ix}$）的和的实部，而把后者视为该幂级数的和的虚部的系数.

在许多情形下级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z} \quad (|z|<1)$$

是有用的.

求下列级数的和：

【2988】 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$.

解 $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]+(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1}-1\right\}=2\ln 2-1.$$

【2990】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}$ （m 为正整数）.

解 由 $\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n}\right)$，考虑适当大的正整数 N，并令 $N\to\infty$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}-\cdots-\frac{1}{N+m}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

【2993】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)^{*)}=1.$$

*） 所写级数均为绝对收敛级数，并利用 2961 题的结果（或本节前言）.

【2999】 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$.

解 注意到

$$-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right),\ \frac{2}{5!}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right),\ \cdots,\ \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right],\ \cdots$$

相加即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]^{*)}=\frac{1}{2}(\cos 1-\sin 1).$$

*) 由于级数绝对收敛，从而其和与项相加的顺序无关.

利用逐项微分法求级数的和：

【3006】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

解 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{N\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，故收敛半径为 1. 当$x=1$时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛. 因此，级数的收敛域为$[-1,1)$.

当 $x\in[-1,1)$时，令 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. 当$|x|<1$时，逐项微分之，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0)=0$，故得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=\ln\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1).\tag{1}$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性，且其和为$-\ln2=\ln\frac{1}{2}$，利用阿贝尔定理知，上述结果(1)当$-1\leqslant x<1$时成立.

利用逐项积分法求级数的和：

【3012】 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n$.

解题思路 易知级数的收敛域为$(-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 对后一级数逐项积分，并利用 2911 题的结果，可得

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}.$$

于是，当$|x|<1$ 时，有 $g(x)=\left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$.

解 由于$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}=1$，故收敛半径为 1. 当$|x|=1$时，由于 $n(n+2)\to\infty$，故级数发散. 因此，级数的收敛域为$(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$时，令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}=xg(x),$$

其中 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+2)\int_0^x t^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n\\&=\frac{x}{(1-x)^2}{}^{*)}+\frac{2x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},\end{aligned}$$

故 $g(x)=[G(x)]'=\left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right]'=\frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此，当$|x|<1$ 时，$f(x)=xg(x)=\frac{x(3-x)}{(1-x)^3}$.

*) 利用 2911 题的结果.

利用阿贝尔方法,求下列级数的和:

【3014】 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$.

解题思路 易知级数 $x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$ 的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots,$$

逐项微分之,可得 $f'(x)=\frac{1}{1+x^3}$. 注意到 $f(0)=0$,并利用 1881 题的结果,可得

$$f(x)=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

利用阿贝尔定理,即易获解.

解 易知级数 $x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$ 的收敛域为$(-1,1]$. 当$|x|<1$时,令

$$f(x)=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\cdots$$

逐项微分之,得

$$f'(x)=1-x^3+x^6-x^9+\cdots=\frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0)=0$,故有

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}^{*)}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\quad(-1<x<1).$$

由阿贝尔定理,即得 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=f(1)=\frac{1}{3}\ln2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

*) 利用 1881 题的结果.

求下列三角级数的和:

【3018】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

解 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\ln\frac{1}{1-z}$,其中 $z=e^{ix}$,以及

$$\ln\frac{1}{1-z}=-\ln(1-\cos x-i\sin x)=-\frac{1}{2}\ln(2-2\cos x)+i\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}^{*)}$$

$$=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|+i\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}\tag{1}$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\tag{2}$$

比较(1),(2)两式实数部分及虚数部分,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\quad(0<x<2\pi),\tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\arctan\frac{\sin x}{1-\cos x}=\arctan\left(\cot\frac{x}{2}\right)=\arctan\left(\tan\frac{\pi-x}{2}\right)=\frac{\pi-x}{2}\quad(0<x<2\pi).$$

*) 其中用到 $\ln z=\ln(|z|e^{i\arg z})=\ln|z|+i\arg z$. 若 $z=x+iy$,则 $\ln|z|=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$,而 $\arg z=\arctan\frac{y}{x}$.

【3021】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$.

解 利用半角公式、积化和差公式以及3018题的结果，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha\sin nx}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\alpha\sin nx}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x+2\alpha)}{n}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S：

(1) 取 $0<x<2\pi$，$0<x-2\alpha<2\pi$ 与 $0<x+2\alpha<2\pi$ 的公共部分，即 $2\alpha<x<2\pi-2\alpha$. 此时，级数的和为

$$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=0.$$

(2) 当 $0<x<2\alpha$ 时，$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha)}{8}+\frac{\pi-(2\alpha-x)}{8}=\frac{\pi}{4}$.

(3) 当 $2\pi-2\alpha<x<2\pi$ 时，$S=\frac{\pi-x}{4}-\frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)}{8}$*) $-\frac{\pi-(x-2\alpha)}{8}=-\frac{\pi}{4}$.

*) 由于 $2\pi<x+2\alpha<3\pi$，故可令 $x+2\alpha=2\pi+\theta$ $(0<\theta<\pi)$，则有 $\sin n(x+2\alpha)=\sin n(2\pi+\theta)=\sin n\theta$，从而以 $\theta=x+2\alpha-2\pi$ 代替3018题的结果中的 x 即可.

【3022】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

解 记 $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$，利用3018题的结果，有

$$I(x)=(\operatorname{sgn}x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n|x|}{n}=(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-|x|}{2}\quad(|x|<2\pi).$$

又记

$$I_1(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1},\qquad I_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k},$$

则有

$$I_2(x)=(\operatorname{sgn}x)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(2|x|)}{k}=\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-2|x|}{2}\quad(|x|<\pi).$$

由 $I(x)=I_1(x)+I_2(x)$，当 $|x|<\pi$ 时，有

$$(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-|x|}{2}=I_1(x)+(\operatorname{sgn}x)\frac{\pi-2|x|}{4}.$$

于是，最后得 $I_1(x)=(\operatorname{sgn}x)\left(\frac{\pi-|x|}{2}-\frac{\pi-2|x|}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x$ $(|x|<\pi)$.

【3024】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

解 记 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$，显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上一致收敛，故 $F(x)$ 是 $-\infty<x<+\infty$ 上的连续函数，而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此，只要求 $F(x)$ 在 $|x|\leqslant\pi$ 上的值. 易知

$$2\sin x\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x=1-\cos 2nx.$$

故当 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ $(0<\tau<\frac{\pi}{2}$ 是任意的$)$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x\right|\leqslant\frac{1}{\sin\tau}.$$

于是，根据狄利克雷判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$ 上一致收敛. 从而，由逐项求导数法则

知，当$\tau\leqslant x\leqslant\pi-\tau$时，有

$$F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{\pi}{4}^{*)}. \tag{1}$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0<x<\pi$ 时成立. 于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+C \quad (0<x<\pi). \tag{2}$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}^{**)},$$

在(2)式中令 $x\to+0$ 取极限，即得 $C=\frac{\pi^2}{8}$，于是，

$$F(x)=-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi^2}{8} \qquad (0\leqslant x<\pi).$$

由此，再注意到 $F(x)$是偶函数及连续函数，得 $F(x)=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}|x| \quad (|x|\leqslant\pi)$.

*) 利用 3022 题的结果.

**) 利用 2961 题的结果.

求下列级数的和：

【3033】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$，若(1) $|x|<1$；(2) $|x|>1$.

解 记 $s_n=\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \quad (n=1,2,\cdots;\ |x|\neq1)$.

注意到

$$\frac{1}{1-x^n}-\frac{1}{1-x^{n+1}}=\frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}\,\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\frac{1-x}{x}s_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

即得

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1-x}{x}s_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{1-x^{k+1}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{N+1}},$$

或有

$$\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\,\frac{1}{1-x^{N+1}}.$$

于是，(1) 当$|x|<1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-x^{N+1}}=\frac{x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

(2) 当$|x|>1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}s_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}s_k=\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{x}{1-x}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{x^{N+1}-1}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

§8. 利用级数求定积分

利用被积函数的级数展开式计算下列积分：

【3034】 $\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$.

解题思路 利用 2549 题的结果. 但必须注意，由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

当 $x=1$ 时发散，故它在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上逐项积分的合理性要给出证明，详见本题的证明.

解 $\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}dx=-\int_0^1\ln(1-x)dx=-\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx$

$=\int_0^1 xdx+\int_0^1\frac{x^2}{2}dx+\int_0^1\frac{x^3}{3}dx+\cdots^{*)}$

$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=1.^{**)}$

*） 由于幂级数（收敛半径为 1）$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$ 当 $x=1$ 时发散，故它在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明，今证如下：

对任何 $0<\tau<1$，有

$$\int_0^\tau \ln(1-x)dx=\int_0^\tau\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}\right)dx+R_n, \tag{1}$$

其中

$$R_n=\int_0^\tau\left(-\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{x^{n+2}}{n+2}-\cdots\right)dx.$$

由于 $0<\tau<1$，故可在 $0\leqslant x\leqslant\tau$ 上逐项积分，得

$$0>R_n=-\left[\frac{\tau^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\frac{\tau^{n+3}}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]>-\left[\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$=-\left[\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\cdots\right]=-\frac{1}{n+1}.$$

于是，由(1)式知

$$\left|\int_0^\tau\ln(1-x)dx-\left(-\frac{\tau^2}{1\cdot 2}-\frac{\tau^3}{2\cdot 3}-\cdots\frac{\tau_{n+1}}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}. \tag{2}$$

在(2)式中让 n 固定而令 $\tau\to 1-0$ 取极限（注意，瑕积分 $\int_0^1\ln(1-x)dx$ 显然收敛），得

$$\left|\int_0^1\ln(1-x)dx-\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)\right|<\frac{1}{n+1}\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

由此式即知

$$\int_0^1\ln(1-x)dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\cdots\frac{1}{n(n+1)}\right)=-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}-\cdots,$$

也即

$$\int_0^1\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)dx=\int_0^1(-x)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_0^1\left(-\frac{x^3}{3}\right)dx+\cdots,$$

换句话说，逐项积分公式成立.

本节以下诸题中，凡在端点发散的级数的逐项积分的合理性问题，都可仿照上面类似地去证明，不再一一写出.

**） 利用 2549 题的结果：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

【3039】 $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}$.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{e^{2\pi x}-1}=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-2\pi x}(1+e^{-2\pi x}+e^{-4\pi x}+\cdots)dx$

$=\left[-\frac{x}{2\pi}e^{-2\pi x}-\frac{1}{(2\pi)^2}e^{-2\pi x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{x}{4\pi}e^{-4\pi x}-\frac{1}{(4\pi)^2}e^{-4\pi x}\right]_0^{+\infty}+\left[-\frac{x}{6\pi}e^{-6\pi x}-\frac{1}{(6\pi)^2}e^{-6\pi x}\right]_0^{+\infty}+\cdots$

$=\frac{1}{(2\pi)^2}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)=\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}^{*)}=\frac{1}{24}.$

*） 利用 2961 题的结果.

求：

【3049】 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x.$

提示 利用 2872 题的结果.

解 利用 2872 题的结果，即得：当 $|\alpha|\leqslant 1$ 时，

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=-2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\alpha^n\cos nx}{n}\mathrm{d}x=0.$$

当 $|\alpha|>1$ 时，即当 $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$ 时，

$$\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)=\ln\left[\alpha^2\left(1-2\,\frac{1}{\alpha}\cos x+\frac{1}{\alpha^2}\right)\right]=\ln\alpha^2+\ln\left(1-\frac{2}{\alpha}\cos\alpha+\frac{1}{\alpha^2}\right).$$

利用以上结果，即得：当 $|\alpha|>1$ 时 $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x=\pi\ln\alpha^2=2\pi\ln|\alpha|.$

§9. 无穷乘积

1° **无穷乘积的收敛性** 若存在有限而且异于零的极限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}p_i=\lim_{n\to\infty}P_n=P,$$

则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n \tag{1}$$

是收敛的.

若 $P=0$ 而乘数 p_n 中无一为零，则称乘积(1)发散于零；在相反的情形下，则称无穷乘积收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\ln p_n \tag{2}$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为：$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=1$.

若 $p_n=1+\alpha_n(n=1,2,\cdots)$ 及 α_n 不变号，则乘积(1)收敛的充分必要条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1) \tag{3}$$

收敛.

在一般的情形下，当 α_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛时，乘积(1)与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-1)^2$$

同时收敛或同时发散，且在发散的情形下，乘积发散于零.

2° **绝对收敛性** 若级数(2)绝对收敛或条件收敛，则称乘积(1)为绝对收敛或条件(非绝对)收敛. 级数(3)绝对收敛是乘积(1)绝对收敛的充分必要条件.

3° **函数的无穷乘积展开** 当 $-\infty<x<+\infty$ 时有展开式

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \cos x=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right].$$

特别是，由第一式当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时得沃利斯公式

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right).$$

证明下列等式：

【3054】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

证 由于部分乘积满足下述等式：

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

从而，$P_n=\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{2}}\to\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$（当 $n\to\infty$ 时），故 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$

【3056】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$

证 当 $x\neq0$ 时，由于部分乘积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}\to\frac{\sin x}{x}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{ 时}),$$

故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}.$

【3058】 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1).$

证 由于 $(1-x)P_n=(1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n})=1-x^{2^{n+1}}$，从而（注意 $|x|<1$），

$$P_n=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\to\frac{1}{1-x}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{ 时}),$$

故 $\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}$. 利用此题的结果，易得

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

此即 3054 题的结果.

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值：

【3062】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right].$

证 $1+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$P_n=\frac{2^2}{1\cdot3}\cdot\frac{3^2}{2\cdot4}\cdot\frac{4^2}{3\cdot5}\cdots\frac{(n-1)^2}{(n-2)n}\cdot\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}\cdot\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}\to2\quad(\text{当 } n\to\infty\text{ 时}),$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n(n+2)}\right]$收敛，且其值为 2.

【3064】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\quad(a>0).$

证 由于部分乘积

$$P_n=a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdots a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\left[1-\frac{1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]}\to a^{-\ln2}\quad(\text{当 } n\to\infty\text{ 时}),$$

故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}$ 收敛，且其值为 $a^{-\ln2}$.

【3065】 可否由乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{n} q_n$ 的收敛性得出下列乘积：(1) $\prod\limits_{n=1}^{n}(p_n+q_n)$；(4) $\prod\limits_{n=1}^{n}\frac{p_n}{q_n}$.
的收敛性？

提示 (1) 不可以. 例如，乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ 及 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$.

(4) 可以，且其值为 $\frac{P}{Q}$ $(P\neq 0, Q\neq 0)$，其中 $P=\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$，$Q=\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$.

解 (1) 不可以. 例如，乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n^2})$ 及 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^2})$ 均收敛，但乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right]=\prod\limits_{n=1}^{\infty}(2\cdot n^0)$ 却发散.

(4) 可以. 事实上，部分乘积 $Q_n=\frac{p_1p_2\cdots p_n}{q_1q_2\cdots q_n}$ $(q_i\neq 0,\ i=1,2,\cdots)$，当 $n\to\infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$，故 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$ 收敛. 且其值为 $\frac{P}{Q}$，其中 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n=P\neq 0$，$\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n=Q\neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性：

【3068】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$.

提示 注意 $\frac{1}{n^p}$ 不变号以及级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

解 $p_n=1+\frac{1}{n^p}$，其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散，故无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n^p})$ 当 $p>1$ 时收敛，而当 $p\leqslant 1$ 时发散.

【3070】* $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 通项 $p_n=\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)^p=p\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n^2+1}\right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2+1}$ 收敛)，故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$，这时，若 $p\geqslant 0$，第一个因子为零，按定义无穷乘积收敛于零；若 $p<0$，第一个因子无意义，因此整个无穷乘积无意义.

【3074】 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

提示 注意级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

解 $p_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$，$\ln p_n=-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln p_n=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln p_n$ 收敛. 因此，无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

收敛.

【3087】 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ ($|\alpha_n|<\frac{\pi}{4}$) 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛,故 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 此时有

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)=\frac{1+\tan\alpha_n}{1-\tan\alpha_n}=(1+\tan\alpha_n)(1+\tan\alpha_n+\tan^2\alpha_n+\cdots)$$
$$=1+2\tan\alpha_n+2\tan^2\alpha_n+\cdots=1+2\alpha_n+o(\alpha_n).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]$收敛,而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2\alpha_n+o(\alpha_n)]^2=\sum_{n=1}^{\infty}4\alpha_n^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cdot o(\alpha_n)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$$

也收敛*),故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha_n\right)$ $\left(|\alpha_n|<\frac{\pi}{2}\right)$ 收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2\leqslant\sum_{s=1}^{\infty}\left(|\alpha_{i_s}|\cdot|\alpha_{k_s}|\right)$,因而,$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时,有

$$|\alpha_n\cdot o(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,\quad |o^2(\alpha_n)|\leqslant|\alpha_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cdot o(\alpha_n)\right]$及 $\sum_{n=1}^{\infty}o^2(\alpha_n)$均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

【3090】 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]$.

提示 就 $p>1$,$\frac{1}{2}<p\leqslant1$,$0<p\leqslant\frac{1}{2}$及 $p\leqslant0$ 四种情况加以讨论.

解 当 $p>1$ 时,由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$绝对收敛,故原无穷乘积绝对收敛.

当$\frac{1}{2}<p\leqslant1$ 时,由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right]^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$收敛,故原无穷乘积条件收敛.

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$时,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$发散,故原无穷乘积发散.

当 $p\leqslant0$ 时,由于$\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$不趋于零,故原无穷乘积也发散.

【3093】 $\prod_{n=1}^{\infty}n^{(-1)^n}$.

提示 令 $p_n=n^{(-1)^n}$,注意它的子数列 $p_{2k}=2k\to\infty$ $(k\to\infty)$.

解 记 $p_n=n^{(-1)^n}$,则有子数列

$$p_{2k}=(2k)^{(-1)^{2k}}=2k\to\infty\quad(k\to\infty).$$

于是 $p_n\not\to1$ $(n\to\infty)$. 因此,原无穷乘积发散.

【3094】 $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n=\sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$,则有

$$\ln p_n=\frac{1}{n}\ln n^{(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n}\ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼茨型级数，它条件收敛，因此，原无穷乘积条件收敛.

【3100】 设 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$（黎曼 ζ 函数）而 $p_n(n=1,2,\cdots)$ 是素数数列. 证明：$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)$.

证 设 $x>1$. 首先，有

$$\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\frac{1}{p_n^x}+\frac{1}{(p_n^2)^x}+\cdots+\frac{1}{(p_n^m)^x}+\cdots.$$

如果把对应于不超过正整数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来，则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=1+\frac{1}{n_1^x}+\frac{1}{n_2^x}+\cdots,$$

其中 $n_1,n_2,\cdots$ 是整数，它不包含超过 N 的素因子，显然 $1,2,\cdots,N$ 这种整数全被包含在 $n_1,n_2,\cdots$ 之中. 因此，

$$\left|\zeta(x)-\prod_{p_n\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}\right|=\left|\zeta(x)-1-\frac{1}{n_1^x}-\frac{1}{n_2^x}-\cdots\right|\leqslant\frac{1}{(N+1)^x}+\frac{1}{(N+2)^x}+\cdots\to 0\quad(n\to\infty),$$

取极限即得 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^x}\right)^{-1}=\zeta(x)\quad(x>1)$.

【3105】 根据欧拉的定义 Γ 函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定：

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发：(1)将函数 $\Gamma(x)$ 表示为无穷乘积的形状；(2)证明：$\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义；(3)推出下面这个性质：$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$；(4)对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (1) 由于

$$\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\frac{n^x}{x}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x},$$

故得 $\Gamma(x)=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$.

(2) 由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程，得知 $x\neq -n(n=0,1,2,\cdots)$，即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式. 另一方面，由于

$$p_n=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}=1+\alpha_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

而 $\alpha_n=\frac{x(x-1)}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 绝对收敛，从而，无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛，也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x\neq -n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 的一切实数 x 皆有意义.

(3) 由于

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\ n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n!\ n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+n+1)}}{\frac{n!\ n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{x+n+1}=x,$$

故 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

(4) 令 $x=n-1$，即得 $\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1)=(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\cdots=(n-1)!$.

【3110】 证明：若 $0<x<y$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=0$.

证 记 $p_n=\dfrac{x+n}{y+n}\ (n=1,2,3,\cdots)$. 显然，$0<p_n<1$. 由题意，现在要证无穷乘积 $\dfrac{x}{y}\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 发散到零. 因为部分乘积 $\prod\limits_{k=1}^{n}p_k$ 是正的且递减，故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n=1+\alpha_n$，则有

$$\alpha_n=p_n-1=\frac{1+\frac{x}{n}}{1+\frac{y}{n}}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)^{-1}-1=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left[1-\frac{y}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1$$

$$=\left[1-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]-1=-\frac{y-x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故当 n 适当大时，α_n 保持定号. 但由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y-x}{n}$ 发散，即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 发散. 因此，原无穷乘积发散，即它发散到零. 于是，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{n}\frac{x+k}{y+k}=\frac{x}{y}\prod_{k=1}^{\infty}p_k=0.$$

证毕.

§10. 斯特林公式

斯特林公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}\quad(0<\theta_n<1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林公式，近似地计算：

【3117】 $\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x$.

解题思路 先将$[0,2\pi]$分成$[0,\frac{\pi}{2}]$，$[\frac{\pi}{2},\pi]$，$[\pi,\frac{3}{2}\pi]$及$[\frac{3\pi}{2},2\pi]$四个子区间，然后对在这些子区间上的定积分，分别作代换 $x=t$，$x=\frac{\pi}{2}+t$，$x=t+\pi$ 及 $x=\frac{3\pi}{2}+t$，易得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{200}x\mathrm{d}x.$$

最后，利用 2281 题的结果及斯特林公式，可得原式近似等于 $0.355\left(1+\frac{\theta}{600}\right)$，其中 $|\theta|<1$.

解 先将 $\int_0^{2\pi}$ 分成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$，$\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$ 及 $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$ 四部分，然后分别作代换 $x=t$，$x=t+\frac{\pi}{2}$，$x=t+\pi$，及 $x=t+\frac{3\pi}{2}$，再利用结果 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\mathrm{d}t$，易得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{200}x\mathrm{d}x.$$

利用 2281 题的结果及斯特林公式，最后得

$$\int_0^{2\pi}\sin^{200}x\mathrm{d}x=4\frac{(199)!!}{(200)!!}\frac{\pi}{2}=\frac{200!}{2^{200}(100!)^2}\cdot 2\pi=\frac{2\pi\sqrt{2\pi\cdot 200}\cdot 200^{200}e^{-200}e^{\frac{\theta_1}{2400}}}{2^{200}\cdot 200\pi\cdot 100^{200}e^{-200}e^{\frac{\theta_2}{600}}}$$

$$=0.355e^{\frac{\theta}{600}}\approx 0.355\left(1+\frac{\theta}{600}\right),$$

其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3118】 推出乘积 $(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$ 的渐近公式.

解 $(2n-1)!!=\dfrac{2n!}{2^n n!}=\dfrac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}(2n)^{2n}e^{-2n}e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}e^{\frac{\theta_2}{12n}}}=\sqrt{2}(2n)^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}}$,其中 $|\theta|<1$ $(0<\theta_1<1,0<\theta_2<1)$.

【3120】 利用斯特林公式求下列极限:

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}$.

解 (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[2n]{2\pi n}\;ne^{-1}e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{\sqrt[n]{2\pi n}\;e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=e.$

(3)利用 3118 题的结果即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[2n]{2}\;2ne^{-1}e^{\frac{\theta}{12n^2}}}=\dfrac{e}{2}.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{\ln n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(\ln 2+\ln\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{\theta}{12n}}{n\ln n}=1.$

§11. 用多项式逼近连续函数

1° **拉格朗日插值公式** 拉格朗日多项式

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}y_i$$

具有性质 $P_n(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\cdots,n)$.

2° **伯恩斯坦多项式** 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数,则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}$$

当 $n\to\infty$ 时在闭区间 $[0,1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

【3122】 写出经过三点:$A(x_0-h,y_{-1})$,$B(x_0,y_0)$,$C(x_0+h,y_1)$ 的抛物线方程 $y=ax^2+bx+c$.

解 将三点的坐标代入拉格朗日插值公式,即得

$$\begin{aligned}y=&\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1}+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0\\&+\frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1\\=&y_0+\frac{y_1-y_{-1}}{2h}(x-x_0)+\frac{y_1-2y_0+y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2.\end{aligned}$$

【3128】 对于在闭区间 $[a,b]$ 上的已知函数 $f(x)$,写出伯恩斯坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a+(b-a)y=x$,则当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时 $a\leqslant x\leqslant b$,此时

$$y=\frac{x-a}{b-a},\quad 1-y=\frac{b-x}{b-a},\quad f(x)=f(a+(b-a)y),$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的伯恩斯坦多项式为

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(a+(b-a)\frac{k}{n}\right)C_n^k\frac{(x-a)^k(b-x)^{n-k}}{(b-a)^n}.$$

【3129】 在闭区间 $[-1,1]$ 上用伯恩斯坦多项式 $B_4(x)$ 逼近函数 $f(x)=\dfrac{|x|+x}{2}$. 作出函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图像.

解 利用 3128 题的结果,易得

$$B_4(x)=\sum_{k=0}^{4} f\left(-1+\frac{k}{2}\right)C_4^k\,\frac{(x+1)^k(1-x)^{4-k}}{2^4}$$
$$=\frac{1}{2}C_4^3\,\frac{(x+1)^3(1-x)}{2^4}+1\cdot C_4^4\,\frac{(x+1)^4}{2^4}$$
$$=\frac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\frac{1}{16}(1+x)^4.$$

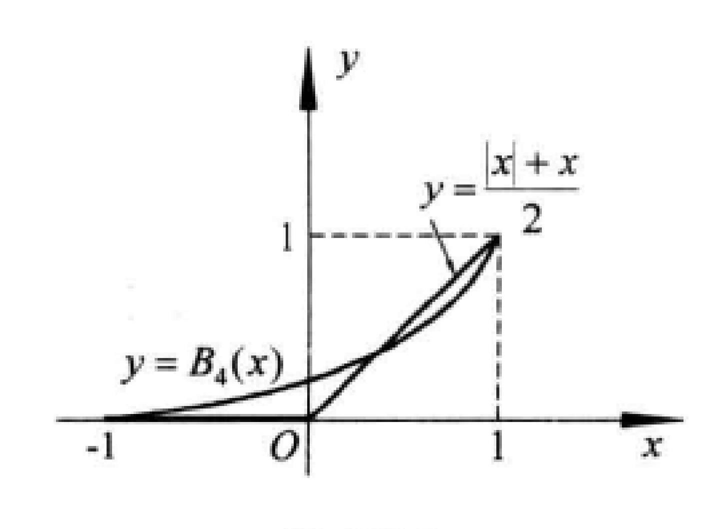


图 3129

函数 $y=\dfrac{|x|+x}{2}$ 和 $y=B_4(x)$ 的图像如图 3129 所示.

注 $y=B_4(x)=\dfrac{1}{8}(1-x)(1+x)^3+\dfrac{1}{16}(1+x)^4$ 当 $x=-1$ 时为 0；当 $x=1$ 时为 1；当 $x=0$ 时为 $\dfrac{3}{16}$.

又 $y'=\dfrac{(1+x)^2}{4}(2-x)$，当 $x=-1$ 时，$y'=0$；当 $x\in(-1,1)$ 时，$y'>0$，故图像上升.

$y''=\dfrac{3}{4}(1-x^2)\geqslant 0$，故图像向上凹.

【3133】 证明：在闭区间 $[-1,1]$ 上 $|x|=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$，其中

$$P_n(x)=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{i=2}^{n}\frac{1\cdot 3\cdots(2i-3)}{2\cdot 4\cdots(2i)}(1-x^2)^i.$$

证 $|x|=\sqrt{x^2}=\sqrt{1-t}$，其中 $t=1-x^2$.

我们知道，函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\sqrt{1-t}=1+\frac{1}{2}(-t)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-t)^n$$
$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n!\ 2^n}(-1)^n t^n$$
$$=1-\frac{t}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}(-1)^{2n-1}t^n=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\quad(-1<t<1).\qquad(1)$$

当 $t=\pm 1$ 时，上式右端级数为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(\pm 1)^n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{2n+2}{2n-1}-1\right)=\frac{3}{2}>1,$$

故由拉比判别法可知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 收敛，从而，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛. 因此，由幂级数的阿贝尔定理知，(1)式当 $t=\pm 1$ 时也成立，即有

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^n\quad(-1\leqslant t\leqslant 1).\qquad(2)$$

于是，将 $t=1-x^2$ 代入，即得

$$|x|=1-\frac{1-x^2}{2}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(1-x^2)^n=\lim_{n\to\infty}P_n(x)\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).\qquad(3)$$

证毕.

注 由幂级数的性质知，(2)式右端的级数在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上一致收敛(实际在 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 上也一致收敛)，故(3)式中的级数在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛. 因此，我们实际证明了更强的结论：当 $n\to\infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上一致趋于 $|x|$.

第六章 多元函数微分学

§1. 函数的极限. 连续性

1° **函数的极限** 设函数 $f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P,P_0)<\delta$，其中 $\rho(P,P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离，则有

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° **连续性** 若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 在 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 在所给区域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 在此区域内是连续的.

3° **一致连续性** 若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于区域 G 中的任何点 P',P''，只要

$$\rho(P',P'')<\delta,$$

便成立不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(P)$ 在区域 G 内是一致连续的.

有界闭区域内的连续函数在此区域内是一致连续的.

确定并画出下列函数的存在域：

【3141】 $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式 $x\leqslant x^2+y^2<2x$ 的点集. 由 $x^2+y^2\geqslant x$ 得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出 $(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图 3141 阴影部分所示，不包括大圆圆周在内，但包括小圆圆周.

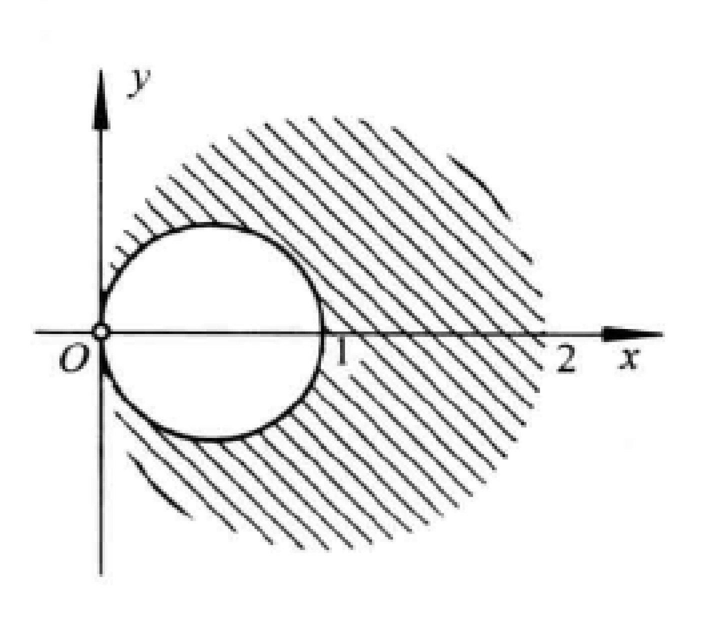


图 3141

作出下列函数的等值线：

【3159】 $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等值线为曲线族 $|x|+|y|-|x+y|=a$.

因为恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant0$. 当 $a=0$ 时，由 $|x|+|y|=|x+y|$ 两边平方即得

$$xy\geqslant0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时，$xy<0$ 分下面四组求解：

(1) $x>0,\ y<0,\ x+y\geqslant0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\dfrac{a}{2}$；

(2) $x>0,\ y<0,\ x+y\leqslant0,\ |x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\dfrac{a}{2}$；

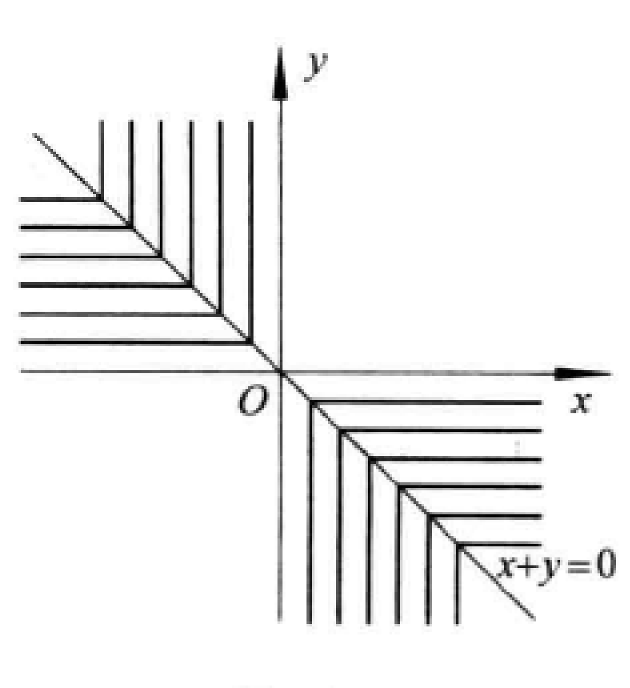


图 3159

(3) $x<0$, $y>0$, $x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之得 $x=-\frac{a}{2}$;

(4) $x<0$, $y>0$, $x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$,解之得 $y=\frac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族,它的各射线平行于坐标轴,如图 3159 所示.

求下列函数的等值面:

【3169】 $u=(x+y)^2+z^2$.

解 等值面为曲面族 $$(x+y)^2+z^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为 $x+y=0$ 和 $z=0$. 当 $a>0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{4}+y\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \\ y'=-x\sin\frac{\pi}{4}+y\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \\ z'=z. \end{cases}$$

这是旋转变换.在新坐标系中原等值面方程转化为

$$2x'^2+z'^2=a^2,\quad 即\quad \frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面,母线的方向平行于 y' 轴,准线为 $y'=0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}}+\frac{z'^2}{a^2}=1,$$

长半轴为 a(z' 轴方向),短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$(x' 轴方向).

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x'=0, \\ z'=0, \end{cases}$$

而在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x+y=0, \\ z=0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴.

根据曲面的已知方程研究其性质:

【3171】 $z=f(y-ax)$.

解 引入参数 t, s,将曲面方程 $z=f(y-ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=at+s, \\ z=f(s). \end{cases}$$

令固定 s,得到以 t 为参数的直线方程,其方向数为 1, a, 0. 因此,曲面为以 1, a, 0 为母线方向的一个柱面. 令 $t=0$,可得

$$\begin{cases} x=0, \\ y=s, \\ z=f(s), \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=0, \\ z=f(y), \end{cases}$$

这是 $x=0$ 平面上的一条曲线，也是柱面 $z=f(y-ax)$ 的一条准线.

【3174】$^+$ $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t,s，将曲面方程 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x=t, \\ y=st, \\ z=f(s). \end{cases}$$

今固定 s，这是一条过点 $(0,0,f(s))$ 的直线，方向数为 $1,s,0$. 因此，它与 Oz 轴垂直，与 Oxy 平面平行，且其方向与 s 有关. 从而得知，曲面 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来，它既不是柱面，也不是锥面. 令 $t=1$，得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x=1, \\ z=f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直相交的直线. 这样的直线的全体，便构成由 $z=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面.

【3179】 设 $z=x+y+f(x-y)$. 若当 $y=0$ 时，$z=x^2$. 求函数 f 及 z.

提示 易知 $f(x)=x^2-x$，且 $z=(x-y)^2+2y$.

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$，所以，

$$x^2=x+f(x), \quad 即 \quad f(x)=x^2-x,$$

且

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

【3182】 证明：对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

有

$$\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0}f(x,y)\}=\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0}f(x,y)\}=0,$$

然而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

证明思路 前面两个累次极限等式易证. 尽管它们相等，但当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 的路径趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2}=\begin{cases} 1, & k=1, \\ 0, & k=0. \end{cases}$$

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0}\{\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)\}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}0=0,$

$\lim\limits_{y\to 0}\{\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)\}=\lim\limits_{y\to 0}\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right\}=\lim\limits_{y\to 0}0=0.$

如果按 $y=kx\to 0$ 的方向取极限，则有

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k)^2}.$$

特别地，分别取 $k=0$ 及 $k=1$，便得到不同的极限 0 及 1. 因此，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

【3183】 证明：对于函数

$$f(x,y)=(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y},$$

累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$ 和 $\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$ 不存在，但存在 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

证明思路 只要注意不等式 $0\leqslant|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$，即易证极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 存在且等于零.

由于极限 $\lim\limits_{\substack{x\neq\frac{1}{k\pi}\\y\to0}}f(x,y)$ 及 $\lim\limits_{\substack{y\neq\frac{1}{k\pi}\\x\to0}}f(x,y)$ 均不存在，其中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$，故两个累次极限不存在.

证 由不等式

$$0\leqslant\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

易知 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$.

但当 $x\neq\frac{1}{k\pi}$，$y\to0$ 时，$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ 的极限不存在，因此，累次极限 $\lim\limits_{x\to0}\{\lim\limits_{y\to0}f(x,y)\}$ 不存在. 同法可证累次极限 $\lim\limits_{y\to0}\{\lim\limits_{x\to0}f(x,y)\}$ 也不存在.

求下列二重极限：

【3190】 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

提示 注意 $|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)^2}{4}|\ln(x^2+y^2)|$，并利用 1341 题的结果.

解 由不等式 $$|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{(x^2+y^2)}{4}|\ln(x^2+y^2)|$$

及

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{(x^2+y^2)^2}{4}\ln(x^2+y^2)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{4}t^2\ln t=0,$$

即得 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}=e^0=1.$

【3193】$^+$ 若 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，问下列极限沿怎样的方向 φ 存在有限的极限值：

(1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$； (2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty}e^{x^2-y^2}\sin2xy$.

解 (1) $\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to+0}e^{\frac{\cos\varphi}{\rho}}=\begin{cases}0, & \cos\varphi<0,\\1, & \cos\varphi=0,\\+\infty, & \cos\varphi>0.\end{cases}$

于是，仅当 $\cos\varphi\leqslant0$ 即 $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时，所给的极限才存在有限的极限值.

(2) $e^{x^2-y^2}\sin2xy=e^{\rho^2\cos2\varphi}\sin(\rho^2\sin2\varphi)$.

当 $\rho\to+\infty$ 时，$\sin(\rho^2\sin2\varphi)$ 有界，除 $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ $(k=0,1,2,3)$ 外无极限，且

$$\lim_{\rho\to+\infty}e^{\rho^2\cos2\varphi}=\begin{cases}0, & \cos2\varphi<0,\\1, & \cos2\varphi=0,\\+\infty & \cos2\varphi>0.\end{cases}$$

于是，仅当 $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4}<\varphi<\frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0$，$\varphi=\pi$ 时，才存在有限的极限值.

求下列函数的不连续点：

【3196】 $u=\dfrac{x+y}{x^3+y^3}$.

解 对于任意不等于零的实数 a,有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to a\\ y\to -a}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3a^2}.$$

于是,对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点. 而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点.

【3202】 证明:函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
分别对于每一个变量 x 或 y(当另一变量的值固定时)是连续的,但并非对这些变量的总体是连续的.

提示 对于命题的后半部分,只要证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

证 先固定 $y=a\neq 0$,则得 x 的函数

$$g(x)=f(x,a)=\begin{cases}\dfrac{2ax}{x^2+a^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即 $g(x)=\dfrac{2ax}{x^2+a^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$,它是处处有定义的有理函数. 又当 $y=0$ 时,$f(x,0)\equiv 0$,它显然是连续的. 于是,当变数 y 固定时,函数 $f(x,y)$ 对于变量 x 是连续的. 同理可证,当变量 x 固定时,函数 $f(x,y)$ 对于变量 y 是连续的.

作为二元函数,$f(x,y)$ 虽在除点 $(0,0)$ 外的各点均连续,但在点 $(0,0)$ 不连续. 事实上,当动点 $P(x,y)$ 沿射线 $y=kx$ 趋于原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ (y=kx)}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)}=\frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值,从而知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在. 因此,函数 $f(x,y)$ 在原点不是二元连续的.

【3204】 证明:函数 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & y=0\end{cases}$ 的不连续点的集合不是闭集.

证 当 $y_0\neq 0$ 时,函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 显见是连续的,即 $f(x,y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|$,故知 $f(x,y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0\neq 0$ 时,对于点 $(x_0,0)$,由于极限

$$\lim_{y\to 0}f(x_0,y)=\lim_{y\to 0}x_0\sin\frac{1}{y}$$

不存在,故知 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续.

这样,我们证明了,函数 $f(x,y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然,原点是不连续点集合的一个聚点,但它本身却不是 $f(x,y)$ 的不连续点. 因此,$f(x,y)$ 的不连续点的集合不是闭集.

【3205】 证明:若函数 $f(x,y)$ 在某区域 G 内对变量 x 是连续的,而关于 x 对变量 y 是一致连续的,则此函数在该区域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$.

由于 $f(x,y)$ 关于 x 对变量 y 一致连续,故对任给的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$,使当 $(x,y')\in G$, $(x,y'')\in G$ 且 $|y'-y''|<\delta_1$ 时,就有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于变量 x 是连续的，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$，使当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0<\delta\leqslant\min\{\delta_1,\delta_2\}$，并使点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内，则当点 $P(x,y)$ 属于点 (x_0,y_0) 的 δ 邻域，即 $|PP_0|<\delta$ 时，

$$|x-x_0|<\delta\leqslant\delta_2,\quad |y-y_0|<\delta\leqslant\delta_1.$$

从而有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此，$f(x,y)$ 在点 P_0 连续．由 P_0 的任意性知，函数 $f(x,y)$ 在 G 内是连续的．

【3206】 证明：若在某区域 G 内函数 $f(x,y)$ 对变量 x 是连续的，并满足对变量 y 的利普希茨条件，即

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

式中 $(x,y')\in G$，$(x,y'')\in G$ 而 L 为常数，则此函数在该区域内是连续的．

提示 利用 3205 题的结果．

证 由于 $f(x,y)$ 在 G 内满足对 y 的利普希茨条件，故知 $f(x,y)$ 在 G 内关于 x 对变量 y 是一致连续的．

因此，由 3205 题的结果即知，$f(x,y)$ 在 G 内是连续的．

【3207】 证明：若函数 $f(x,y)$ 分别对每一个变量 x 和 y 是连续的，并对其中的一个是单调的，则此函数对两个变量的总体是连续的（杨定理）．

证 不妨设 $f(x,y)$ 关于 x 是单调的．

设 (x_0,y_0) 为函数 $f(x,y)$ 的定义域 G 内的任一点．由于 $f(x,y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$（假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时，就有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0-\delta_1,y_0)$ 及 $(x_0+\delta_1,y_0)$，由于 $f(x,y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε，存在 $\delta_2>0$（也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y-y_0|<\delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$ 时，由于 $f(x,y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned}&|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&\max\left\{|f(x_0+\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|,|f(x_0-\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\right\}.\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}&|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant&|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0+\Delta y)-f(x_0\pm\delta_1,y_0)|+|f(x_0\pm\delta_1,\ y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故当 $|\Delta x|<\delta$，$|\Delta y|<\delta$ 时，就有

$$|f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 是连续的．由点 (x_0,y_0) 的任意性知，$f(x,y)$ 是 G 内的二元连续函数．

【3208】 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上是连续的，而函数序列 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛并满足条件 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$．证明：函数序列

$$F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]\quad(n=1,2,\cdots)$$

也在 $[a,A]$ 上一致收敛．

证 由于 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$，故 $F_n(x)=f[x,\varphi_n(x)]$ 有意义．

由题设 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，故在此区域上一致连续，即对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使对于此区域中的任意两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$ 时，就有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

特别地，当 $|y_1-y_2|<\delta$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|<\varepsilon.$$

对于上述的 $\delta>0$，因为 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，故存在正整数 N，使当 $m>N$，$n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|<\delta.$$

于是，对任给的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $m>N$，$n>N$ 时，对于一切的 $x\in[a,A]$，均有

$$|F_n(x)-F_m(x)|=|f[x,\varphi_n(x)]-f[x,\varphi_m(x)]|<\varepsilon.$$

因此，$F_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛.

§2. 偏导数. 函数的微分

1° **偏导数** 在求多元函数的偏导数时，若计算中出现的所有偏导数均连续，则求导的结果与求导的次序无关.

2° **函数的微分** 若自变量 x,y,z 的函数 $f(x,y,z)$ 的全增量可写为以下形式：

$$\Delta f(x,y,z)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho),$$

式中 A,B,C 与 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ 无关而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x,y,z) 可微，而增量的线性部分 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$，即

$$\mathrm{d}f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{1}$$

（其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$，$\mathrm{d}z=\Delta z$）称为此函数的微分.

当变数 x,y,z 为其他自变量的可微函数时，公式(1)仍有其意义.

若 x,y,z 为自变量，且函数 $f(x,y,z)$ 有连续的直至 n 阶的偏导数，则对于高阶的微分，有符号公式：

$$\mathrm{d}^n f(x,y,z)=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}+\mathrm{d}z\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z).$$

3° **复合函数的导数** 若 $w=f(x,y,z)$ 可微，其中 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$，且函数 φ,ψ,χ 可微，则

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶偏导数时最好用下列符号公式：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 w+\frac{\partial P_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}=\left(P_1\frac{\partial}{\partial x}+Q_1\frac{\partial}{\partial y}+R_1\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(P_2\frac{\partial}{\partial x}+Q_2\frac{\partial}{\partial y}+R_2\frac{\partial}{\partial z}\right)w+\frac{\partial P_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial R_1}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial z},$$

其中
$$P_1=\frac{\partial x}{\partial u},\quad Q_1=\frac{\partial y}{\partial u},\quad R_1=\frac{\partial z}{\partial u},\quad R_2=\frac{\partial x}{\partial v},\quad Q_2=\frac{\partial y}{\partial v},\quad R_2=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° **方向导数** 若用方向余弦 $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 表示 $Oxyz$ 空间内的方向 l，且函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则沿方向 l 的导数按下式来计算：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

函数在给定点的最大增长速度的大小与方向可用一个向量——*函数的梯度*

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

给出，它的大小等于

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

【3211】 证明：$f'_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]$.

提示 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，命题即易获证.

注意在求某一固定点的导数及微分时，用本题的结果常可减少运算量.

证 令 $\varphi(x)=f(x,b)$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]=\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}=f'_x(x,b).$$

求下列函数的一阶和二阶偏导数：

【3213】 $u=x^4+y^4-4x^2y^2$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3-8xy^2$， $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3-8x^2y$， $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$， $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2-8x^2$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-16xy$ *).

*) 以下各题不再写$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，而仅写$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，因为当它们连续时是相等的，并且在今后各题中均把$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$理解为$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$.

【3216】 $u=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2x\cdot x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{3}{2}y^2\frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3}{2}xy\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{x(2y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

【3224】 $u=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

提示 注意$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}y}{x^2+y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ *) $=\frac{|y|}{x^2+y^2}$，

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\left[-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$ *) $=-\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{|y|}=-\frac{x\,\mathrm{sgn}y}{x^2+y^2}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}\right]=-\frac{x|y|(x^2+y^2)-xy\left[\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)+2y|y|\right]}{y^2(x^2+y^2)^2}=\frac{2x|y|}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\frac{|y|}{y}(x^2+y^2)-2y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2\operatorname{sgn}y-y|y|}{(x^2+y^2)^2}=\frac{(x^2-y^2)\operatorname{sgn}y}{(x^2+y^2)^2}\qquad(y\neq 0).$$

*） 利用 3216 题的结果.

【3225】 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

提示 先求$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，再利用对称性，即得$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$及$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

利用对称性，即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{3yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\frac{3xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

【3229】 设 (3)$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$，验证等式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

提示 注意应就 $0<x\leqslant y$ 及 $y\leqslant x<0$ 两种情况加以验证.

证 (3) 当 $0<x\leqslant y$ 时，我们有

$$u=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}=\arccos\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}}=-\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}}+\frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是，当 $0<x\leqslant y$ 时，有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

当 $y\leqslant x<0$ 时，$u=\arccos\frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right]=-\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}}+\frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x-y)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是,当 $y\leqslant x<0$ 时,也有
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

仔细观察可以看到,在不同的区域上,一阶偏导数相差一个符号,但二阶混合偏导数却是相等的.

【3231】 设 $u=f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数,就下列各题验证关于齐次函数的欧拉定理:

(3) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$.

解题思路 为了书写的简便,我们仅限于讨论三个变量的情形.即只要证明下列等式

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

对于(3)$n=0$.

证 关于 n 次齐次函数的欧拉定理如下:

设 n 次齐次函数 $f(x,y,z)$* 在区域 A 中关于所有变量均有连续偏导数,则下述等式成立:

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=nf(x,y,z).$$

(3)由于 $\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{ty}{tz}}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}=t^0\cdot u\quad(t>0)$,故函数 u 为零次齐次函数.又因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\left[\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\frac{1}{y}\right]=\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

故得
$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=x\frac{yu}{xz}+y\frac{u}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)-z\frac{yu}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0\cdot u,$$

即函数 u 满足欧拉定理.

【3232】 证明:若可微函数 $u=f(x,y,z)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证明思路 任意固定区域中一点 (x_0,y_0,z_0),令 $F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}$,应用复合函数求导法则及题设条件可得 $F'(t)=0$.由此可知:$F(t)=c\ (t>0)$.令 $t=1$,即得 $c=f(x_0,y_0,z_0)$.于是,$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^n\cdot f(x_0,y_0,z_0)$.命题获证.

证 任意固定区域中一点 (x_0,y_0,z_0),考察下面 t 的函数$(t>0)$:

$$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n},$$

它当 $t>0$ 时有定义且是可微的.应用复合函数的求导法则,对 t 求导数即得

$$F'(t)=\frac{1}{t^n}\{x_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+y_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+z_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)\}-\frac{n}{t^{n+1}}f(tx_0,ty_0,tz_0)$$

$$=\frac{1}{t^{n+1}}\{tx_0f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)-nf(tx_0,ty_0,tz_0)\},$$

---

* 为了书写的简便,在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

由于 $$tx_0 f'_x(tx_0,ty_0,tz_0)+ty_0 f'_y(tx_0,ty_0,tz_0)+tz_0 f'_z(tx_0,ty_0,tz_0)=nf(tx_0,ty_0,tz_0),$$

故 $$F'(t)=0.$$

从而，当 $t>0$ 时，$F(t)=c$，其中 c 为常数. 现在确定 c. 为此，在定义 $F(t)$ 的等式中令 $t=1$，则得

$$c=f(x_0,y_0,z_0).$$

于是， $$F(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0),$$

即 $$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^n f(x_0,y_0,z_0).$$

上式说明函数 $f(x,y,z)$ 为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的.

【3233】 证明：若 $f(x,y,z)$ 是可微的 n 次齐次函数，则其偏导数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$，$f'_z(x,y,z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数.

证明思路 由等式 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导数即获证.

证 由等式 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端分别对 x,y,z 求偏导数，则得

$$tf'_1(tx,ty,tz)=t^n f'_1(x,y,z),\quad tf'_2(tx,ty,tz)=t^n f'_2(x,y,z),\quad tf'_3(tx,ty,tz)=t^n f'_3(x,y,z).$$

其中 $f'_1(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_2(\cdot,\cdot,\cdot)$，$f'_3(\cdot,\cdot,\cdot)$ 分别代表 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 对第一个，第二个，第三个变量的偏导数. 于是，

$$f'_1(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_1(x,y,z),\quad f'_2(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_2(x,y,z),\quad f'_3(tx,ty,tz)=t^{n-1}f'_3(x,y,z),$$

即偏导数 $f'_x(x,y,z)$，$f'_y(x,y,z)$ 及 $f'_z(x,y,z)$ 均为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

【3234】 设 $u=f(x,y,z)$ 是二阶可微的 n 次齐次函数. 证明：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=n(n-1)u.$$

证明思路 利用 3233 题的结果，并应用关于齐次函数的欧拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x},\tag{1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y},\tag{2}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}.\tag{3}$$

以上(1)、(2)、(3)各式的两端分别依次乘以 x、y、z，然后相加，命题即可获证.

证 由 3233 题知：$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 均为 $(n-1)$ 次齐次函数. 应用欧拉定理，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial x},\tag{1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial y},\tag{2}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=(n-1)\frac{\partial u}{\partial z}.\tag{3}$$

将(1)式两端乘以 x，(2)式两端乘以 y，(3)式两端乘以 z，然后相加，即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=(n-1)\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)=n(n-1)u,$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x,y,z 为自变量)：

【3242】 设 $f(x,y,z)=\sqrt[z]{\frac{x}{y}}$，求 $\mathrm{d}f(1,1,1)$ 及 $\mathrm{d}^2 f(1,1,1)$.

解题思路 本题宜利用 3211 题的结果，先求出 $f'_x(x,1,1)$、$f'_y(1,y,1)$ 及 $f'_z(1,1,z)$ 后，得到 $f'_x(1,1,1)$、$f'_y(1,1,1)$ 及 $f'_z(1,1,1)$.

再次，利用同样的思路，由 $f'_x(x,1,1)$、$f'_x(1,y,1)$、$f'_x(1,1,z)$，$f'_y(1,y,1)$、$f'_y(1,1,z)$及$f'_z(1,1,z)$，可求得 $f''_{xx}(1,1,1)$、$f''_{xy}(1,1,1)$、$f''_{xz}(1,1,1)$、$f''_{yy}(1,1,1)$、$f''_{yz}(1,1,1)$及 $f''_{zz}(1,1,1)$.

最后，利用一阶微分及二阶微分的定义即可得

$$df(1,1,1)=dx-dy,\quad d^2f(1,1,1)=2(dy-dx)(dy+dz).$$

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导数，然后再合成以求一阶及二阶微分的方法. 由于

$$f'_x(x,1,1)=1,\quad f'_x(1,1,1)=1,\quad f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\quad f'_y(1,1,1)=-1,\quad f'_z(1,1,z)=0,$$

$$f'_z(1,1,1)=0,$$

故得
$$df(1,1,1)=f'_x(1,1,1)dx+f'_y(1,1,1)dy+f'_z(1,1,1)dz=dx-dy.$$

又因
$$f'_x(x,1,1)=1,\qquad f''_{xx}(x,1,1)=0,\qquad f''_{xx}(1,1,1)=0,$$
$$f'_x(1,y,1)=\frac{1}{y},\qquad f''_{xy}(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\qquad f''_{xy}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_x(1,1,z)=\frac{1}{z},\qquad f''_{xz}(1,1,z)=-\frac{1}{z^2},\qquad f''_{xz}(1,1,1)=-1,$$
$$f'_y(1,y,1)=-\frac{1}{y^2},\qquad f''_{yy}(1,y,1)=\frac{2}{y^3},\qquad f''_{yy}(1,1,1)=2,$$
$$f'_y(1,1,z)=-\frac{1}{z},\qquad f''_{yz}(1,1,z)=\frac{1}{z^2},\qquad f''_{yz}(1,1,1)=1,$$
$$f'_z(1,1,z)=0,\qquad f''_{zz}(1,1,z)=0,\qquad f''_{zz}(1,1,1)=0,$$

故得
$$\begin{aligned}d^2f(1,1,1)&=f''_{xx}(1,1,1)dx^2+f''_{yy}(1,1,1)dy^2+f''_{zz}(1,1,1)dz^2+2f''_{xy}(1,1,1)dxdy\\&\quad+2f''_{yz}(1,1,1)dydz+2f''_{xz}(1,1,1)dxdz\\&=2dy^2-2dxdy+2dydz-2dxdz=2(dy-dx)(dy+dz).\end{aligned}$$

【3251】 证明：在点(0,0)连续的函数 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)有两个偏导数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$，但在点(0,0)并非可微的.

说明导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的邻域中的性质.

证明思路 只要证明在点(0,0)，表达式

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 易知 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在点(0,0)的任何邻域中无界且有无意义之点.

解 $f'_x(0,0)=\dfrac{d}{dx}[f(x,0)]\Big|_{x=0}=0,\quad f'_y(0,0)=\dfrac{d}{dy}[f(0,y)]\Big|_{y=0}=0.$

考察极限

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当动点(x,y)沿直线 $y=kx$ 趋于点(0,0)时，显然对不同的 k 有不同的极限值$\dfrac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$. 因此，上述极限不存在，即在点(0,0)，

$$f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$，其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，故知 $\sqrt{|xy|}$ 在点(0,0)不可微分.

不难得到

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\\ \text{无意义}, & x=0,\ y\neq 0.\end{cases}$$

因此，$f'_x(x,y)$在点(0,0)的任何邻域中均有无意义之点及无界，$f'_y(x,y)$的性质类似.

【3254】 证明:在某凸形的区域 E 内有有界偏导数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 的函数 $f(x,y)$ 在此区域 E 内一致连续.

证 由于 $f'_x(x,y)$ 及 $f'_y(x,y)$ 在 E 内有界,故存在 $L>0$,使当 $(x,y)\in E$ 时,恒有

$$|f'_x(x,y)|\leqslant\frac{L}{2},$$

及
$$|f'_y(x,y)|\leqslant\frac{L}{2}.$$

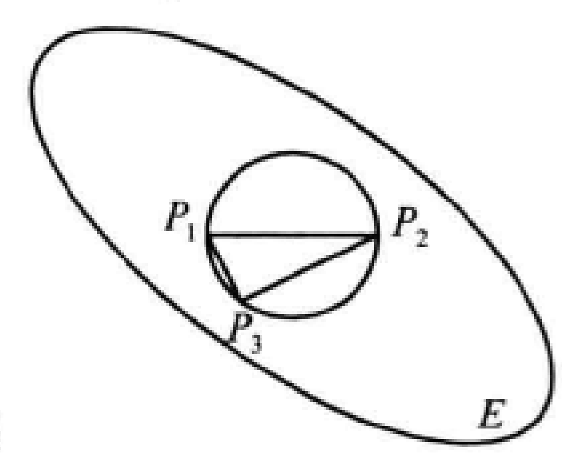


图 3254－1

在 E 内任取两点 $P_1(x_1,y_1)$ 及 $P_2(x_2,y_2)$.

(1)如果以 $|P_1P_2|$ 为直径的圆(包括圆周在内)都属于 E (图 3254－1),则点 $P_3(x_1,x_2)$ 及线段 P_1P_3、P_2P_3 都在 E 内.于是,

$$\begin{aligned}&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\\ \leqslant&|f(x_1,y_1)-f(x_1,y_2)|+|f(x_1,y_2)-f(x_2,y_2)|\\ =&|f'_y(x_1,\xi)|\cdot|y_1-y_2|+|f'_x(\eta,y_2)|\cdot|x_1-x_2|,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 y_1,y_2 之间,η 介于 x_1,x_2 之间.由偏导数的有界性,即得

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant\frac{L}{2}|y_1-y_2|+\frac{L}{2}|x_1-x_2|$$

$$\leqslant\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}+\frac{L}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=L\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1,y_2)^2},$$

或 $|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_2P_2|$.

(2)如图 3254－2 所示,$P_1\in E$, $P_2\in E$,但点(x_1,y_2)和(x_2,y_1)都不一定属于 E.由于 P_1 和 P_2 均为 E 的内点,故存在 $R>0$,使得分别以 P_1,P_2 为圆心,R 为半径的圆(包括圆周在内)都在 E 内.作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3,则由切点均在 E 内知,矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内.

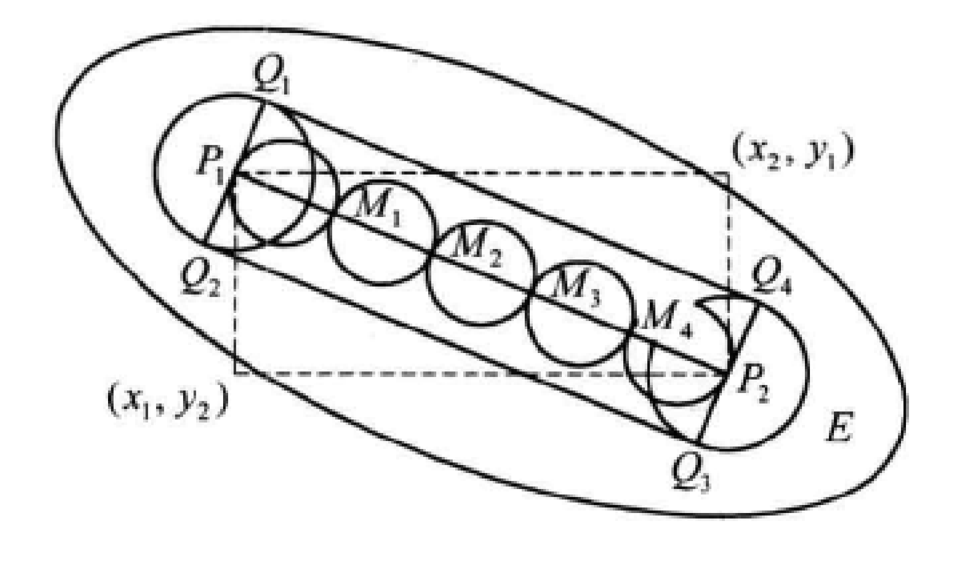


图 3254－2

不难看出,在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点:$P_1=M_0$, $M_1,M_2,\cdots,M_n=P_2$,使

$$|M_{k-1}M_k|<2R\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

则以$|M_{k-1}M_k|$为直径的圆全落在矩形内,从而也在 E 内.于是,

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(M_k)-f(M_{k-1})|\leqslant\sum_{k=1}^{n}L|M_kM_{k-1}|=L\sum_{k=1}^{n}|M_kM_{k-1}|=L|P_1P_2|.$$

这就证明了对 E 中任意两点,函数 $f(P)$满足利普希茨条件.

对于任给的 $\varepsilon>0$,取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$,则当 $P_1\in E$, $P_2\in E$,且$|P_1P_2|<\delta$时,就恒有

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|<L\delta=\varepsilon$$

即函数 $f(x,y)$在 E 中一致连续.

注 用∂E表区域E 的边界,$\overline{E}$ 表 E 加上∂E 所成的闭区域.在本题的假定下,还可证明 $f(x,y)$可开拓为 $\overline{E}$ 上的一致连续函数.事实上,对∂E 上任一点 P_0,由柯西收敛准则知,当点 P 从 E 内趋于 P_0 时,$f(P)$的极限 A 存在(根据 $f(P)$在 E 有一致连续性易知它满足柯西收敛准则).我们规定 $f(P_0)=A$.于是,$f(P)$在整个 $\overline{E}$ 上有定义.在不等式

$$|f(P_1)-f(P_2)|\leqslant L|P_1P_2|\quad(P_1,P_2\in E)$$

两端让 $P_1\to P_0(P_0\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P_2)|\leqslant L|P_0P_2|\quad(P_0\in\partial E,\ P_2\in E),$$

再让 $P_2\to P'_0(P'_0\in\partial E)$取极限,得

$$|f(P_0)-f(P'_0)|\leqslant L|P_0P'_0| \quad (P_0\in\partial E,\ P'_0\in\partial E).$$

由此可知，$f(P)$在$\overline{E}$上满足利普希茨条件，从而，$f(P)$在$\overline{E}$上一致连续.

【3255】 证明：若函数$f(x,y)$对变量x是连续的（对每一个固定的值y）且有对变量y的有界的导数$f'_y(x,y)$，则此函数对变量x和y的总体是连续的.

提示 利用3206题的结果.

证 设$P_0(x_0,y_0)$是所论的开域E中任一点.取以P_0为中心的一个充分小的开球G_0，使G_0完全含于E内.设在G_0内，有$|f'_y(x,y)|\leqslant L$.于是，当(x,y')，(x,y'')属于G_0时，有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|=|f'_y(x,\xi)|\cdot|y'-y''|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中ξ为介于y'，y''之间的一个数，故$f(x,y)$在G_0中满足利普希茨条件.因此，根据3206题的结果知$f(x,y)$在G_0中连续，特别是在P_0点连续.由P_0点的任意性，即知$f(x,y)$在E内连续，证毕.

注 从证明过程中很明显，本题只要假定$f'_y(x,y)$在E中每一点的某邻域中有界即可.

在下列问题中求所列偏导数：

【3264】 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$，若$u=(x^2+y^2)e^{x+y}$.

提示 注意$u=u_1+u_2$，其中$u_1=x^2e^xe^y$，$u_2=y^2e^ye^x$.

解 $u=(x^2+y^2)e^{x+y}=x^2e^xe^y+y^2e^ye^x=u_1+u_2$.显见$\dfrac{\partial^m u_2}{\partial x^m}=e^xy^2e^y$，利用求高阶导数的莱布尼茨公式，即得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}&=\frac{\partial^n}{\partial y^n}\left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m}\right)=\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^xy^2e^y)=e^x\frac{\partial^n}{\partial y^n}(y^2)e^y\\&=e^x\left\{y^2\frac{\partial^n}{\partial y^n}(e^y)+C_n^1\frac{\partial}{\partial y}(y^2)\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}(e^y)+C_n^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}(y^2)\frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}}(e^y)\right\}\\&=e^{x+y}\{y^2+2ny+n(n-1)\}.\end{aligned}$$

同法可求得
$$\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}\{x^2+2mx+m(m-1)\}.$$

于是，
$$\frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}=\frac{\partial^{m+n}u_1}{\partial x^m\partial y^n}+\frac{\partial^{m+n}u_2}{\partial x^m\partial y^n}=e^{x+y}[x^2+y^2+2mx+2ny+m(m-1)+n(n-1)].$$

求下列复合函数的一阶和二阶导数：

【3284】 $u=f\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1\left(x,\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{1}{y}f'_2\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，$\qquad\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f'_2\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f''_{11}\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{2}{y}f''_{12}+\frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=-\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f'_2\left(x,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x,\frac{x}{y}\right)^{*)}.$$

*) f'_1，f'_2，f''_{11}，f''_{22}均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导数，以下各题均同，不再说明.

【3285】 $u=f(x,xy,xyz)$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'_1(x,xy,xyz)+yf'_2(x,xy,xyz)+yzf'_3(x,xy,xyz)$.

将$f'_1(x,xy,xyz)$，$f'_2(x,xy,xyz)$，$f'_3(x,xy,xyz)$，简记为f'_1，f'_2，f'_3，以后不再说明.于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'_1+yf'_2+yzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=xf'_2+xzf'_3,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=xyf'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+yf''_{12}+yzf''_{13}+y(f''_{21}+yf''_{22}+yzf''_{23})+yz(f''_{31}+yf''_{32}+yzf''_{33}).$$

由于 $f''_{12}=f''_{21}$，$f''_{13}=f''_{31}$，$f''_{23}=f''_{32}$(以下各题均同)，故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{11}+y^2f''_{22}+y^2z^2f''_{33}+2yf''_{12}+2yzf''_{13}+2y^2zf''_{23}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{22}+x^2zf''_{23}+x^2zf''_{32}+x^2z^2f''_{33}=x^2f''_{22}+2x^2zf''_{23}+x^2z^2f''_{33},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2y^2f''_{33},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=xf''_{12}+xzf''_{13}+f'_2+xyf''_{22}+xyzf''_{23}+zf'_3+xyzf''_{32}+xyz^2f''_{33}\\&=xyf''_{22}+xyz^2f''_{33}+xf''_{12}+xzf''_{13}+2xyzf''_{23}+f'_2+zf'_3,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xyf''_{13}+xy^2f''_{23}+xy^2zf''_{33}+yf'_3,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=x^2yf''_{23}+x^2yzf''_{33}+xf'_3.$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分(x,y 及 z 为自变量)：

【3298】 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$.

解 $\mathrm{d}u=f'_1\,\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+f'_2\,\frac{z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z}{z^2}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=&f''_{11}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^4}+f''_{22}\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)^2}{z^4}+2f''_{12}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)}{y^2z^2}-2f'_1\,\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)\mathrm{d}y}{y^3}\\&-2f'_2\,\frac{(z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z)\mathrm{d}z}{z^3}.\end{aligned}$$

【3305】 设 $u=f(r)$,其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和 f 为二阶可微的函数. 证明：

$$\Delta u=F(r),$$

其中 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$,$\Delta$ 为拉普拉斯算子,并求函数 F.

提示 注意$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\,\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\,\frac{r^2-x^2}{r^3}$,利用对称性,即可证

$$\Delta u=f''(r)+2f'(r)\frac{1}{r}=F(r).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\,\frac{x}{r}$，$\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\,\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\,\frac{r^2-x^2}{r^3}$.

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)\frac{z^2}{r^2}+f'(r)\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

于是,

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f''(r)+2f'(r)\frac{1}{r}=F(r).$$

【3306】 设 u 和 v 为二阶可微的函数,Δ 为拉普拉斯算子(参阅 3305 题). 证明：

$$\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

其中 $\Delta(uv)=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}$.

提示 由拉普拉斯算子的定义易证本命题.

证 $\Delta(uv)=\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2}$

$$=\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\Delta v+v\Delta u+2\Delta(u,v),$$

这就是所要证明的.

【3314】 设函数 $u_1=u_1(x,y,z)$ 及 $u_2=u_2(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u=0$. 证明:函数

$$v=u_1(x,y,z)+(x^2+y^2+z^2)u_2(x,y,z)$$

满足双调和方程 $\Delta(\Delta v)=0$.

证明思路 对函数 v 应用 3306 题的结果,并注意题设条件可得 Δv,再重复应用同一结果于 Δv,即可知函数 v 满足双调和方程 $\Delta(\Delta v)=0$.

证 利用 3306 题的结果,即得

$$\Delta v=\Delta u_1+(x^2+y^2+z^2)\Delta u_2+u_2\Delta(x^2+y^2+z^2)+2\left(2x\frac{\partial u_2}{\partial x}+2y\frac{\partial u_2}{\partial y}+2z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)$$

$$=6u_2+4\left(x\frac{\partial u_2}{\partial x}+y\frac{\partial u_2}{\partial y}+z\frac{\partial u_2}{\partial z}\right).$$

重复应用同一结果于 Δv,得

$$\Delta(\Delta v)=6\Delta u_2+4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z+2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}.$$

由于 $\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2)=0,$

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)=0,\quad \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)=0,$$

故最后证得 $\Delta(\Delta v)=0$.

【3315】 设 $f(x,y,z)$ 是 m 阶可微的 n 次齐次函数. 证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f(x,y,z)=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x,y,z).$$

提示 利用数学归纳法加以证明.

证 当 $m=1$ 时,由 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两端对 t 求导,可得

$$x\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tx)}+y\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(ty)}+z\frac{\partial f(tx,ty,tz)}{\partial(tz)}=nt^{n-1}f(x,y,z)\quad(t>0).$$

令 $t=1$,即有 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^1 f=nf.$

当 $m=2$ 时,由 3234 题的结果知 $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f=n(n-1)f.$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x,y,z),f'_y(x,y,z),f'_z(x,y,z)$ 为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题成立. 对 f'_x,f'_y,f'_z,用数学归纳法的假设,即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_x=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x,\tag{1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_y=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y,\tag{2}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_z=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z,\tag{3}$$

将(1)两端乘以 x,(2)式两端乘以 y,(3)式两端乘以 z,然后相加,即得

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(x,y,z)=(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)f(x,y,z)$$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x,y,z).$$

即当 $m=k$ 时命题也成立.

于是,命题对于一切正整数 m 成立,即

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

假定任意函数 φ,ψ 等为足够多次可微的函数,验证下列等式:

【3329】 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=n(n-1)u$, 若 $u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

证明思路 注意 $u_1=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为 n 次齐次函数,$u_2=x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为 $1-n$ 次齐次函数. 对函数 u_1 及 u_2 应用 3234 题的结果(对于二元更成立),即知

$$原式左端=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

证 $u_1=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为 n 次齐次函数,$u_2=x^{1-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 为 $1-n$ 次齐次函数. 由 3234 题的结果知

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1=n(n-1)u_1,\quad \left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2=(1-n)(1-n-1)u_2=n(n-1)u_2.$$

于是, $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u_1+u_2)=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

【3349】 证明:在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处,函数

$$u=ax^2+by^2+cz^2 \quad 及 \quad v=ax^2+by^2+cz^2+2mx+2ny+2pz$$

(a,b,c,m,n,p 为常数且 $a^2+b^2+c^2\neq 0$)二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

证 本题的题设条件"点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 无限远移"应该理解为"$x_0\to\infty$, $y_0\to\infty$, $z_0\to\infty$ 同时成立"(此时 $\sqrt{(ax_0)^2+(by_0)+(cz_0)^2}\to+\infty$). 否则,本题的结论不成立.

显见有

$$\text{grad}u=\{2ax_0,2by_0,2cz_0\},\quad \text{grad}v=\{2ax_0+2m,2by_0+2n,2cz_0+2p\},$$

令

$$\alpha=ax_0,\ \beta=by_0,\ \gamma=cz_0;\alpha_1=ax_0+m=\alpha+m,\beta_1=by_0+n=\beta+n,\gamma_1=cz_0+p=\gamma+p.$$

于是,grad$u$ 与 grad$v$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta=\frac{\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2}}$$

或

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$=\frac{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

令 $\delta=\max(|ax_0|,|by_0|,|cz_0|)=\max(|\alpha|,|\beta|,|\gamma|)$,则

$$\delta\leqslant\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\leqslant\sqrt{3}\delta.$$

于是,当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$ 时, $\delta\to+\infty$.

再令 $q=\max(|m|,|n|,|p|)$,则下述不等式显然成立:

$$0\leqslant\sin^2\theta=\frac{(n\alpha-m\beta)^2+(p\alpha-m\gamma)^2+(p\beta-n\gamma)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}$$

$$\leqslant\frac{(2q\delta)^2+(2q\delta)^2+(2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2-6\delta q-3q^2)}=\frac{12q^2}{\delta^2-6\delta q-3q^2}\to 0\quad (当\ \delta\to+\infty 时).$$

于是,当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$ 时,$\sin^2\theta\to 0$,即当 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\to+\infty$,$\theta\to 0$. 证毕.

【3350】 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微的函数. 若 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为方向 l 的方向余弦，求

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}=\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial u}{\partial l}\right).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial l^2}&=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta\\&\quad+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cos\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos\gamma\right)\cos\gamma\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\alpha+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\beta+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cos\gamma\cos\alpha.\end{aligned}$$

【3351】 设 $u=f(x,y,z)$ 为二阶可微的函数及

$$l_1\{\cos\alpha_1,\cos\beta_1,\cos\gamma_1\},\qquad l_2\{\cos\alpha_2,\cos\beta_2,\cos\gamma_2\},\qquad l_3\{\cos\alpha_3,\cos\beta_3,\cos\gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明：

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$；

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

证 (1)
$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2&=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i\\&\quad+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\end{aligned}\tag{1}$$

由于 l_1,l_2,l_3 是互相垂直的三个单位向量，故

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i=0,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i=0,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i=0,\\&\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i=1,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i=1,\quad\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i=1.\end{aligned}\tag{2}$$

将上述诸等式(2)代入(1)式，即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

(2) 利用 3350 题的结果，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i\\&\quad+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\sum_{i=1}^{3}\cos\gamma_i\cos\alpha_i.\end{aligned}\tag{3}$$

将诸等式(2)代入(3)式，即得 $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

假设 $z=z(x,y)$，解下列方程：

【3360】 求方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 的解 $z=z(x,y)$，使它满足条件 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi_1(x),\qquad z=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\varphi(x)+\psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$. 由于 $z(x,0)=x$，$z(0,y)=y^2$，故有

$$x=\varphi(x)+\psi(0),\quad y^2=\varphi(0)+\psi(y),$$

于是，
$$z=x+y^2+\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2-[\varphi(0)+\psi(0)].$$

又因 $z(0,0)=0$，故 $\varphi(0)+\psi(0)=0$. 最后得

$$z=x+y^2+\frac{1}{2}xy(x+y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° **存在定理** 设：1)函数 $F(x,y,z)$ 在某点 $\hat{A}(x_0,y_0,z_0)$ 等于零；2)$F(x,y,z)$ 和 $F'_z(x,y,z)$ 在点 $\hat{A}_0$ 的邻域内有定义并且是连续的；3)$F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则在点 $A_0(x_0,y_0)$ 的某充分小的邻域内存在唯一的单值连续函数

$$z=f(x,y),\tag{1}$$

它满足方程
$$F(x,y,z)=0$$

而且
$$z_0=f(x_0,y_0).$$

2° **隐函数的可微性** 设除了上述条件，还有 4) 函数 $F(x,y,z)$ 在点 $\hat{A}_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域内可微，则函数(1)在点 $A_0(x_0,y_0)$ 的邻域内也可微，并且它的导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0\tag{2}$$

求得. 若函数 $F(x,y,z)$ 任意多次可微，则采用对方程(2)逐次微分的方法也可计算函数 z 的高阶导数.

3° **由方程组定义的隐函数** 设函数 $F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 满足下列条件：

(ⅰ) 在点 $\hat{A}_0(x_{10},\cdots,x_{m0};\ y_{10},\cdots,y_{n0})$ 等于零；　(ⅱ) 在点 $\hat{A}_0$ 的邻域内可微；

(ⅲ) 在点 $\hat{A}_0$ 函数行列式 $\frac{\partial(F_1,\cdots,F_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}\neq 0$.

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1,\cdots,x_m;\ y_1,\cdots,y_n)=0\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{3}$$

在点 $A_0(x_{10},\cdots,x_{m0})$ 的某邻域内唯一地确定出一组单值可微函数

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_m)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

它们满足方程(3)及初始条件
$$f_i(x_{10},\cdots,x_{m0})=y_{i0}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这些隐函数的微分可由以下方程组求得：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\mathrm{d}y_k=0\quad(i=1,2,\cdots,n)^*$$

【3362】 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a,b) 内. 在怎样的情况下，方程 $f(x)y=0$ 在 $a<x<b$ 时有唯一连续的解 $y=0$?

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a,b) 内是处处稠密的，即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a,b) 的任意一个子区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$. 此时，方程 $f(x)y=0$ 有唯一连续的解 $y=0$. 事实上，设 $y=y(x)$ 为方程 $f(x)y=0$ 的一个连续解，$x_0\in(a,b)$，则

(1) 当 $f(x_0)\neq 0$ 时，显然有 $y(x_0)=0$；

(2) 当 $f(x_0)=0$ 时，由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知：存在数列 $\{x_n\}$，满足 $x_n\to x_0$ 及 $f(x_n)\neq 0$ $(n=1,2,$

---

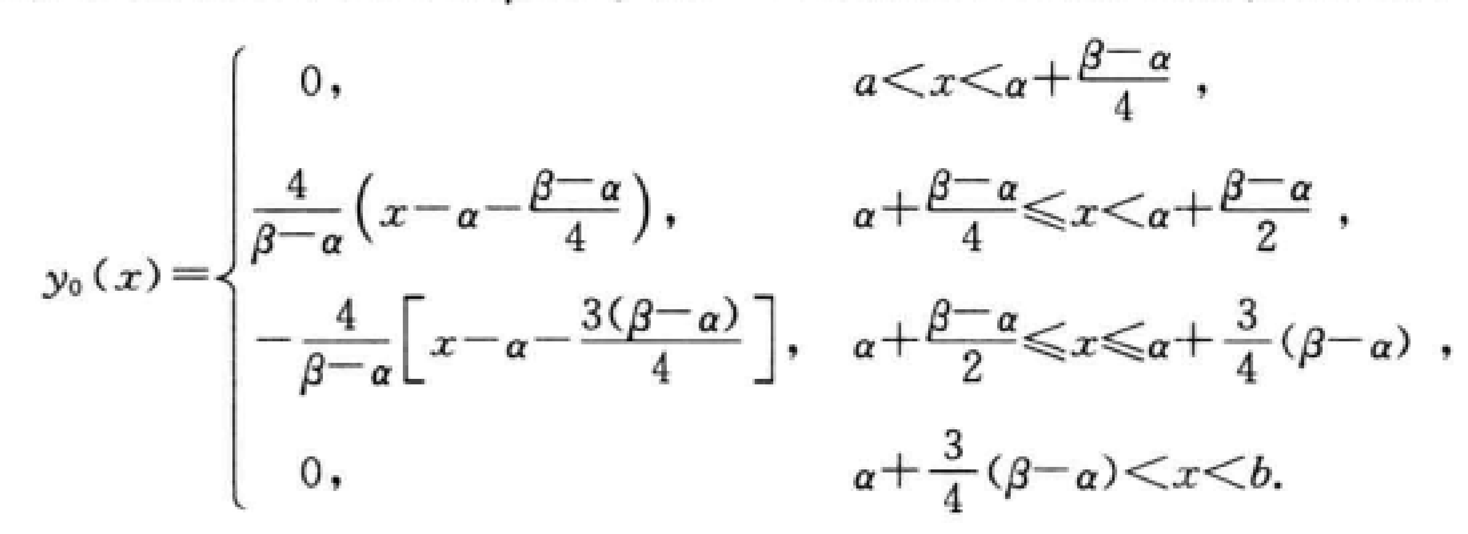
* 在陈述本节大多数题目时，无条件地假定隐函数和它们的相应导数存在的条件满足.

…). 于是，$y(x_n)=0$. 由 $y(x)$ 的连续性即得

$$y(x_0)=y(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}y(x_n)=0.$$

于是，当 $a<x<b$ 时，$y\equiv 0$.

反之，若方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 内只有唯一的连续解 $y=0$，则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a,b) 的任何子区间. 事实上，设在 (a,b) 的某子区间 (α,β) 上 $f(x)\equiv 0$. 定义 (a,b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下：



$$y_0(x)=\begin{cases}0, & a<x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4},\\ \dfrac{4}{\beta-\alpha}\left(x-\alpha-\dfrac{\beta-\alpha}{4}\right), & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{4}\leqslant x<\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2},\\ -\dfrac{4}{\beta-\alpha}\left[x-\alpha-\dfrac{3(\beta-\alpha)}{4}\right], & \alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{2}\leqslant x\leqslant\alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha),\\ 0, & \alpha+\dfrac{3}{4}(\beta-\alpha)<x<b.\end{cases}$$

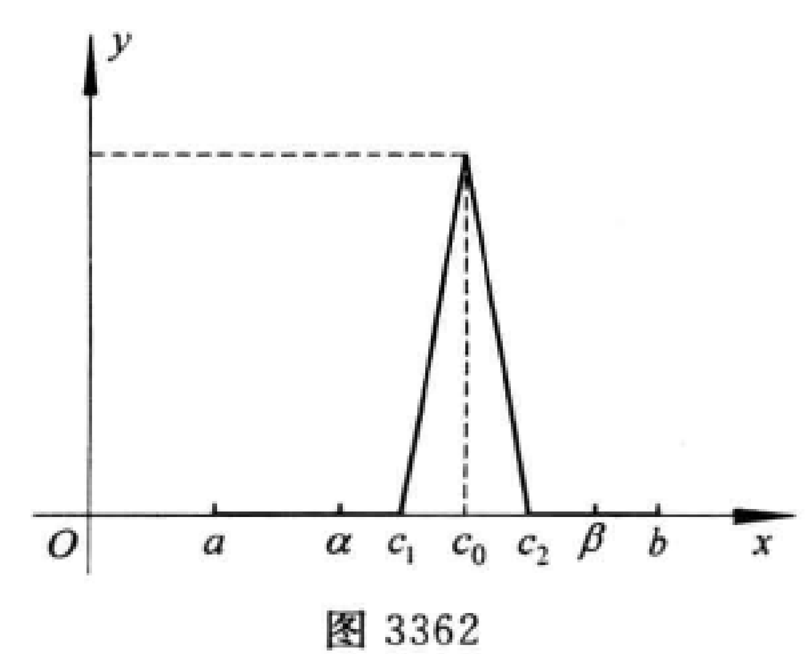


图 3362

如图 3362 所示，图中

$$c_1=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{4},\quad c_0=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2},\quad c_2=\alpha+\frac{3(\beta-\alpha)}{4}.$$

显然，$y_0(x)\not\equiv 0$，但 $y=y_0(x)$ 是方程 $f(x)y=0$ 在 (a,b) 上的一个连续解.

【3369】 设

$$x=y+\varphi(y),\tag{1}$$

其中 $\varphi(0)=0$，且当 $-a<y<a$ 时 $\varphi'(y)$ 连续并满足 $|\varphi'(y)|\leqslant k<1$. 证明：当 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 时存在唯一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程(1)且 $y(0)=0$.

证 设 $F(x,y)=x-y-\varphi(y)$，则

(ⅰ) 由于 $\varphi(0)=0$，故 $F(0,0)=0$；

(ⅱ) 当 $-\infty<x<+\infty$，$-a<y<a$ 时，$F(x,y)$，$F'_x(x,y)$ 及 $F'_y(x,y)=-1-\varphi'(y)$ 均连续；

(ⅲ) $F'_y(0,0)=-1-\varphi'(0)<0$，当然 $F'_y(0,0)\neq 0$.

于是，由隐函数的存在及可微性定理知：存在 $\varepsilon>0$，使当 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 时，存在唯一的可微函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x=y+\varphi(y)$ 及 $y(0)=0$.

【3370】 设 $y=y(x)$ 为由方程 $x=ky+\varphi(y)$ 所定义的隐函数，其中常数 $k\neq 0$，且 $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的可微周期函数，且 $|\varphi'(y)|<|k|$. 证明：$y=\dfrac{x}{k}+\psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数.

证 由于 $x=ky+\varphi(y)$，故 $\dfrac{dx}{dy}=k+\varphi'(y)$. 又因 $|\varphi'(y)|<|k|$，故 $\dfrac{dx}{dy}$ 与 k 同号，即 x 为 y 的严格单调函数，且为连续的. 由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数，故有界，从而，当 $k>0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=-\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=+\infty;$$

当 $k<0$ 时，

$$\lim_{y\to-\infty}x=+\infty,\quad \lim_{y\to+\infty}x=-\infty;$$

由此可知，其反函数 $y=y(x)$ 存在唯一，且是 $-\infty<x<+\infty$ 上有定义的严格单调可微函数. 令

$$y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),\tag{1}$$

则由 $x=ky(x)+\varphi[y(x)]$，$\varphi[y(x)+\omega]=\varphi[y(x)]$ 知，

$$x+k\omega=ky(x)+\varphi[y(x)]+k\omega=k[y(x)+\omega]+\varphi[y(x)+\omega].$$

从而，根据反函数的唯一性，得

$$y(x+k\omega)=y(x)+\omega\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{2}$$

由(1)式与(2)式，得

$$\psi(x+k\omega)=y(x+k\omega)-\frac{x+k\omega}{k}=y(x)-\frac{x}{k}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

同理可证 $$\psi(x-k\omega)=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数. 由(1)得

$$y=y(x)=\frac{1}{k}x+\psi(x).$$

证毕.

【3378】 证明：方程 $$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\quad(a\neq0)$$

在点 $x=0,y=0$ 的邻域中定义出两个可微函数：$y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y_1'(0)$ 及 $y_2'(0)$.

解 $(x^2+y^2)^2=a(x^2-y^2)$ *) 即

$$y^4+(2x^2+a^2)y^2-(a^2x^2-x^4)=0.$$

解之得 $$y^2=\frac{-(2x^2+a^2)+\sqrt{8a^2x^2+a^4}}{2}$$

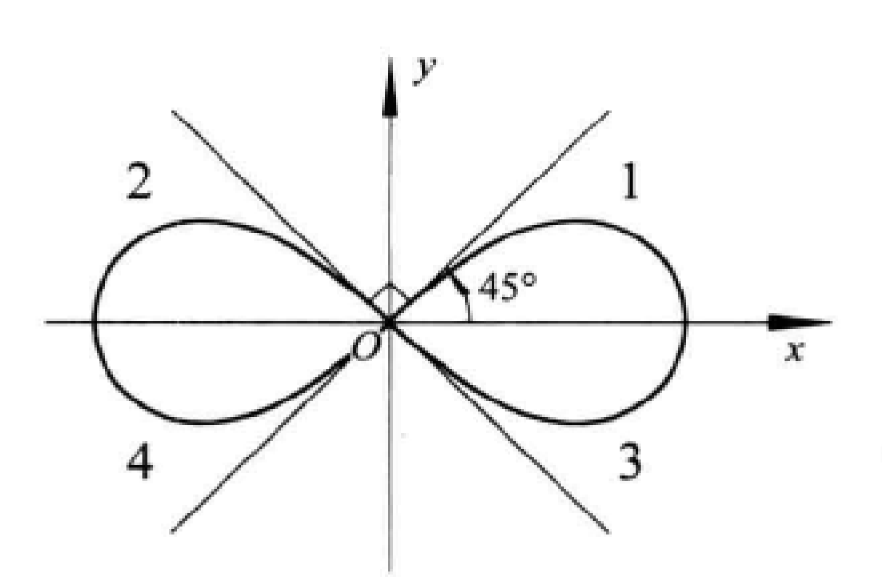


图 3378

(根号前取正号是由于 $y^2\geqslant0$). 记

$$y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}=\pm f(x^2).$$

不难看出(0,0)为分支点. 从点(0,0)出发，有单值连续的四个分支：

$$y_1=f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta;\quad y_2=f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant0;$$
$$y_3=-f(x^2),\quad 0\leqslant x\leqslant\delta\quad y_4=-f(x^2),\quad -\delta\leqslant x\leqslant0.$$

这几个单值分支能否组成 $(-\delta,\delta)$ 上的可微函数，主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微. 为此，研究各分支在点 $x=0$ 处的单侧导数.

$$y'_{1+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{y_1(x)-y_1(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{f(x^2)}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2}}$$
$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2+a^4}-2x^2-a^2}{2x^2}}=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{8a^2x^2+a^4-(2x^2+a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}$$
$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{4a^2-4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2+a^4}+2x^2+a^2)}}=1.$$

同法可得

$$y'_{2-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{f(x^2)}{x}=-1,\quad y'_{3+}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{-f(x^2)}{2}=-1,\quad y'_{4-}(0)=\lim_{x\to-0}\frac{-f(x^2)}{2}=1.$$

由上可以看出

$$y_1(x)=\begin{cases}f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ -f(x^2), & -\delta<x<0,\end{cases}\quad 及\quad y_2(x)=\begin{cases}-f(x^2), & 0\leqslant x<\delta,\\ f(x^2), & -\delta<x<0\end{cases}$$

是仅有的两个过点(0,0)的可微函数，且

$$y_1'(0)=1\quad 及\quad y_2'(0)=-1.$$

*) 此方程的图像系双纽线(图 3378)，它的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta$. 以上作法及结论由图很容易看出.

【3382】 证明:对于二次曲线 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$,

成立等式
$$\frac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0.$$

证明思路 原题中的二次曲线应是非退化的,即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

利用直接求导法,可得 $y''=\dfrac{\Delta}{(bx+cy+e)^3}$. 由此可得

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

它是关于 x 的二次三项式,因此,$\dfrac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$.

证 原题中的二次曲线应是非退化的,即

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}\neq 0,$$

由 $\Delta\neq 0$ 保证 $y''\neq 0$.

等式两端对 x 求导数,得

$$2ax+2by+2bxy'+2cyy'+2d+2ey'=0. \tag{1}$$

于是,
$$y'=-\frac{ax+by+d}{bx+cy+e}.$$

(1)式除以 2 后,等式两端再对 x 求导数,得

$$a+2by'+cy'^2+(bx+cy+e)y''=0.$$

于是,

$$y''=-\frac{a+2by'+cy'^2}{bx+cy+e}=-\frac{1}{(bx+cy+e)^3}\{a(bx+cy+e)^2-2b(bx+cy+e)(ax+by+d)+c(ax+by+d)^2\}$$
$$=\frac{\Delta}{(bx+cy+e)^3},$$

$$(y'')^{-\frac{2}{3}}=\Delta^{-\frac{2}{3}}(bx+cy+e)^2=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2+c(cy^2+2bxy+2ey)+e^2+2bex]$$
$$=\Delta^{-\frac{2}{3}}[b^2x^2-c(ax^2+2dx+f)+2bex+e^2]=\Delta^{-\frac{2}{3}}[(b^2-ac)x^2+2(be-cd)x+e^2-cf],$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式,故 $\dfrac{d^3}{dx^3}[(y'')^{-\frac{2}{3}}]=0$.

求函数 $z=z(x,y)$ 的一阶和二阶偏导数,设:

【3385】 $x+y+z=e^z$.

解 等式两次微分,得

$$dx+dy+dz=e^z dz, \tag{1}$$

故有
$$dz=\frac{1}{e^z-1}(dx+dy)=\frac{1}{x+y+z-1}(dx+dy).$$

于是,$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x+y+z-1}$. 再将(1)式微分一次,得

$$d^2z=e^z d^2z+e^z dz^2,$$

故有
$$d^2z=-\frac{e^z}{e^z-1}(dz)^2=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}(dx^2+2dxdy+dy^2).$$

于是，
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{e^z}{(e^z-1)^3}=-\frac{x+y+z}{(x+y+z-1)^3}.$$

【3388】 设：
$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0 \tag{1}$$
且
$$f(x,y,z)=xy^2z^3.$$
求 $f'_{x(1,1,1)}$，若：(ⅰ) $z=z(x,y)$ 是由方程(1)定义的隐函数，(ⅱ) $y=y(x,z)$ 是由方程(1)定义的隐函数. 说明为什么这些导数相异.

解 (ⅰ) 记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-3xyz=0$，则由方程(1)所定义的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $z'_x(x,y)$ 在(1,1)点的值为
$$z'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_z(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}F(1,1,z)\right|_{z=1}}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+2-3x)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2+z^2-3z)\right|_{z=1}}=-1.$$
于是，
$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y,z(x,y))]\Big|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\partial}{\partial z}f(1,1,z)\right|_{z=1}z'_x(1,1)=1+3(-1)=-2.$$
(ⅱ)
$$y'_x(1,1)=-\frac{F'_x(1,1,1)}{F'_y(1,1,1)}=-\frac{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,1,1)\right|_{x=1}}{\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}F(1,y,1)\right|_{y=1}}=-1.$$
于是，
$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x,y(x,z)z)]\Big|_{(1,1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1,1)\right|_{x=1}+\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y,1)\right|_{y=1}y'_x(1,1)=1+2(-1)=-1.$$
由(ⅰ)与(ⅱ)所求得的对 x 的偏导数在(1,1,1)点的值不相等，可说明如下：

方程 $F(x,y,z)=0$ 代表一个空间曲面，而 $f(x,y,z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数. 函数 $G(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数，$G'_x(x,y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份. 同样地，$H(x,z)=f(x,y(x,z),z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后，原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数，$H'_x(x,z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率，它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率，还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份. 一般地，原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的.

求 $\mathrm{d}z$ 和 d^2z，设：

【3392】 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}+1$.

解 等式两端微分一次，得 $\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{\mathrm{d}z}{z}-\frac{\mathrm{d}y}{y}$. 于是，
$$\mathrm{d}z=\frac{z(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y)}{y(x+z)}.$$
对 $(x+z)\mathrm{d}z=z\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y}\mathrm{d}y$ 再微分一次，得
$$(x+z)\mathrm{d}^2z=-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{2z}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}y-\frac{z^2}{y^2}\mathrm{d}y^2=-\mathrm{d}z^2+\frac{2z}{y}\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{z^2}{y^2}\mathrm{d}y^2=-\left(\mathrm{d}z-\frac{z}{y}\mathrm{d}y\right)^2$$
$$=-\frac{z^2[(y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y)-(x+z)\mathrm{d}y]^2}{y^2(x+z)^2}=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^2}.$$
于是，
$$\mathrm{d}^2z=-\frac{z^2(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

【3402】 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$，$x+y+z=2$，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$，$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}$ 当 $x=1$，$y=-1$，$z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数,得

$$\begin{cases}2x\dfrac{dx}{dz}+2y\dfrac{dy}{dz}=z, & (1)\\ \dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0, & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^2+2x\dfrac{d^2x}{dz^2}+2\left(\dfrac{dy}{dz}\right)^2+2y\dfrac{d^2y}{dz^2}=1, & (3)\\ \dfrac{d^2x}{dz^2}+\dfrac{d^2y}{dz^2}=0. & (4)\end{cases}$$

将 $x=1,\ y=-1,\ z=2$ 代入(1),(2),解得

$$\frac{dx}{dz}=0,\qquad \frac{dy}{dz}=-1.$$

将上述结果及 x,y,z 值联同由(4)式所决定的式子 $\dfrac{d^2x}{dz^2}=-\dfrac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入(3)式,即得

$$\frac{d^2x}{dz^2}=-\frac{1}{4},\qquad \frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{4}.$$

【3404】 设 $u+v=x+y,\dfrac{\sin u}{\sin v}=\dfrac{x}{y}$ 求,du,dv,d^2u 和 d^2v.

提示 将原式改写为 $\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u-x\sin v=0.\end{cases}$

微分两次,并注意 $d^2x=d^2y=0$,,问题即可获解.

解 将原式改写为 $\begin{cases}u+v=x+y,\\ y\sin u=x\sin v.\end{cases}$ 微分得

$$\begin{cases}du+dv=dx+dy, & (1)\\ \sin u dy+y\cos u du=\sin v dx+x\cos v dv. & (2)\end{cases}$$

联立求解,得

$$du=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[(\sin v+x\cos v)dx-(\sin u-x\cos v)dy],$$

$$dv=\frac{1}{x\cos v+y\cos u}[-(\sin v-y\cos u)dx+(\sin u+y\cos u)dy].$$

对(1),(2)两式再微分一次,得

$$\begin{cases}d^2u+d^2v=0,\\ y\cos u d^2u+2\cos u dy du-y\sin u du^2=x\cos v d^2v+2\cos v dx dv-x\sin v dv^2.\end{cases}$$

联立求解,得 $d^2u=-d^2v=\dfrac{1}{x\cos v+y\cos u}[(2\cos v dx-x\sin v dv)dv-(2\cos u dy-y\sin u du)du]$.

【3409】 设 $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=v$,求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\quad 及\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解题思路 本题用求二阶微分的方法,可将所有的二阶偏导数一起求出.为此,应先求 du 及 dv,再注意 $d^2z=d^2v=-\dfrac{2}{u}du dv$,即可获解.

本题也可消去 u,v,由 $z=v=\arctan\dfrac{y}{x}$ 获解.

解 本题求二阶微分,可将所有的二阶偏导数一起求出.

$$dx=\cos v du-u\sin v dv,\qquad dy=\sin v du+u\cos v dv.$$

联立求解,得

$$du=\cos v dx+\sin v dy,\quad dv=\frac{1}{u}(-\sin v dx+\cos v dy),\quad u dv=-\sin v dx+\cos v dy.$$

再对上面最后一个式子微分一次，得

$$u d^2 v+du dv=-\cos v dv dx-\sin v dv dy=-du dv,$$

于是，
$$d^2 z=d^2 v=-\frac{2}{u}du dv=-\frac{2}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)(-\sin v dx+\cos v dy)$$
$$=\frac{2}{u^2}(\sin v\cos v dx^2-\cos 2v dx dy-\sin v\cos v dy^2),$$

从而有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2\sin v\cos v}{u^2}=\frac{\sin 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\cos 2v}{u^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注 本题也可消去 u,v，由 $z=v=\arctan\frac{y}{x}$ 获解.

【3413】 设方程：$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，$z=\chi(u,v)$，定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

提示 对 x,y 分别求偏导数即易获解.

解 对 x 求偏导数，得

$$1=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial\chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.\tag{3}$$

由(1)及(2)解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u},\tag{4}$$

其中
$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

再将(4)的结果代入(3)，即得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}\right).$$

同法求得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\chi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right).$$

【3421】 证明：由方程

$$\Phi(x-az,y-bz)=0\tag{1}$$

(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u,v 的任意可微函数，a 和 b 为常数)定义的函数 $z=z(x,y)$ 为方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

的解. 说明曲面(1)的几何性质.

解 由于
$$\Phi_1'\cdot\left(1-a\frac{\partial z}{\partial x}\right)-b\Phi_2'\frac{\partial z}{\partial x}=0,\qquad -\Phi_1' a\frac{\partial z}{\partial y}+\Phi_2'\cdot\left(1-b\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0,$$

故有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\Phi_1'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\Phi_2'}{a\Phi_1'+b\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 a,b，然后相加，即得

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

这就说明 $z=z(x,y)$ 为方程 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 的解.

等式 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}-1=0$ 表示曲面(1)上任一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{P_1},\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{P_1},-1\right\}$ 皆

与向量 $\boldsymbol{r}_1=\{a,b,1\}$ 垂直. 过点 P_1 作平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的直线 l_1:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{1}.$$

易知 l_1 上的点皆在曲面(1)上. 于是,曲面(1)是母线平行于 $\boldsymbol{r}_1$ 的柱面.

【3422】 证明:由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0 \tag{2}$$

(其中 $\Phi(u,v)$ 是变量 u 和 v 的任意可微函数)定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0.$$

说明曲面(2)的几何性质.

解 由于 $\Phi_1'\dfrac{z-z_0-(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}-\Phi_2'\dfrac{(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2}=0,\quad -\Phi_1'\dfrac{(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}+\Phi_2'\dfrac{z-z_0-(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2}=0,$

故有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1'+(y-y_0)\Phi_2'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$,然后相加,即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

本题获证.

等式 $(x-x_0)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\dfrac{\partial z}{\partial y}-(z-z_0)=0$ 表示曲面(2)在其上任一点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_2},\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_2},-1\right\}$ 与向量 $\boldsymbol{r}_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0\}$ 垂直. 作过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$、$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线 l_2:

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0}=\frac{y-y_0}{y_2-y_0}=\frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上. 于是,曲面(2)是顶点在 P_0 的锥面.

【3423】 证明:由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \tag{3}$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变量 u 的任意可微函数,a,b 和 c 为常数]定义的函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}=bx-ay.$$

说明曲面(3)的几何性质.

解 由于 $a+c\dfrac{\partial z}{\partial x}=\Phi'\cdot\left(2x+2z\dfrac{\partial z}{\partial x}\right),\qquad b+c\dfrac{\partial z}{\partial y}=\Phi'\cdot\left(2y+2z\dfrac{\partial z}{\partial y}\right),$

故有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x\Phi'-a}{c-2z\Phi'},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y\Phi'-b}{c-2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $(cy-bz)$ 及 $(az-cx)$,然后相加,即得

$$\begin{aligned}(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{(2x\Phi'-a)(cy-bz)+(2y\Phi'-b)(az-cx)}{c-2z\Phi'}\\&=\frac{(c-2z\Phi')(bx-ay)}{c-2z\Phi'}=bx-ay,\end{aligned}$$

本题获证.

设 $P_3(x_3,y_3,z_3)$ 是曲面(3)上任意一点,并记 $\boldsymbol{r}_3=\{a,b,c\}$. 由于曲面(3)在点 P_3 的法向量为 $\boldsymbol{n}_3=\left\{\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{P_3},\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{P_3},-1\right\}$,故由方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x}+(az-cx)\frac{\partial z}{\partial y}-(bx-ay)=0$$

知 $\boldsymbol{n}_3\perp(\boldsymbol{P}_3\times\boldsymbol{r}_3)$，其中 $\boldsymbol{P}_3=\{x_3,y_3,z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d,即 $x_3^2+y_3^2+z_3^2=d^2$. 考虑平面

$$\Pi: ax+by+cz=d$$

和过点 P_3 的球面

$$S: x^2+y^2+z^2=d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C,则

1° 由点 P_3 在曲面(3)上可知

$$ax_3+by_3+cz_3=\Phi(x_3^2+y_3^2+z_3^2),$$

即 $d=\Phi(d^2)$. 这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程(3),即曲线 C 位于曲面(3)上.

2° 由 Π 为平面,S 为球面知交线 C 为一圆周曲线.

3° 圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 Π 的垂足,故点 Q 位于过原点且与平面 Π 垂直的直线 l 上.

综上所述,可见曲面(3)是以直线 l: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 为旋转轴的旋转曲面.

【3428】 证明:由方程组

$$\begin{cases}[z-f(\alpha)]^2=x^2(y^2-\alpha^2),\\ [z-f(\alpha)]f'(\alpha)=\alpha x^2\end{cases}$$

定义的函数 $z=z(x,y)$满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=xy.$$

证 $2[z-f(\alpha)][\mathrm{d}z-f'(\alpha)\mathrm{d}\alpha]=(y^2-\alpha^2)2x\mathrm{d}x+x^2(2y\mathrm{d}y-2\alpha\mathrm{d}\alpha)$.

于是,

$$[z-f(\alpha)]\mathrm{d}z=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y-\{\alpha x^2-[z-f(\alpha)]f'(\alpha)\}\mathrm{d}\alpha=x(y^2-\alpha^2)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(y^2-\alpha^2)}{z-f(\alpha)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2y}{z-f(\alpha)}.$$

从而得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3y(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy\frac{x^2(y^2-\alpha^2)}{[z-f(\alpha)]^2}=xy,$$

本题获证.

§4. 变量代换

1° **在含有导数的表达式中的变量代换.** 设在微分表达式

$$A=\Phi(x,y,y'_x,y''_{xx},\cdots)$$

中需要把 x,y 换为新的变量 t(自变量)及 u(函数),这些变量与归变量 x,y 之间的关系由方程

$$x=f(t,u),\qquad y=g(t,u)\tag{1}$$

给出.

把方程式(1)微分,便有

$$y'_x=\frac{\frac{\partial g}{\partial t}+\frac{\partial g}{\partial u}u'_t}{\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}u'_t}.$$

类似地可表示出高阶导数 y''_{xx},…结果得

$$A=\Phi_1(t,u,u'_t,u''_{tt},\cdots).$$

2° **在含有偏导数的表达式中自变量的代换.** 若在表达式

$$B=F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\cdots\right)$$

中令

$$x=f(u,v),\qquad y=g(u,v),\tag{2}$$

其中 u 和 v 为新的自变量,则偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, …由下列方程确定:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},\quad \cdots$$

3° **在含有偏导数的表达式中自变量和函数的代换**. 在更一般的情况下,设有方程

$$x=f(u,v,w),\quad y=g(u,v,w),\quad z=h(u,v,w),\tag{3}$$

其中 u,v 为新的自变量,$w=w(u,v)$为新的函数,则对于偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial z}{\partial y}$,…得到这样的方程:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right)=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right)=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},\quad \cdots$$

在某些情况下,使用全微分法进行变量代换是方便的.

【3431】 把 y 看作新的自变量,变换方程

$$y'y'''-3y''^2=x.$$

提示 先求出:$y'=\frac{1}{x'}$,$y''=-\frac{x''}{(x')^3}$及 $y'''=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}$,其中 $x=x(y)$为 $y=y(x)$的反函数,再将所求得的 y'、y''及 y'''代入所给方程,即可获解.

解 函数 $y=y(x)$的各阶导数 $y',y'',y''',\cdots$与其反函数 $x=x(y)$的各阶导函数 $x',x'',x''',\cdots$之间有下述关系.

$$y'=\frac{1}{x'}\qquad\text{公式 1}$$

$$y''=(y')'=\left(\frac{1}{x'}\right)'_y\cdot y'_x=-\frac{x''}{x'^2}\,\frac{1}{x'}=-\frac{x''}{(x')^3}\qquad\text{公式 2}$$

$$y'''=(y'')'=-\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]'_y y'_x=\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}.\qquad\text{公式 3}$$

以公式 1、2、3 代入所给方程,化简整理即得 $x'''+x(x')^5=0$.

【3432】 用同样的方法变换方程

$$(y')^2y^{(4)}-10y'y''y'''+15(y'')^3=0.$$

提示 利用 3431 题的结果,可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}.$$

将 y'、y''、y'''及 $y^{(4)}$代入所给方程,即可获解.

解 由公式 3 可得

$$y^{(4)}=(y''')'=\left[\frac{3(x'')^2-x'x'''}{(x')^5}\right]'_y y'_x=\frac{6x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-x'x''x'''-5[(3x'')^2-x'x''']x''}{(x')^6}\,\frac{1}{x'}$$

$$=\frac{10x'x''x'''-(x')^2x^{(4)}-15(x'')^3}{(x')^7}.\qquad\text{公式 4}$$

以公式 1、2、3、4 代入所给方程,化简整理得 $x^{(4)}=0$.

引入新变量,变换下列常微分方程:

【3434】 $x^2y''+xy'+y=0$,若 $x=e^t$.

解题思路 当函数 y 不变,只作自变量的代换 $x=x(t)$时,注意到对$\frac{dt}{dx}$及$\frac{d^2t}{dx^2}$运用 3431 题中公式 1 及 2

的结果,可得

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad 及 \quad y''=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.$$

将 $x=e^t$ 代入上面两式,再将所求得的 y' 及 y'' 代入所给方程,即可获解.

解 当函数 y 不变,只作自变量的代换 $x=x(t)$ 时,注意到对$\frac{dt}{dx}$,$\frac{d^2t}{dx^2}$运用公式 1 及 2,即得

$$y'=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad 公式 5$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}. \qquad 公式 6$$

在本题中,$x=e^t$,故有 $\frac{dx}{dt}=e^t=x$, $\frac{d^2x}{dt^2}=e^t=x$,

从而有 $y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{x}$, $y''=\frac{x\frac{d^2y}{dt^2}-x\frac{dy}{dt}}{x^3}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$.

将 y' 及 y''代入所给方程,即得 $\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$.

【3436】 $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$,若 $x=\cos t$.

提示 注意到$\frac{dx}{dt}=-\sin t$,$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$,运用 3434 题关于 y'及 y''的公式 5 及 6,求得 y'及 y''(t 为自变量)后连同 x 代入所给方程,即可获解.

解 注意到$\frac{dx}{dt}=-\sin t$,$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$,用公式 5 及 6,就有

$$y'=-\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t}, \qquad y''=\frac{-\sin t\frac{d^2y}{dt^2}+\cos t\frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y',y''及 x 代入所给方程,即得 $\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$.

令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,写出下列方程在极坐标 r,φ 下的形式:

【3450】 $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$.

提示 先求得$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}$,将$\frac{dy}{dx}$及 x,y 代入所给方程,即可获解.

解 当 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ 时,

$$\frac{dx}{d\varphi}=\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi}=\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\cos\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\cos\varphi, \quad \frac{d^2y}{d\varphi^2}=\sin\varphi\frac{d^2r}{d\varphi^2}+2\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi.$$

由公式 5 及 6,即得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}=\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}+r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi}, \qquad 公式 7$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2}\frac{dx}{d\varphi}-\frac{dy}{d\varphi}\frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^3}=\frac{r^2+2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2-r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}-r\sin\varphi\right)^3}.$$ 公式 8

将公式 7 及 x,y 代入所给方程,化简整理即得 $\frac{dr}{d\varphi}=r$ 或 $r'=r$.

【3456】 引用新函数 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,$\varphi=\arctan\frac{y}{x}$,变换表达式

$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}.$$

解 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 两端微分,得

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy$$

或
$$rdr=xdx+ydy. \tag{1}$$

由 $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$ 两端微分,得
$$d\varphi=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\frac{x}{r^2}dy-\frac{y}{r^2}dx$$

或
$$r^2d\varphi=xdy-ydx. \tag{2}$$

于是,由(1)及(2)可得 $xrdr-yr^2d\varphi=(x^2dx+xydy)-(xydy-y^2dx)=(x^2+y^2)dx=r^2dx$,

$$dx=\frac{x}{r}dr-yd\varphi. \tag{3}$$

同理可得
$$dy=\frac{y}{r}dr+xd\varphi. \tag{4}$$

从而由(3)及(4),得

$$xd^2y-yd^2x=x\left(\frac{y}{r}d^2r-\frac{y}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}drdy+dxd\varphi+xd^2\varphi\right)-y\left(\frac{x}{r}d^2r-\frac{x}{r^2}dr^2+\frac{1}{r}dxdr-dyd\varphi-yd^2\varphi\right)$$

$$=\frac{dr}{r}(xdy-ydx)+(xdx+ydy)d\varphi+(x^2+y^2)d^2\varphi=\frac{dr}{r}(r^2d\varphi)+(rdr)d\varphi+r^2d^2\varphi=2rdrd\varphi+r^2d^2\varphi,$$

于是,
$$W=x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}=2r\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+r^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

引入新变量 ξ 及 η,解下列方程:

【3458】 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$, 令 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

解题思路 只要将 ξ,η 看作中间变量,应用复合函数求偏导数的公式求出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$,即易获解 $z=\varphi(x+y)$,其中 φ 为任意的函数.

解 当仅作自变量代换,引入新自变量

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y)$$

这个最简单的情形时,只要把 ξ,η 看作中间变量,用复合函数求偏导数的公式,即可求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程,即得变换后的方程,本题中,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}=1,\qquad \frac{\partial \eta}{\partial y}=-1.$$

于是,$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}$,代入原方程,得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\quad 或\quad \frac{\partial z}{\partial \eta}=0,$$

即 $z=\varphi(\xi)=\varphi(x+y)$，其中 φ 为任意的函数.

【3460】 $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1\ (a\neq 0)$，令 $\xi=x,\ \eta=y-bz$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好. 首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi=dx,\qquad d\eta=dy-bdz. \tag{1}$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}(dy-bdz),\qquad \left(1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}dx+\frac{\partial z}{\partial \eta}dy,$$

$$dz=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dx+\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ 比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程，得 $$a\frac{\partial z}{\partial \xi}+b\frac{\partial z}{\partial \eta}=1+b\frac{\partial z}{\partial \eta}\quad 或\quad \frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{1}{a}.$$

于是， $$z=\frac{\xi}{a}+\varphi(\eta)=\frac{x}{a}+\varphi(y-bz).$$

把 u 与 v 看作新的自变量，变换下列方程：

【3464】 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，若 $u=\dfrac{y}{x}$，$v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

解题思路 本题宜用微分法，先求出 du 及 dv，进而由 $dz=\dfrac{\partial z}{\partial u}du+\dfrac{\partial z}{\partial v}dv$ 求得$\dfrac{\partial z}{\partial x}$及$\dfrac{\partial z}{\partial y}$，从而可得$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{2}$.

解 本题用微分法较好.

$$du=\frac{xdy-ydx}{x^2},$$

$$dv=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=dz+\frac{xdx+ydy+zdz}{r}\quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}).$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(dz+\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right).$$

于是， $$\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dz=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^{-1}.$$

代入原方程，得 $$x\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)+y\left(\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=(z+r)\left(1-\frac{\partial z}{\partial v}-\frac{z}{r}\frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$2(z+r)\frac{\partial z}{\partial v}=z+r.$$

如果 $z+r=0$，则可推得 $x^2+y^2=0$，但由于 $x\neq 0$，所以，x^2+y^2 不可能为零. 于是，$z+r\neq 0$. 从而，得

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}.$$

在下列方程中，代入新的变量 u,v,w，其中 $w=w(u,v)$：

【3476】 $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz$,令 $u=yz-x$, $v=xz-y$, $w=xy-z$.

解 $\mathrm{d}w=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\frac{\partial w}{\partial u}(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z-\mathrm{d}x)+\frac{\partial w}{\partial v}(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z-\mathrm{d}y)$.

整理得
$$\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}z=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\mathrm{d}y.$$

于是,
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入方程,得
$$(xy+z)\left(y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}\right)+(1-y^2)\left(x+\frac{\partial w}{\partial v}-z\frac{\partial w}{\partial u}\right)=(x+yz)\left(1+x\frac{\partial w}{\partial v}+y\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

即
$$(1-x^2-y^2-z^2-2xyz)\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

不难验证,由方程 $1-x^2-y^2-z^2-2xyz=0$ 确定的隐函数不是原方程的解(证略). 于是,
$$\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$,写出下列各式在极坐标 r 和 φ 下的形式:

【3481】 $w=x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x}$.

解 $\mathrm{d}x=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}y=\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$. 联立解之,得

$$\mathrm{d}r=\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y,\qquad \mathrm{d}\varphi=\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x.$$

于是,
$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}y,$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\end{cases}\qquad \text{公式 9}$$

将公式 9 代入原式,即得
$$w=x\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)-y\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial u}{\partial\varphi}.$$

【3483】 $w=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

解 $w=\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{y}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2$.

【3484】 $w=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导数的变换式,将 r,φ 看作中间变量,x,y 看作自变量. 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 r&=\mathrm{d}(\mathrm{d}r)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\mathrm{d}x+\frac{y}{r}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{r}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)-\frac{1}{r^3}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2=\frac{1}{r^3}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2,\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}^2\varphi=\mathrm{d}(\mathrm{d}\varphi)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{r^2}\mathrm{d}y-\frac{y}{r^2}\mathrm{d}x\right)=-\frac{2(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)}{r^3}\mathrm{d}r=-\frac{2}{r^4}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y),$$

故有
$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\mathrm{d}r^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\mathrm{d}\varphi^2+\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}^2 r+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\mathrm{d}^2\varphi\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\left(\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{r}\right)\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{r^2}\right)^2\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)^2}{r^3}+\frac{\partial u}{\partial \varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).$$

将上式右端按 $\mathrm{d}x^2$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}y^2$ 合并同类项，并与全微分式

$$\mathrm{d}^2u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2$$

比较，即得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{x^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{y^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{y^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{y^2}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{2xy}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\dfrac{x^2}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{x^2}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{2xy}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{x^2-y^2}{r^3}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}-\dfrac{xy}{r^4}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}-\dfrac{xy}{r^3}\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{x^2-y^2}{r^4}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases}$$ 公式 10

将公式 10 代入原式，即得 $w=\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$.

【3492】 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\quad\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2},\\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{cases}$$ 公式 11

本题中，$\quad\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$，$\quad\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

同法可得 $\quad\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,$$

则由公式 11，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0.$$

由于 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$，故得变换后的方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

【3495】 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $u=xy$，$v=\dfrac{x}{y}$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{2x}{y^3}$.

由公式 11 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\frac{2x}{y^3}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{2u}\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

【3502】 证明：拉普拉斯方程 $\quad\Delta z=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

的形式在满足条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial\psi}{\partial v}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial\psi}{\partial u}$ 的任何非退化变换 $x=\varphi(u,v)$，　$y=\psi(u,v)$下保持不变.

证 $\mathrm{d}x=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$，　$\mathrm{d}y=\frac{\partial\psi}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\mathrm{d}v=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}u+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}v.$

令 $I=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$. 由于变换是非退化的，故知

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2=I\neq0.$$

由上述方程组解得　　$\mathrm{d}u=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}x-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}y\right)$，　　$\mathrm{d}v=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\mathrm{d}y\right)$.

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题的证明及公式 11，并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\frac{1}{I^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right]=\frac{1}{I},$$

即得

$$\Delta z\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=\frac{1}{I}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0,$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

即形式是不变的.

【3511】 令　$x=r\sin\theta\cos\varphi$，　$y=r\sin\theta\sin\varphi$，　$z=r\cos\theta$，

把表达式

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\quad 及\quad \Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

变换为球坐标下的形式.

提示 所给变换由下面两个特殊的变换构成：

$$x=R\cos\varphi,\ y=R\sin\varphi,\ z=z;\qquad R=r\sin\theta,\ \varphi=\varphi,\ z=r\cos\theta,$$

并分别利用 3483 题及 3484 题的结果.

解 先作变换 $x=R\cos\varphi$，$y=R\sin\varphi$，$z=z$，它相当于对 x,y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果，对新变元 R,φ,z 有

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

再作变换 $R=r\sin\theta$，$\varphi=\varphi$，$z=r\cos\theta$. 它相当于对 R,z 坐标又作一次极坐标变换，其中 R 相当于公式 9 中的 y，θ 相当于公式 9 中的 φ. 于是，

$$\frac{\partial u}{\partial R}=\frac{R}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{z}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果，得

$$\Delta_1 u=\left(\frac{\partial u}{\partial R}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 u&=\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\tan\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right].$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到 $\Delta_1 u$ 及 $\Delta_2 u$ 的结果即为所求.

【3525】 证明：方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$ 的形式与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关.

证 令 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$. 若以 x 作为新函数，则有

$$\mathrm{d}^2 x=\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2+\frac{\partial x}{\partial y}\mathrm{d}^2 y+\frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}^2 z.$$

今以作为旧变元的关系： $\mathrm{d}^2 x=0$， $\mathrm{d}^2 y=0$， $\mathrm{d}z=p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y$

代入上式，可得

$$\mathrm{d}^2 z=-\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)+\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)^2\right].$$

于是，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-p\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-p\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-p\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right). \tag{3}$$

将(1)，(2)，(3)三式代入原方程，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=p^2\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2q\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+q^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2$$

$$=p^4\left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2\right]=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}\right)^2=0.$$

类似地，若以 y 作为函数，则也有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial z}\right)^2=0,$$

即方程的形式与变量 x，y 和 z 所分别担任的角色无关.

【3526】 取 x 作为变量 y 和 z 的函数，解方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

解 将 3525 题中的(1)，(2)，(3)三式及 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$，$q=\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入，得

$$q^2\left(-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+2pq\left(p^2\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+p^2q\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)-p^2\left(p\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}+2pq\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial z}+pq^2\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)=-p^3\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0,$$

即 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 或 $p=0$. 由 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}=0$ 解之，得原方程的解为

$$x=\varphi(z)y+\psi(z),$$

其中 φ，ψ 为任意函数；由 $p=0$ 解之，得 $z=f(y)$（f 为任意函数），它也是原方程的解.

§5. 几何上的应用

1° **切线和法平面** 曲线

$$x=\varphi(t),\qquad y=\psi(t),\qquad z=\chi(t)$$

在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切线方程为 $\dfrac{X-x}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{Y-y}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{Z-z}{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}.$

在此点的法平面方程为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(X-x)+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(Y-y)+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(Z-z)=0.$

2° **切平面和法线** 曲面 $z=f(x,y)$ 在其上一点 $M(x,y,z)$ 的切平面方程为

$$Z-z=\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在点 M 处的法线方程为 $\dfrac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}}=\dfrac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}}=\dfrac{Z-z}{-1}.$

若曲面方程以隐函数的形式 $F(x,y,z)=0$ 给出，则切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

法线方程为 $\dfrac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\dfrac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\dfrac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$

3° **平面曲线族的包络线** 含一个参数的曲线族 $f(x,y,\alpha)=0$（α 为参数）的包络线满足方程组：

$$f(x,y,\alpha)=0,\qquad f'_\alpha(x,y,\alpha)=0.$$

4° **曲面族的包络面** 含一个参数的曲面族 $F(x,y,z,\alpha)=0$ 的包络面满足方程组：

$$F(x,y,z,\alpha)=0,\qquad F'_\alpha(x,y,z,\alpha)=0.$$

含两个参数的曲面族 $\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ 的包络面满足方程组：

$$\Phi(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\alpha(x,y,z,\alpha,\beta)=0,\quad \Phi'_\beta(x,y,z,\alpha,\beta)=0.$$

写出下列曲线在已知点的切线和法平面方程：

【3528】 $x=a\cos\alpha\cos t,y=a\sin\alpha\cos t,z=a\sin t$；在点 $t=t_0$.

解 曲线 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$ 在点 $t=t_0$ 的切向量为 $\boldsymbol{v}(t_0)=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$.

本题中，当 $t=t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0=x(t_0)=a\cos\alpha\cos t_0,\quad y_0=y(t_0)=a\sin\alpha\cos t_0,\quad z_0=z(t_0)=a\sin t_0;$$

$$\boldsymbol{v}(t_0)=\{-a\cos\alpha\sin t_0,-a\sin\alpha\sin t_0,a\cos t_0\}.$$

于是，切线方程为 $\dfrac{x-x_0}{-a\cos\alpha\sin t_0}=\dfrac{y-y_0}{-a\sin\alpha\sin t_0}=\dfrac{z-z_0}{a\cos t_0},$

即 $\dfrac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0}=\dfrac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0}=\dfrac{z-z_0}{\cos t_0};$

法平面方程为 $(-a\cos\alpha\sin t_0)(x-x_0)+(-a\sin\alpha\sin t_0)(y-y_0)+(a\cos t_0)(z-z_0)=0,$

以 x_0,y_0,z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x\cos\alpha\sin t_0+y\sin\alpha\sin t_0-z\cos t_0=0,$$

即法平面过原点.

【3530】 $y=x$，$z=x^2$；在点 $M(1,1,1)$.

解 设 $x=t$，则 $y=t$，$z=t^2$. 于是，$\boldsymbol{v}(1)=\{1,1,2\}$，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2};$$

法平面方程为 $(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$ 或 $x+y+2z=4$.

【3531】 $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$；在点 $M(1,1,3)$.

提示 曲线在该点的切向量为 $\boldsymbol{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}$.

解 当曲线以两个曲面方程 $F_1(x,y,z)=0, F_2(x,y,z)=0$ 交线形式给出时，可先求出两曲面在交点处的法向量：

$$\boldsymbol{n}_1=\{F'_{1x},F'_{1y},F'_{1z}\},\qquad \boldsymbol{n}_2=\{F'_{2x},F'_{2y},F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\left\{\begin{vmatrix}F'_{1y} & F'_{1z}\\ F'_{2y} & F'_{2z}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1z} & F'_{1x}\\ F'_{2z} & F'_{2x}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F'_{1x} & F'_{1y}\\ F'_{2x} & F'_{2y}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$\boldsymbol{n}_1=\{2,0,6\},\quad \boldsymbol{n}_2=\{0,2,6\},\quad \boldsymbol{v}=\{1,0,3\}\times\{0,1,3\}=\{-3,-3,1\}.$$

于是，切线方程为 $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-3}{1}$ 或 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-1}$；

法平面方程为 $-3(x-1)-3(y-1)+(z-3)=0$,

即 $3x+3y-z=3$.

【3533】 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ 上求一点，此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\boldsymbol{v}=\{1,2t,3t^2\}$，平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{1,2,1\}$. 按题设，应有

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=1+4t+3t^2=0.$$

解之，得 $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$. 于是，所求的点为 $M_1(-1,1,-1)$, $M_2\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)$.

写出下列曲面上点 M_0 的切平面和法线方程：

【3539】 $z=x^2+y^2$；在点 $M_0(1,2,5)$.

解 当曲面由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出时，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right\}$，特别是曲面由显式方程 $z=f(x,y)$ 给出时，其法向量为 $\boldsymbol{n}=\{f'_x,f'_y,-1\}$. 本题中，$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}_{M_0}=\{2,4,-1\}$.

于是，切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0,\quad 或\quad 2x+4y-z=5；$$

法线方程为 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$.

【3545】 $x=a\cos\psi\cos\varphi$, $y=b\cos\psi\sin\varphi$, $z=c\sin\psi$；在点 $M_0(\varphi_0,\psi_0)$.

解题思路 当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

给出时，曲面上分别令 $u=u_0, v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\qquad \boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$.

解 当曲面由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)$$

给出时，曲面上分别令 $u=u_0, v=v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\boldsymbol{v}_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right\},\qquad \boldsymbol{v}_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

则切面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2=\left\{\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u}\\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right\}.$$

本题中，

$$v_1=\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi},\frac{\partial y}{\partial\varphi},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}_{M_0}=\{-a\cos\psi_0\sin\varphi_0,b\cos\psi_0\cos\varphi_0,0\}=\cos\psi_0\{-a\sin\varphi_0,b\cos\varphi_0,0\},$$

$$v_2=\left\{\frac{\partial x}{\partial\psi},\frac{\partial y}{\partial\psi},\frac{\partial z}{\partial\psi}\right\}_{M_0}=\{-a\sin\psi_0\cos\varphi_0,-b\sin\psi_0\sin\varphi_0,c\cos\psi_0\},$$

$$n=v_1\times v_2=abc\left\{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a},\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b},\frac{\sin\psi_0}{c}\right\}.$$

于是，切平面方程为

$$\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}(x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0)+\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}(y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0)+\frac{\sin\psi_0}{c}(z-c\sin\psi_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0+\frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0+\frac{z}{c}\sin\psi_0=1;$$

法线方程为
$$\frac{x-a\cos\psi_0\cos\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\cos\varphi_0}{a}}=\frac{y-b\cos\psi_0\sin\varphi_0}{\frac{\cos\psi_0\sin\varphi_0}{b}}=\frac{z-c\sin\psi_0}{\frac{\sin\psi_0}{c}},$$

即
$$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0-a}{bc}=\frac{y\sec\psi_0\csc\varphi_0-b}{ac}=\frac{z\csc\psi_0-c}{ab}.$$

【3549】 在曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $n=\{2(x+y+z),2(x+2y+2z),2(x+2y+3z)\}$ 当

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\x+2y+2z=0,\\x+2y+3z=\lambda.\end{cases}$$

时，n 与 $k=\{0,0,1\}$ 平行，即切平面平行于 Oxy 平面. 解之，得 $x=0$，$y=-\lambda$，$z=\lambda$. 将求得的 x,y,z 值代入所给的曲面方程，得 $\lambda=\pm2\sqrt{2}$. 于是，切平面平行于 Oxy 坐标面的切点为 $(0,\pm2\sqrt{2},\mp2\sqrt{2})$. 同法可求得切平面平行于 Oyz 坐标面及 Oxz 坐标面的诸切点分别为 $(\pm4,\mp2,0)$ 及 $(\pm2,\mp4,\pm2)$.

【3551】 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

解 $n=2\{x,2y,3z\}$. 按题设，应有

$$x=\lambda,\quad 2y=4\lambda,\quad 3z=6\lambda,$$

解之，得 $x=\lambda,y=2\lambda,z=2\lambda$. 将它们代入方程 $x^2+2y^2+3z^2=21$，得 $\lambda=\pm1$，故切点为 $(\pm1,\pm2,\pm2)$. 于是，所求的切平面方程为

$$(x\mp1)+4(y\mp2)+6(z\mp2)=0,$$

即
$$x+4y+6z=\pm21.$$

【3554】 证明：锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的切平面经过其顶点.

证明思路 在锥面上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$（顶点 $(0,0,0)$ 除外），可求得锥面在该点的切平面方程为

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点 $(0,0,0)$.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$. 于是，锥面在任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得
$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点 $(0,0,0)$.

【3558】 设

$$z=f(x,y),\quad 其中(x,y)\in D \tag{1}$$

为曲面的方程，$\varphi(P_1,P)$为曲面(1)在点 $P(x,y)\in D$ 及$P_1(x_1,y_1)\in D$二点的法线之间的夹角.

证明：若 D 为有界闭区域，函数 $f(x,y)$在区域 D 内具有有界的二阶导数，则李雅普诺夫不等式

$$\varphi(P_1,P)<C\rho(P_1,P) \tag{2}$$

成立. 其中 C 为常数，$\rho(P_1,P)$为点 P 与 P_1 之间的距离

证 本题应加区域是凸的这个条件，否则结论就不成立. 例如，

$$z=\begin{cases}0, & y\leqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ y^3, & y>0,\ x\geqslant y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\\ -y^3, & y>0,\ x\leqslant -y^4,\ x^2+y^2\leqslant 1,\end{cases}$$

如图 3558 所示，函数 z 在单位圆内缺一个角的闭区域内定义，且有连续的二阶偏导数，取 $P_n\left(\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)$与 $P'_n\left(-\frac{1}{n^3},\frac{1}{n}\right)$，则

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(P_n)=\{0,3y^2,-1\}_{P_n}=\left\{0,\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\boldsymbol{n}'=\boldsymbol{n}(P'_n)=\{0,-3y^2,-1\}_{P'_n}=\left\{0,-\frac{3}{n^2},-1\right\},$$

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'=\left\{-\frac{6}{n^2},0,0\right\},$$

$$\sin\varphi_n=\frac{|\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}'|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}'|}=\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

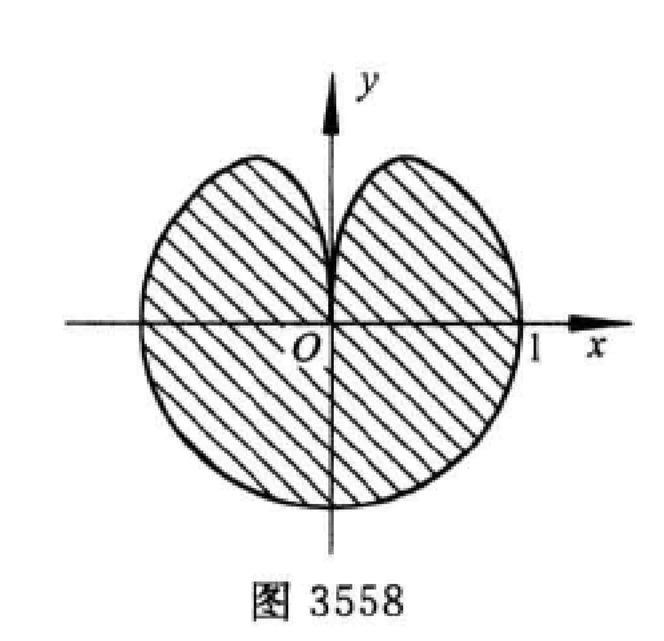


图 3558

又因 $\rho_n(P_n,P'_n)=\frac{2}{n^3}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}\ \frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{6}{n^2}}{1+\frac{9}{n^4}}}{\frac{2}{n^3}}=+\infty,$$

故不存在常数 C，使 $\varphi_n<C\rho_n$

下面证明：当 D 为凸的有界闭区域时，不等式(2)成立.

由 3255 题知：当 $f(x,y)$在 D 内有二阶连续的偏导数时，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 内是二元连续的. 又因 D 是有界闭区域，故$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$在 D 上有界，记

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<M,\qquad\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<M.$$

又由 3254 题的证明过程可知：当 D 是凸域，$f(x,y)$有有界二阶偏导数时，对 D 中任意两点 P 及 P_1，$\frac{\partial f}{\partial x}$及$\frac{\partial f}{\partial y}$满足利普希茨条件，即存在常数 L，使有

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right|<L\rho(P_1,P),$$

$$\left|\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right|<L\rho(P_1,P).$$

由

$$\boldsymbol{n}(P_1)=\left\{\frac{\partial f(P_1)}{\partial x},\frac{\partial f(P_1)}{\partial y},-1\right\} \quad 及 \quad \boldsymbol{n}(P)=\left\{\frac{\partial f(P)}{\partial x},\frac{\partial f(P)}{\partial y},-1\right\}$$

知:对于 $\varphi=\varphi(P_1,P)$有下列不等式

$$\begin{aligned}\sin^2\varphi&=\frac{|\boldsymbol{n}(P_1)\times\boldsymbol{n}(P)|^2}{|\boldsymbol{n}(P_1)|^2|\boldsymbol{n}(P)|^2}\leqslant|\boldsymbol{n}(P_1)\times\boldsymbol{n}(P)|^2\\&=\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P)}{\partial x}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<L^2\rho^2+L^2\rho^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}\right]^2\left[\frac{\partial f(P)}{\partial y}-\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2+2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y}\right]^2\left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial f(P)}{\partial x}\right]^2\\&<2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2+2M^2L^2\rho^2=2L^2\rho^2(1+2M^2).\end{aligned}$$

于是,$\sin\varphi<C_1\rho(P_1,P)$,其中 $C_1^2=2L^2(1+2M^2)$,从而得

$$\varphi(P_1,P)<\frac{\pi}{2}\sin\varphi^{*)}<\frac{\pi}{2}C_1\rho(P_1,P)=C\rho(P_1,P).$$

其中 $C=\frac{\pi}{2}C_1$ 为常数,本题获证.

*) 利用 1290 题的结果.

【3563】 求函数 $u=x+y+z$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的外法线方向的导数.在球面上怎样的点,函数 u 的上述法向导数有:(1)最大值,(2)最小值,(3)等于零?

提示 易得$\frac{\partial u}{\partial n}=x_0+y_0+z_0$.

(1) 利用 1294 题的结果,易知所求的点为$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(2) 同(1),所求的点为$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

(3) 所求的点为由方程 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 所确定的解(x,y,z).

解 $r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=1$,则在点 M_0 处球面的外法线单位向量为$\left\{\frac{x_0}{r_0},\frac{y_0}{r_0},\frac{z_0}{r_0}\right\}=\{x_0,y_0,z_0\}$.于是,

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=\{1,1,1\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=x_0+y_0+z_0.$$

(1) 利用 1294 题的结果,得

$$x_0+y_0+z_0=1x_0+1y_0+1z_0\leqslant\sqrt{3}\ \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\sqrt{3}.$$

当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$时,上述等式成立,此点恰在球面上.因此,在点$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$处$\frac{\partial u}{\partial n}$取得最大值.

(2) 同法可得 $$-(x_0+y_0+z_0)=(-1)x_0+(-1)y_0+(-1)z_0\leqslant\sqrt{3},$$

或 $$x_0+y_0+z_0\geqslant-\sqrt{3}.$$

故在点$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$处 $\frac{\partial u}{\partial n}$取得最小值.

(3) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时$\frac{\partial u}{\partial n}=0$.因此,所求的点为由方程

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

确定的解(x,y,z),它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面.

求含一个参变量的平面曲线族的包络线:

【3566】 $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ($p=$常数).

解题思路 令 $f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p$.由 $f(x,y,\alpha)=0$ 及 $f'_\alpha(x,y,\alpha)=0$ 消去 α,并注意原曲线

没有奇点，且所得方程也不是原曲线族中某一支的方程，因而它就是包络线方程.

解 $\begin{cases} f(x,y,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0, \\ f'_\alpha(x,y,\alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha=0. \end{cases}$

消去 α，得
$$x^2+y^2=p^2. \tag{1}$$

由于原曲线没有奇点，且(1)也不是原曲线族中的某一支，故方程(1)为原曲线族的包络线方程.

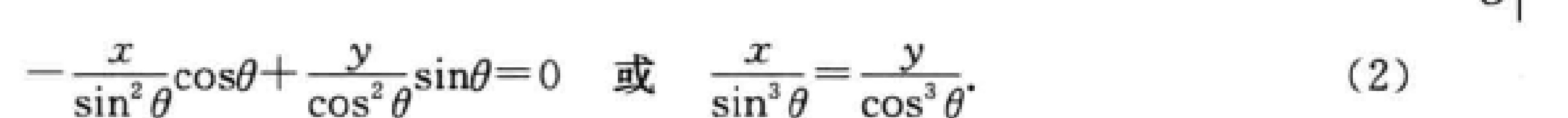
【3570】 设有长为 l 的线段，其两端点沿坐标轴滑动，求如此产生的线段族的包络线.

解 如图 3570 所示，直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$

但是 $a=l\sin\theta$, $b=l\cos\theta$，所以，
$$\frac{x}{\sin\theta}+\frac{y}{\cos\theta}=l. \tag{1}$$

图 3570

对 θ 求导数，得


$$-\frac{x}{\sin^2\theta}\cos\theta+\frac{y}{\cos^2\theta}\sin\theta=0 \quad 或 \quad \frac{x}{\sin^3\theta}=\frac{y}{\cos^3\theta}. \tag{2}$$

由(1)，(2)消去 θ，得 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$，同 3566 题的理由可知，它是包络线方程.

【3573】 证明：平面曲线的法线的包络线是此曲线的渐屈线.

提示 可仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线加以证明，并注意 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为 $(X-x)+y'(Y-y)=0$.

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,y)$ 的法线方程为
$$(X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{1}$$

对 x 求导数，得
$$-1+y''(Y-y)-y'^2=0 \quad 或 \quad y''(Y-y)=1+y'^2. \tag{2}$$

由(1)，(2)解得
$$\begin{cases} X=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ Y=y+\dfrac{1+y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即 $y=f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章 § 14 前言 3°).

同 3566 题的理由可知，它是平面曲线的法线的包络线方程.

【3574】 研究下列曲线族的判别曲线的性质(c 是参变量)：

(1) 立方抛物线 $y=(x-c)^3$；　　(2) 半立方抛物线 $y^2=(x-c)^3$；

(3) 尼尔抛物线 $y^3=(x-c)^2$；　　(4) 环索线 $(y-c)^2=x^2\dfrac{a-x}{a+x}$.

解 (1) $\begin{cases} f(x,y,c)=y-(x-c)^3=0, \\ f'_c(x,y,c)=3(x-c)^2=0. \end{cases}$

消去 c，得 $y=0$，它为判别曲线的方程.

原曲线无奇点，且 $y=0$ 也不是原曲线族的某一支，因此，它是包络线. 此包络线与原曲线族在 $(c,0)$ 点相切，且 $(c,0)$ 点是曲线的拐点，即它又是原曲线族拐点的轨迹. 如图 3574(1)所示.

(2) $\begin{cases} y^2-(x-c)^3=0, \\ 3(x-c)^2=0. \end{cases}$ 消去 c，得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c,0)$，因此它是奇点的轨迹. 要看是否为包络线，还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切. 事实上，两支分别为 $y_1=(x-c)^{\frac{3}{2}}$，$y_2=-(x-c)^{\frac{3}{2}}$，均有 $y_1'(c)=0$，$y_2'(c)=0$. 因此，$y=0$ 为原曲线族的包络线. 如图 3574(2)所示.

(3) $\begin{cases} y^3-(x-c)^2=0, \\ 2(x-c)=0. \end{cases}$ 消去 c,得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为$(c,0)$. 由于 $y=(x-c)^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷,因此,它与 $y=0$ 不相切,从而,它无包络线. 奇点$(c,0)$为尖点. 如图 3574(3)所示.

(4) $\begin{cases} (y-c)^2-x^2\dfrac{a-x}{a+x}=0, \\ -2(y-c)=0. \end{cases}$

消去 c,得 $x^2(a-x)=0$,即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹,用§6. 的方法可判别出它是二重点的轨迹. 事实上,

$$A=f''_{xx}(0,c)=2,\quad B=f''_{xy}(0,c)=0,\quad C=f''_{yy}(0,c)=-2,\quad AC-B^2=-4<0.$$

从而知 $x=0$ 不是包络线.

但是,在 $x=a$ 处 $f'_x(a,y)\neq 0\ (a\neq 0)$. 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹,同时它又不是原曲线族的某一支. 因此,$x=a$是原曲线族的包络线,如图 3574(4)所示.

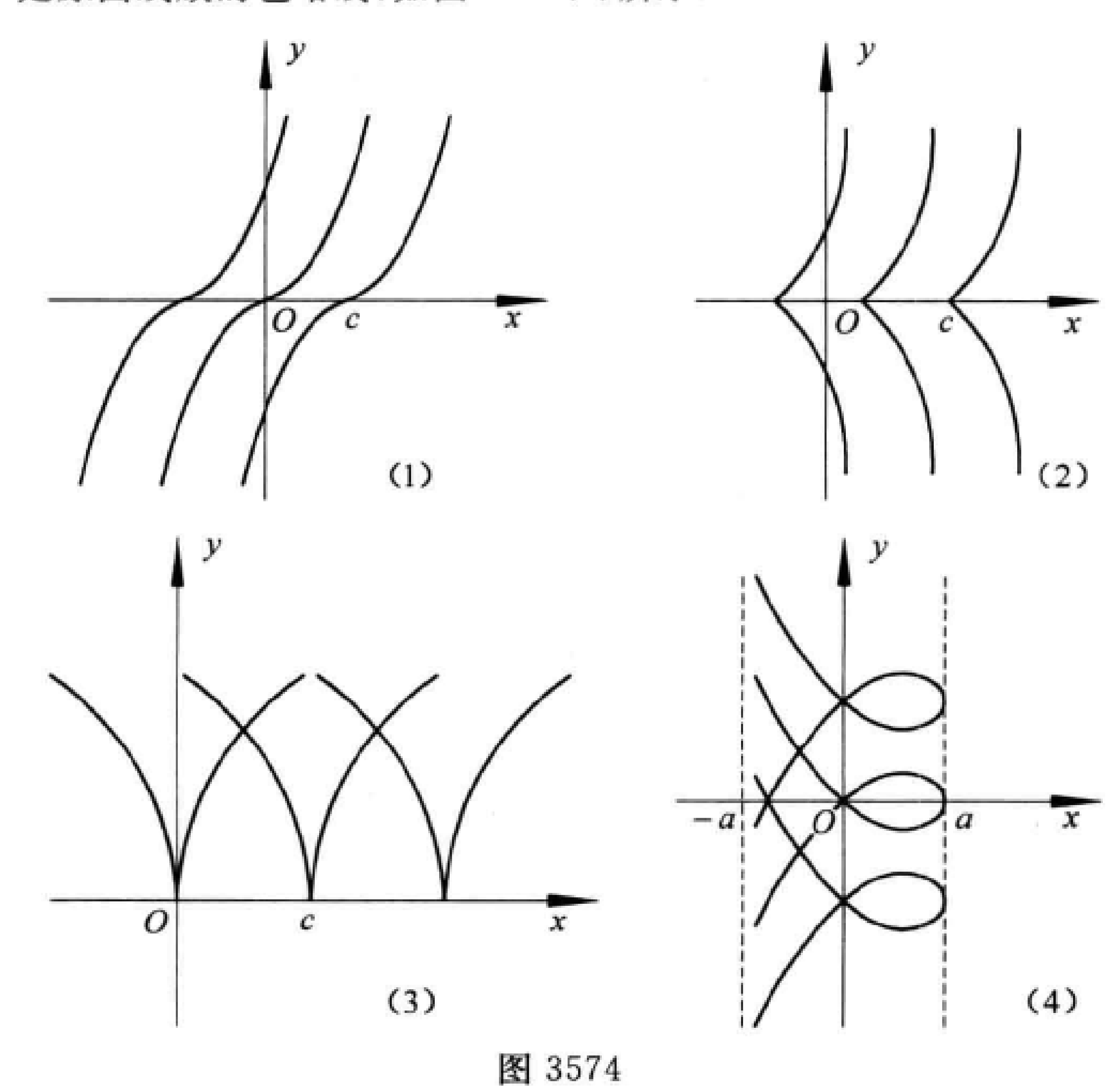


图 3574

【3575】 求半径为 r,中心在圆周 $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=0$(t 是参数,$R>r$)上的球族的包络面.

解
$$\begin{cases} (X-R\cos t)^2+(Y-R\sin t)^2+Z^2=r^2, & (1)\\ 2R\sin t(X-R\cos t)-2R\cos t(Y-R\sin t)=0. & (2)\end{cases}$$

(2)式化简得 $X\sin t-Y\cos t=0$. 于是,

$$\tan t=\frac{Y}{X},\quad \cos t=\pm\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}},\quad \sin t=\pm\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}, \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式,得

$$(X^2+Y^2)\left(1\pm\frac{R}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right)^2+Z^2=r^2.$$

当取"+"号时,由于 $R^2>r^2$,故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取"−"号时,由于原曲面族无奇点,且$(\sqrt{X^2+Y^2}-R)^2+Z^2=r^2$ 不是原曲面族的某一个,因此,它是原曲面族的包络面(圆环).

【3577】 求相应体积 V 是常数的椭球面族 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的包络面..

解题思路 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda\left(abc-\frac{3V}{4\pi}\right),$$

则包络面的方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ abc=\frac{3V}{4\pi},\\ F'_a=0,\ F'_b=0,\ F'_c=0.\end{cases}$$

消去 a,b,c，可得包络面方程 $|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}$.

解 引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\lambda\left(abc-\frac{3V}{4\pi}\right),$$

则包络面的方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, & (1)\\ abc=\frac{3V}{4\pi}, & (2)\\ F'_a=-\frac{2x^2}{a^3}+\lambda bc=0, & (3)\\ F'_b=-\frac{2y^2}{b^3}+\lambda ac=0, & (4)\\ F'_c=-\frac{2z^2}{c^3}+\lambda ab=0. & (5)\end{cases}$$

由(3)、(4)、(5)可解得
$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\lambda abc}{2}=\mu. \tag{6}$$

将(6)式代入(1)式，得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\mu=\frac{1}{3}$. 于是，

$$a=\sqrt{3}\,|x|,\quad b=\sqrt{3}\,|y|,\quad c=\sqrt{3}\,|z|. \tag{7}$$

将(7)式代入(2)式，得
$$|xyz|=\frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \tag{8}$$

由于原曲面族无奇点，且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个，故知曲面(8)为原曲面族的包络面.

【3579】 有一发光点位于坐标原点. 若 $x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2$，求由球

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

解 解法 1：

所求的阴影圆锥的表面，可看作是一个过原点的平面族的包络面，此平面族的方程为 $ax+bx+cz=0$，

其中 a,b,c 满足约束条件 $\begin{cases}ax_0+by_0+cz_0=\pm R,\\ a^2+b^2+c^2=1.\end{cases}$

引入辅助函数

$$F(x,y,z,a,b,c)=ax+by+cz+\lambda(ax_0+by_0+cz_0\mp R)+\mu(a^2+b^2+c^2-1),$$

则包络面方程由下列方程组确定：

$$\begin{cases}ax+by+cz=0, & (1)\\ a^2+b^2+c^2=1, & (2)\\ ax_0+by_0+cz_0=\pm R, & (3)\\ F'_a=x+\lambda x_0+2\mu a=0, & (4)\\ F'_b=y+\lambda y_0+2\mu b=0, & (5)\\ F'_c=z+\lambda z_0+2\mu c=0. & (6)\end{cases}$$

方程(4)、(5)、(6)要能解出 λ、μ,其中 a、b、c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a\\ y & y_0 & b\\ z & z_0 & c\end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

记
$$r_1=\begin{vmatrix} y & y_0\\ z & z_0\end{vmatrix},\quad r_2=\begin{vmatrix} z & z_0\\ x & x_0\end{vmatrix},\quad r_3=\begin{vmatrix} x & x_0\\ y & y_0\end{vmatrix},$$

则上述关系式可记为
$$ar_1+br_2+cr_3=0. \tag{8}$$

由(1)、(3)、(8)可解得
$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z\\ \pm R & y_0 & z_0\\ 0 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & z\\ x_0 & y_0 & z_0\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix}}=\frac{\pm R(zr_2-yr_3)}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}$$

或
$$a^2=\frac{R^2(zr_2-yr_3)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},b^2=\frac{R^2(xr_3-zr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2},c^2=\frac{R^2(xr_2-yr_1)^2}{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2}. \tag{9}$$

将(9)式代入(2)式,即得

$$\begin{aligned}(r_1^2+r_2^2+r_3^2)^2&=R^2[(yr_3-zr_2)^2+(xr_3-zr_1)^2+(xr_2-yr_1)^2]\\ &=R^2[(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2)-(xr_1+yr_2+zr_3)^2]\\ &=R^2(r_1^2+r_2^2+r_3^2)(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

(其中利用了 $xr_1+yr_2+zr_3=0$,这是不难验证的.)于是,有

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=R^2(x^2+y^2+z^2). \tag{10}$$

由于原平面族无奇点,且曲面(10)不是平面族的某一个,因此,曲面(10)即为包络面.所求的阴影圆锥为此锥面的内部,即满足不等式

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域(严格说来,还要除去球前部的区域).

解法 2:如图 3579 所示,由三角形的面积公式 $\frac{1}{2}|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{l}_0|\sin\alpha$ 得到

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|=|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{l}_0|\frac{R}{|\boldsymbol{l}_0|},$$

其中 $\boldsymbol{l}_0=\{x_0,y_0,z_0\}$,$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$,而 $P(x,y,z)$ 为锥面上的任意一点.平方之,即得圆锥曲面的方程为

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|^2=R^2|\boldsymbol{r}|^2.$$

于是,所求的阴影圆锥为适合不等式 $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{l}_0|^2\leqslant R^2|\boldsymbol{r}|^2$,即

$$\begin{vmatrix} x & y\\ x_0 & y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y & z\\ y_0 & z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x\\ z_0 & x_0\end{vmatrix}^2\leqslant R^2(x^2+y^2+z^2)$$

的空间区域(严格说来,还要除去球前部的区域).

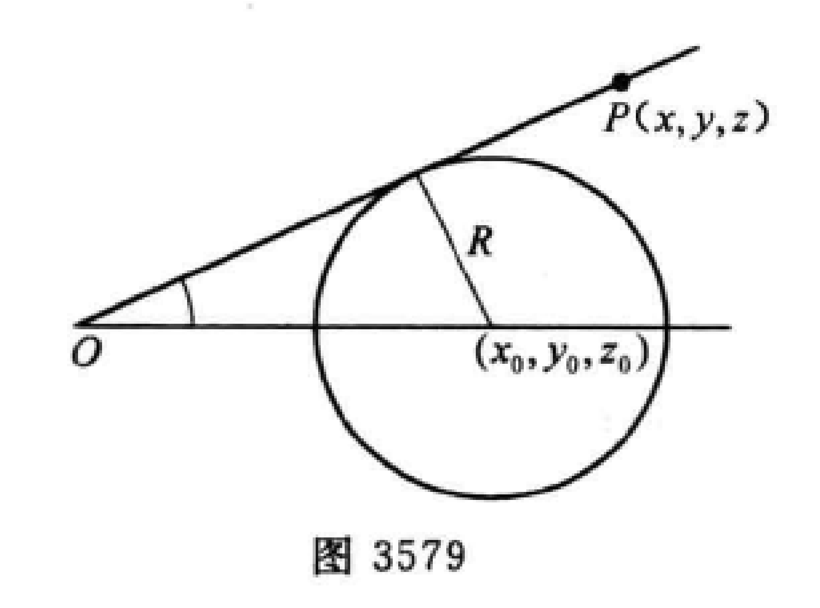


图 3579

§6. 泰勒公式

1° **泰勒公式** 若函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶(包括 $n+1$ 阶)的连续偏导数,则在此邻域内成立公式

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{i}f(a,b)+R_n(x,y), \tag{1}$$

其中

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1}f[a+\theta_n(x-a),b+\theta_n(y-b)]\quad(0<\theta_n<1).$$

2° **泰勒级数** 若函数 $f(x,y)$ 无穷次可微且 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x,y)=0$,则此函数可表成幂级数的形式:

$$f(x,y)=f(a,b)+\sum_{i+j\geqslant 1}^{\infty}\frac{1}{i!j!}f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a,b)(x-a)^i(y-b)^j \tag{2}$$

在 $a=b=0$ 的特殊情形下,公式(1)和(2)分别称为麦克劳林公式和麦克劳林级数.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3° **平面曲线的奇点** 若可微曲线 $F(x,y)=0$ 上的点 $M_0(x_0,y_0)$ 满足下列条件:

$$F(x_0,y_0)=0,\quad F'_x(x_0,y_0)=0,\quad F'_y(x_0,y_0)=0,$$

则称此点为奇点.设 $M_0(x_0,y_0)$ 是属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线的奇点,且数

$$A=F''_{xx}(x_0,y_0),\quad B=F''_{xy}(x_0,y_0),\quad C=F''_{yy}(x_0,y_0)$$

不全为零.于是,若

(1) $AC-B^2>0$,则 M_0 是孤立点;

(2) $AC-B^2<0$,则 M_0 是二重点(节点);

(3) $AC-B^2=0$,则 M_0 是上升点或孤立点.

在 $A=B=C=0$ 的情形,奇点的种类可能更复杂.至于不属于光滑曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线,奇点还可能有更复杂的本质:中断点,角点等等.

【3584】 设

$$f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz,$$

按数 h,k 和 l 的正整数次幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(Ax+Dy+Ez)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2A$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2D$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(By+Dx+Fz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2B$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=2F$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2(Cz+Ex+Fy)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=2C$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=2E$.

所有三阶偏导数均为零,因此 $R_2(x,y)=0$.于是,按泰勒公式即得

$$\begin{aligned}&f(x+h,y+k,z+l)\\&=f(x,y,z)+\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}+l\frac{\partial}{\partial z}\right)^{i}f(x,y,z)\\&=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(By+Dx+Fz)+l(Cz+Ex+Fy)]\\&\quad+[Ah^2+Bk^2+Cl^2+2Dhk+2Ehl+2Fkl]\\&=f(x,y,z)+2[h(Ax+Dy+Ez)+k(Dx+By+Fz)+l(Ex+Fy+Cz)]+f(h,k,l).\end{aligned}$$

【3590】 已知中心在点 $P(x,y)$ 半径为 ρ 的圆周,设 $f(P)=f(x,y)$ 及 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 为已知圆周的内接正三角形的顶点,并且 $x_1=x+\rho$, $y_1=y$.按 ρ 的正整数次幂展开函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)],$$

精确到 ρ^2.

解 如图 3590 所示. $\Delta P_1P_2P_3$ 之三顶点分别为

$$P_1(x+\rho,y),\quad P_2\left(x-\frac{\rho}{2},y+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right),\quad P_3\left(x-\frac{\rho}{2},y-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right).$$

图 3590

于是,

$$\begin{aligned}F(\rho)&=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]\\&\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]\right.\\&\quad+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\\&\quad\left.+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}\\&=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).\end{aligned}$$

【3591】 按 h 与 k 的幂次展开函数

$$\Delta_{xy}f(x,y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y).$$

解

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f(x,y)&=\left[f(x,y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{h^mk^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right]\\&\quad-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}\right]-\left[f(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\right]+f(x,y)\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^mk^{n-m}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=hk\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sum_{n=3}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^{m-1}k^{n-m-1}}{m!(n-m)!}\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}\right].\end{aligned}$$

将下列函数展开成麦克劳林级数:

【3594】 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$.

解

$$f(x,y)=\ln[1+(x+y)]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}(x+y)^k=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}x^my^{k-m}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{m!(k-m)!}x^my^{k-m}\tag{1}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m-1}(m+n-1)!}{m!n!}x^my^n.\tag{2}$$

当 $m=0$, $n=0$ 时,分子出现 $(-1)!$,规定该项为零. 下面讨论一下收敛区间. (1)式成立,只要求 $|x+y|<1$ 即可. 但从(1)式到(2)式,必须要求(1)式绝对收敛,这样才能将各项重新排列. 不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式,它的收敛要求 $|x|+|y|<1$. 这就是 $f(x,y)$ 的展开式的收敛区域.

【3601】 写出函数 $f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}\mathrm{d}t$ 的麦克劳林级数前面不为零的三项.

解

$$(1+x)^{t^2y}=\mathrm{e}^{t^2y\ln(1+x)}\approx1+t^2y\ln(1+x)+\frac{1}{2!}[t^2y\ln(1+x)]^2\approx1+t^2y\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y.$$

于是,

$$f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)\mathrm{d}t=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$$

【3604】 设 z 为由方程 $z^3-2xz+y=0$ 定义的 x 和 y 的隐函数,且当 $x=1$ 和 $y=1$ 时 $z=1$. 写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次，得

$$3z^2\mathrm{d}z-2x\mathrm{d}z-2z\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=0. \tag{1}$$

再微分一次，得

$$(3z^2-2x)\mathrm{d}^2z+6z\mathrm{d}z^2-4\mathrm{d}x\mathrm{d}z=0. \tag{2}$$

以 $x=1$, $y=1$, $z=1$ 代入(1),(2)两式，得

$\mathrm{d}z=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y.$

$\mathrm{d}^2z=(4\mathrm{d}x-6\mathrm{d}z)\mathrm{d}z=(4\mathrm{d}x-12\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y)(2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=-16\mathrm{d}x^2+20\mathrm{d}x\mathrm{d}y-6\mathrm{d}y^2$,

$$\vdots$$

于是，可求得在 $x=1$, $y=1$ 处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-1;\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-16,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6;$$

$$\vdots$$

从而，有 $z=1+2(x-1)-(y-1)-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+\cdots$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地画出这些曲线：

【3605】 $y^2=ax^2+x^3$.

提示 点(0,0)为奇点，分别就 $a>0$, $a<0$ 及 $a=0$ 三种情况加以讨论.

解 解方程组 $\begin{cases}F(x,y)=ax^2+x^3-y^2=0,\\ F'_x(x,y)=2ax+3x^2=0,\\ F'_y(x,y)=-2y=0\end{cases}$

得 $x=0$, $y=0$，故点(0,0)为奇点.

其次，由于

$$A=F''_{xx}(0,0)=2a,\quad B=F''_{xy}(0,0)=0,\quad C=F''_{yy}(0,0)=-2,\quad AC-B^2=-4a,$$

故当 $a>0$ 时，点(0,0)为二重点；当 $a<0$ 时，点(0,0)为孤立点；当 $a=0$ 时，原方程化为 $y^2=x^3$，由 3574(2)的讨论知，点(0,0)为尖点.

如图 3605 所示，点 A_1 为 $(-a,0)$

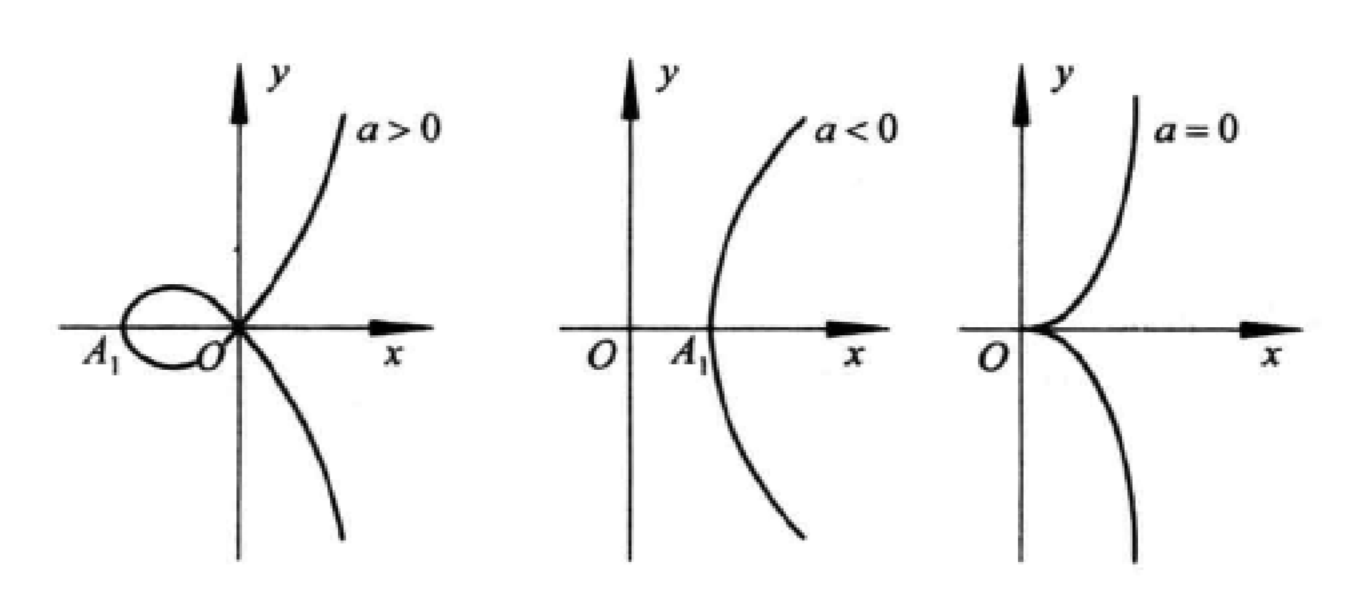


图 3605

【3612】 研究参变量 a,b,c $(a\leqslant b\leqslant c)$ 的值与曲线 $y^2=(x-a)(x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases}F(x,y)=y^2-(x-a)(x-b)(x-c)=0, & (1)\\ F'_x(x,y)=-(x-a)(x-b)-(x-a)(x-c)-(x-b)(x-c)=0, & (2)\\ F'_y(x,y)=2y=0. & (3)\end{cases}$$

由(3)得 $y=0$，代入(1)，联立(1),(2)求解.

当 $a<b<c$ 时，(1),(2)无解. 因此无奇点，此时曲线如图 3612(1)所示；

当 $a=b<c$ 时，显然(1),(2)有解 $x=a$, $y=0$，由于 $A=F''_{xx}(a,0)=-2(a-c)$, $B=F''_{xy}(a,0)=0$, $C=$

$F''_{yy}(a,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(a-c)>0$,故点$A_1(a,0)$为孤立点,如图3612(2)所示;

当 $a<b=c$ 时,显然(1),(2)有解 $x=b$, $y=0$. 由于 $A=F''_{xx}(b,0)=-2(c-a)$, $B=F''_{xy}(b,0)=0$, $C=F''_{yy}(b,0)=2$,且 $AC-B^2=-4(c-a)<0$,故点 $A_2(b,0)$为二重点,如图3612(3)所示;

当 $a=b=c$ 时,显然有解 $x=a$, $y=0$. 由于 $AC-B^2=0$,此时原方程为 $y^2=(x-a)^3$,且由 3574 题(2)的结果知,点$A_1(a,0)$为尖点,如图 3612(4)所示.

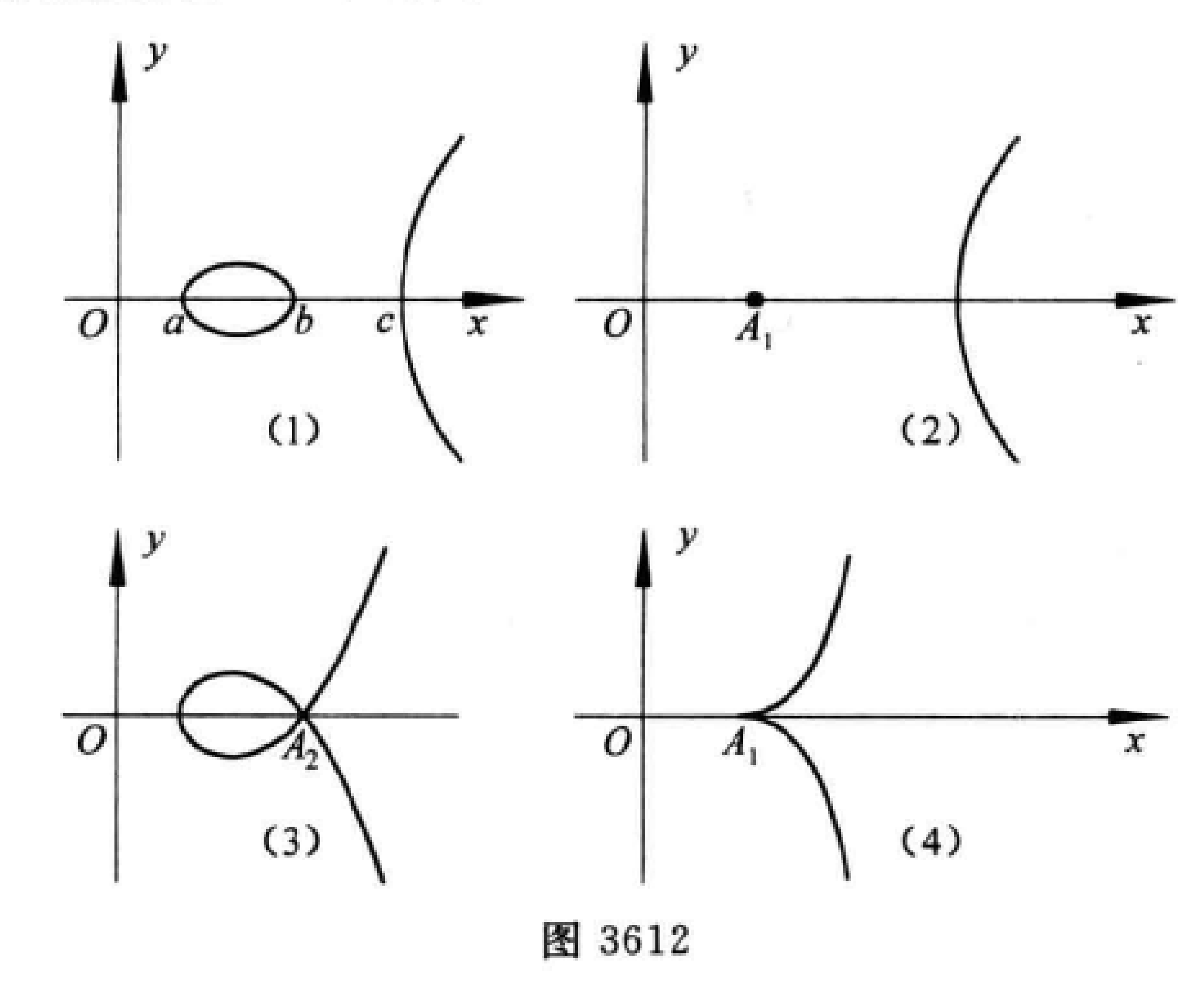


图 3612

研究超越曲线的奇点:

【3614】 $y^2=1-e^{-x^3}$.

解 解方程组 $\begin{cases}F(x,y)=y^2-1+e^{-x^3}=0,\\ F'_x(x,y)=-3x^2e^{-x^3}=0,\\ F'_y(x,y)=2y=0\end{cases}$ 得 $x=0$, $y=0$,故点(0,0)为奇点.

又 $A=F''_{xx}(0,0)=0$, $B=F''_{xy}(0,0)=0$, $C=F''_{yy}(0,0)=2$,且 $AC-B^2=0$,故对点(0,0)还需再讨论一下. 原式可解为 $x=-\sqrt[3]{\ln(1-y^2)}>0$,在(0,0)附近,第一及第四象限各有原曲线的一支,因此,点(0,0)为尖点.

【3616】 $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

提示 注意点(0,0)为角点.

解 在 $x=0$ 处,由于 $\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to-0}y=0$,故 $x=0$ 为"可移去"的第一类不连续点,补充函数在该点的值为零后,即得知函数

$$y=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续. 由于 $F'_y(x,y)=1\neq0$,故无奇点. 当 $x\neq0$ 时,由于

$$y'=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x\to+0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1+z)e^z+1}{(1+e^z)^2}=\lim_{z\to+\infty}\frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}=\lim_{z\to+\infty}\frac{z+2}{2(1+e^z)}=0,$$

$$\lim_{x\to-0}y'=\lim_{z\to+\infty}\frac{(1-z)e^{-z}+1}{(1+e^{-z})^2}=1,$$

故点(0,0)为角点. 如图 3616 所示.

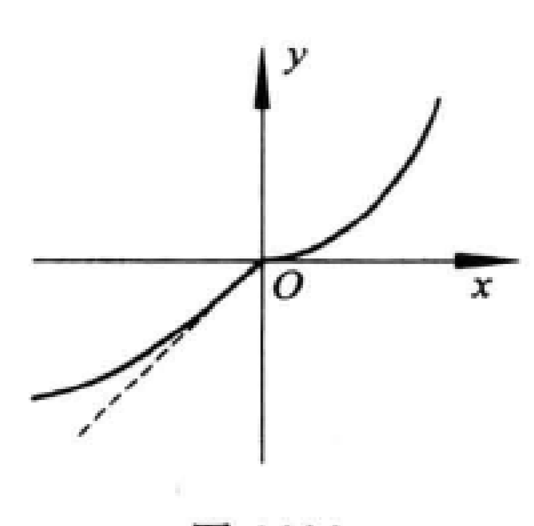


图 3616

§7. 多元函数的极值

1° **极值的定义** 若函数 $f(P)=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 P_0 的邻域内有定义，并且当 $0<\rho(P_0,P)<\delta$ 时，$f(P_0)>f(P)$ 或 $f(P_0)<f(P)$，则说，函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值（相应地为极大值或极小值）. *

2° **极值的必要条件** 可微函数 $f(P)$ 仅在临界点 P_0，即 $\mathrm{d}f(P_0)=0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以，函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=0\ (i=1,\cdots,n)$.

3° **极值的充分条件** 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有：

(1) 极大值，若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$，且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x|\neq 0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$，

(2) 极小值，若 $\mathrm{d}f(P_0)=0$，且当 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x|\neq 0$ 时 $\mathrm{d}^2f(P_0)>0$.

研究二阶微分 $\mathrm{d}^2f(P_0)$ 的符号，可用化相应的二次型为标准形式的方法.

特别是，对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x,y)$，若在临界点 (x_0,y_0) $[\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0]$ 成立条件 $D=AC-B^2\neq 0$，其中 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则那里有：

(1) 极小值，若 $D>0$，$A>0$ $(C>0)$； (2) 极大值，若 $D>0$，$A<0$ $(C<0)$； (3) 极值不存在，若 $D<0$.

4° **条件极值** 在关系式 $\varphi_i(P)=0\ (i=1,\cdots,m;\ m<n)$ 存在的条件下，求函数 $f(P_0)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值的问题，可归结为求拉格朗日函数

$$L(P)=f(P)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(P)$$

[其中 $\lambda_i(i=1,\cdots,m)$ 为常数因子] 的普通极值的问题. 关于条件极值的存在和性质的问题，在最简单的情况下，可根据对函数 $L(P)$ 在临界点 P_0 的二阶微分 $\mathrm{d}^2L(P_0)$ 的符号的研究来解决，此时变量 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 满足以下限制条件：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j=0\quad(i=1,\cdots,m).$$

5° **绝对极值** 在有界闭区域内的可微函数 $f(P)$ 在此区域内或于临界点，或于区域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多元函数的极值：

【3625】 $z=x^2y^3(6-x-y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy^3(12-3x-2y)=0,\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y^2(18-3x-4y)=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(2,3)$. 并且直线 $x=0$ 及直线 $y=0$ 上的点都是临界点.

不难断定在点 P_0，$A=-162$，$B=-108$，$C=-144$，$AC-B^2>0$，故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0)=108$.

在直线 $x=0$ 及 $y=0$ 上的各点均有 $z=0$. 先分析直线 $y=0$ 的情况. 在直线上 $x\neq 0$ 及 $x\neq 6$ 处，$x^2(6-x-y)\neq 0$，在确定点的足够小的邻域内也不变号，但是 y^3 可正可负，因此，函数 z 变号，即在上述情况下没有

---

* 若将不等式 $f(P_0)>f(P)$ [或 $f(P_0)<f(P)$] 换为不等式 $f(P_0)\geqslant f(P)$ [或 $f(P_0)\leqslant f(P)$]，则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值（或弱极小值）.

《题解》作者注

极值. 当 $x=0$ 及 $x=6$ 类似地可判断也无极值.

其次,分析直线 $x=0$ 的情况. 在直线上 $y=0$ 及 $y=6$ 的点的情况类似地可判断无极值,但当 $0<y<6$ 时,$y^3(6-x-y)>0$,且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号. 因此,在足够小的邻域内,$z=x^2y^3\cdot(6-x-y)\geqslant 0$ 也成立,但邻域内任意近处总有 $z=0$ 的点. 于是,对于 $x=0$, $0<y<6$ 的点函数 z 取得弱极小值 $z=0$. 同法可判定,对于直线 $x=0$ 上 $y<0$ 及 $y>6$ 的各点处,函数 z 取得弱极大值 $z=0$.

【3627】 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0,\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,0)$,$P_1(1,1)$ 及 $P_2(-1,-1)$.

在点 P_0 附近,当 $x=y$ 且足够小时,有 $z=2x^4-4x^2<0$;但当 $x=-y$ 时,$z=2x^4>0$,因此,在点 P_0 无极值.

不难断定,在点 P_1 及 P_2 均有 $A=10$, $B=-2$, $C=10$ 及 $AC-B^2=96>0$,故函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 $z=-2$.

【3629】 $z=xy\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ $(a>0,\ b>0)$.

解 考虑函数 $u=z^2=x^2y^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$. 显然 z 的极值均为 u 的极值;且 u 在点(x,y)取得的极值不为零时,z 也在点(x,y)取得极值;u 在点(x,y)取得的极值为零时,情况复杂一些,但对 z 也不难讨论.

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xy^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{a^2}x^3y^2=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2x^2y\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\right)-\dfrac{2}{b^2}x^2y^3=0\end{cases}$$

得临界点 $P_0(0,0)$, $P_1\left(\dfrac{a}{\sqrt3},\dfrac{b}{\sqrt3}\right)$, $P_2\left(-\dfrac{a}{\sqrt3},-\dfrac{b}{\sqrt3}\right)$, $P_3\left(\dfrac{a}{\sqrt3},-\dfrac{b}{\sqrt3}\right)$ 及 $P_4\left(-\dfrac{a}{\sqrt3},\dfrac{b}{\sqrt3}\right)$.

由于 z 在点 P_0 附近变号,所以,$z(P_0)$不是极值.

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=2y^2\left(1-\frac{6x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right),\qquad \frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{6y^2}{b^2}\right),\qquad \frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=4xy\left(1-\frac{2x^2}{a^2}-\frac{2y^2}{b^2}\right).$$

在 P_1,P_2,P_3,P_4 各点,得 $A=-\dfrac{8}{9}b^2$, $B=\pm\dfrac{4}{9}ab$, $C=-\dfrac{8}{9}a^2$, $AC-B^2=\left(\dfrac{64}{81}-\dfrac{16}{81}\right)a^2b^2>0$,

故函数 u 取得极大值. 于是,相应地函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极大值 $z(P_1)=z(P_2)=\dfrac{ab}{3\sqrt3}$;而在点 P_3 及 P_4 取得极小值$z(P_3)=z(P_4)=-\dfrac{ab}{3\sqrt3}$.

【3640】 $z=x+y+4\sin x\sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+4\cos x\sin y=0, & (1)\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+4\sin x\cos y=0. & (2)\end{cases}$$

(2)−(1)得 $\sin(x-y)=0$,故 $x-y=n\pi$;

(2)+(1)得 $\sin(x+y)=-\frac{1}{2}$，故 $x+y=m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}$.

于是，得临界点 $P_0(x_0,y_0)$，其中

$$\begin{cases}x_0=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m+n)\frac{\pi}{2},\\ y_0=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+(m-n)\frac{\pi}{2}.\end{cases}\quad(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

在点 P_0，有

$$\begin{aligned}AC-B^2&=(-4\sin x_0\sin y_0)(-4\sin x_0\sin y_0)-(4\cos x_0\cos y_0)^2\\&=16(\sin x_0\sin y_0-\cos x_0\cos y_0)(\sin x_0\sin y_0+\cos x_0\cos y_0)=-16\cos(x_0+y_0)\cos(x_0-y_0)\\&=-16\cos\left[m\pi-(-1)^m\frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi=-16(-1)^{m+n}\cos\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时，$m+n$ 为偶数，$AC-B^2<0$ 故无极值；当 m 及 n 有不同的奇偶性时，$m+n$ 为奇数，$AC-B^2>0$，故有极值，看 A 的符号决定取得极大值还是极小值. 由于

$$A=-4\sin x_0\sin y_0=2[\cos(x_0+y_0)-\cos(x_0-y_0)]=2\left\{(-1)^m\cos\frac{\pi}{6}-(-1)^n\right\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时，$A<0$，取得极大值；当 m 为偶数及 n 为奇数时，$A>0$，取得极小值. 极值为

$$z(x_0,y_0)=m\pi+\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)(-1)^{m+1}+2(-1)^n.$$

【3643】 $u=x^3+y^2+z^2+12xy+2z$.

解 $\mathrm{d}u=(3x^2+12y)\mathrm{d}x+(2y+12x)\mathrm{d}y+(2z+2)\mathrm{d}z$.

令
$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12y=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y+12x=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z+2=0,$$

得临界点 $P_0(0,0,-1)$ 及 $P_1(24,-144,-1)$.

$$\mathrm{d}^2u=6x\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在点 P_0，有

$$\mathrm{d}^2u=2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}y(\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x),$$

当 $\mathrm{d}z=0$，$\mathrm{d}y>0$ 及 $\mathrm{d}y+12\mathrm{d}x<0$ 时，$\mathrm{d}^2u<0$；而当 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}z$ 均大于零时，$\mathrm{d}^2u>0$. 因此，d^2u 的符号不定，故无极值.

在点 P_1，有

$$\mathrm{d}^2u=144\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2+24\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(12\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2+\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2>0\quad(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\neq0),$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1)=-6913$.

【3647】 $u=\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)\qquad(0\leqslant x\leqslant\pi;\ 0\leqslant y\leqslant\pi;\ 0\leqslant z\leqslant\pi)$.

解 $\mathrm{d}u=[\cos x-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}x+[\cos y-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}y+[\cos z-\cos(x+y+z)]\mathrm{d}z$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=0$，得方程组

$$\begin{cases}\cos x-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos y-\cos(x+y+z)=0,\\ \cos z-\cos(x+y+z)=0.\end{cases}$$

注意到 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$；$0\leqslant z\leqslant\pi$，解之得临界点 $P_0(0,0,0)$，$P_1\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 及 $P_2(\pi,\pi,\pi)$.

在点 P_1，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u&=-\sin x\mathrm{d}x^2-\sin y\mathrm{d}y^2-\sin z\mathrm{d}z^2+\sin(x+y+z)[\mathrm{d}(x+y+z)]^2\\&=-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2<0,\end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_1 取得极大值 $u(P_1)=4$.

由于 P_0 与 P_2 是所考虑区域 $0\leqslant x\leqslant\pi$；$0\leqslant y\leqslant\pi$；$0\leqslant z\leqslant\pi$ 的边界点，故函数在点 P_0 与 P_2 不达极值（根据极值定义，首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义）. 但如果放宽要求，对于边界点，仅将其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念. 今对于点 P_0 及 P_2 的邻域中且属于上述区域的点 (x,y,z)，显然有 $\sin x\geqslant0$，$\sin y\geqslant0$，$\sin z\geqslant0$. 又

$$\begin{aligned}\sin(x+y+z)&=\sin x\cos y\cos z-\sin x\sin y\sin z+\cos x\sin y\cos z+\cos x\cos y\sin z\\&\leqslant\sin x+\sin y+\sin z-\sin x\sin y\sin z,\end{aligned}$$

故 $u\geqslant0$. 而当 $x=y=0$ 时或 $x=y=\pi$ 时都恒有 $u=0$. 因此，函数 u 在点 P_0 及 P_2 都达到弱极小值 $u(P_0)=u(P_2)=0$（按上述边界点达极值的意义）.

【3650】 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使分数

$$u=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值最大.

解题思路 令 $w=\dfrac{1}{u}$ 及 $y_1=\dfrac{x_2}{x_1},y_2=\dfrac{x_3}{x_2},\cdots,y_n=\dfrac{b}{x_n}$，并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$ 及 $m=a+\dfrac{b}{A}$，则

$$w=m(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

从而，问题转化为求函数 w 的极小值. 用微分法可知数 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$ 构成有公比 $\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的等比数列时，函数 u 取得最大值 $\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}$.

解 记 $w=\dfrac{1}{u}=(a+x_1)\left(1+\dfrac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\dfrac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{b}{x_n}\right)$.

设 $y_1=\dfrac{x_2}{x_1},y_2=\dfrac{x_3}{x_2},\cdots,y_n=\dfrac{b}{x_n}$，并记 $A=y_1y_2\cdots y_n$，则有

$$x_1=\frac{b}{y_1y_2\cdots y_n}=\frac{b}{A},\quad w=\left(a+\frac{b}{A}\right)(1+y_1)(1+y_2)\cdots(1+y_n).$$

又记 $m=a+\dfrac{b}{A}$，则有

$$\mathrm{d}w=\sum_{k=1}^{n}\frac{w}{1+y_k}\mathrm{d}y_k-\frac{wb}{mA}\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}=w\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}.$$

令 $\dfrac{\partial w}{\partial y_k}=0$ 得方程组 $\dfrac{y_k}{1+y_k}=\dfrac{b}{mA}$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 解之得临界点 $P_0(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=y_0.$$

在点 P_0，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2w\Big|_{P=P_0}&=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}-\frac{b}{mA}\right)\frac{\mathrm{d}y_k}{y_k}\Big|_{P=P_0}\\&=w\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}\left(\frac{y_k}{1+y_k}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\right)\Big|_{P=P_0}-w\sum_{k=1}^{n}\frac{\mathrm{d}y_k}{y_0}\left[\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+\frac{a}{b}A}\right)\right]\Big|_{P=P_0}\\&=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\frac{w(P_0)}{y_0\left(1+\frac{a}{b}A\right)^2_{P=P_0}}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{d}y_k\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{aA}{by_k}\mathrm{d}y_k\right)\right]_{P=P_0}\\&=\frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k\right)^2\right]>0\quad\left(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{d}y_k^2\neq0\right),\end{aligned}$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值. 从而，函数 u 在

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b}{A}=\dfrac{b}{y_0^n}=\dfrac{b}{a}\,ay_0^{-n}=ay_0^{n+1}y_0^{-n}=ay_0, \\ x_2=x_1y_1=ay_0^2, \\ x_3=x_2y_2=ay_0^3, \\ \quad\vdots \\ x_n=\dfrac{b}{y_n}=\dfrac{b}{a}ay_0^{-1}=ay_0^{n+1}y_0^{-1}=ay_0^n, \end{cases}$$

即数 $a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$,构成有公比 $y_0=\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的等比数列时,其值最大,并且 u 的最大值为

$$u=\frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}}=(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}})^{-(n+1)}$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值:

【3651】 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0.$

解 微分得

$$(x-1)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y+(z-2)\mathrm{d}z=0.$$

显见,当 $x=1,y=-1$,时,$\mathrm{d}z=0$.代入原方程可解得 $z=6$ 及 $z=-2$.又 $z=2$ 时为不可微的.为判断极值,求二阶微分,得

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+(z-2)\mathrm{d}^2z+\mathrm{d}z^2=0.$$

以 $x=1,\ y=-1,\ z=6$,代入,并考虑 $\mathrm{d}z=0$,得

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{1}{4}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)<0\quad(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\neq0),$$

故当 $x=1,y=-1$ 时,隐函数 z 取得极大值 $z=6$.同法可判断得:当 $x=1,\ y=-1$ 时,隐函数 z 取得极小值,且其值为 $z=-2$.

不难看出,$z=2$ 是球的切平面平行于 Oz 轴的地方,因此,函数 z 不取得极值.

求下列函数的条件极值点:

【3656】 $z=x^2+y^2$,若 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$

解 设 $F(x,y)=x^2+y^2+\lambda\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1\right)$.解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+\dfrac{1}{a}\lambda=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+\dfrac{1}{b}\lambda=0, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \end{cases}$$

可得

$$\lambda=-\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\quad x=\frac{ab^2}{a^2+b^2},\quad y=\frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x\to\infty,\ y\to\infty$ 时,$z\to+\infty$,故函数 z 必在有限处取得最小值.这里可疑点仅一个.因此,当 $x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时,函数 z 取得极小值 $z=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

注 如果用二阶微分判别,则易从 $\mathrm{d}^2z=2(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)>0$(不论 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 之间有何约束条件,此式恒成立)可知 $z=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ 为极小值.

【3660】 $u=x^m y^n z^p$,若 $x+y+z=a$ $(m>0,n>0,p>0,a>0)$ *.

解题思路 本题应加上条件 $x>0,y>0,z>0$. 令

$$w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z,\quad F(x,y,z)=w-\frac{1}{\lambda}(x+y+z-a).$$

注意到连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分,当点趋于边界上的点时,显然有 $w\to-\infty$. 因此,函数 w 在区域内取得最大值. 再注意到可疑点仅一个,从而,问题可获解.

解 设 $w=\ln u=m\ln x+n\ln y+p\ln z$, $F(x,y,z)=w-\dfrac{1}{\lambda}(x+y+z-a)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{m}{x}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{n}{y}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=\dfrac{p}{z}-\dfrac{1}{\lambda}=0,\\ x+y+z=a\end{cases}$$

可得

$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}.$$

相应地,$u=\dfrac{a^{(m+n+p)}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$.

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分,边界由三条直线

$$\begin{cases}x+y=a,\\ z=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y+z=a,\\ x=0,\end{cases}\qquad \begin{cases}z+x=a,\\ y=0\end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时,显然有 $w\to-\infty$. 因此,函数 w 在区域内取得最大值. 由于可疑点仅一个,故当

$$x=\frac{am}{m+n+p},\quad y=\frac{an}{m+n+p},\quad z=\frac{ap}{m+n+p}$$

时,函数 u 取得最大值 $u=\dfrac{a^{m+n+p}m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}$,因而也是极大值.

【3667】 $u=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$, 若 $\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}=1$ $(a_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\lambda\left(\dfrac{x_1}{a_1}+\dfrac{x_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{a_n}-1\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=2x_i+\dfrac{\lambda}{a_i}=0\ (i=1,2,\cdots,n),\\ \displaystyle\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{a_i}=1\end{cases}$$

可得临界点 $P_0(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

由于 $d^2u=d^2F=2\displaystyle\sum_{i=1}^n dx_i^2>0$(它不受约束条件的限制),故当 $x_i=\dfrac{1}{a_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}$ 时,函数 u 取得极小值

$$u=\sum_{i=1}^n\left[\frac{1}{a_i}\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}\right]^2=\left(\sum_{j=1}^n\frac{1}{a_j^2}\right)^{-1}.$$

【3671】 若 $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2=1$,求二次型 $u=\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j\,(a_{ij}=a_{ji})$的极值.

---

* 作者注:应加上条件 $x>0,y>0,z>0$.

解 设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, & (1)\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, & (2)\\ \qquad\vdots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial x_n}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0, & (n)\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1. & (n+1)\end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解,必须矩阵(a_{ij})的特征方程$|A-\lambda E|=0$有解,其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵,E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知,此特征方程必有 n 个实根,即有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 满足 $|A-\lambda E|=0$. 对于任一根 λ_k,代人方程(1)~(n),可求得$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的一个解空间,解空间的维数,等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组(1)~($n+1$)的根. 当 λ_k 是单重根时,解空间是一维的,单位元素只有两个. 当 λ_k 是多重根时,对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了.

对于 λ_k 的解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,显然满足方程组(1)~($n+1$). 因此,有 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda_kx_i(i=1,2,\cdots,n)$,从而得

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_kx_i^2=\lambda_k\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_k.$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 上连续,故必取得最大值和最小值. 于是,对应于 λ_1 和 λ_n 的解,分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n,因而也是 u 的极大值和极小值,或是 u 的弱极大值和弱极小值,视 λ_1 和 λ_n 的重数而定(多重时为弱极值). 由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法,可证:对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k,二次型不取得极值.

【3673】 证明赫尔德不等式:

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad\left(a_i\geqslant0,x_i\geqslant0;\ i=1,2,\cdots,n;\ k>1,\frac{1}{k}+\frac{1}{k'}=1\right).$$

提示 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=A\ (A>0)$ 的条件下,求函数 $u=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$ 的最小值.

证 我们首先证明函数
$$u=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$

在条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i=A\ (A>0)$下的最小值是 A. 为此,对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,显然有 $(a_1^k)^{\frac{1}{k}}(x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}}=a_1x_1=A$.

设当 $n=m$ 时,命题成立. 故对任意 m 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_m(a_i\geqslant0)$,当 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_ix_i=A(x_1\geqslant0,\cdots,x_m\geqslant0)$时,必有

$$A\leqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当 $n=m+1$ 时命题也成立. 设 $\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A$, $u=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$,其中 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_i^k$,求 u 的最小值. 令 $F(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})=u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})-\lambda\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i-A\right)$. 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=\dfrac{\alpha^{\frac{1}{k}}}{k'}\left(\sum\limits_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}-1}(k'x_i^{k'-1})-\lambda a_i=0\\ \sum\limits_{i=1}^{m+1}a_ix_i=A\qquad(i=1,2,\cdots,m+1),\end{cases}$$

可得
$$\frac{x^{k'-1}}{a_i}=\frac{\lambda}{\alpha^{\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{m+1}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}=\mu^{k'-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$
(这里引入了记号 μ)，即 $x_i=(a_i\mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}}=a_i^{\frac{1}{k'-1}}\mu=\mu a_i^{k-1}$，从而有
$$\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i\,a_i^{k-1}=\mu\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k=\mu\alpha=A,\qquad \mu=\frac{A}{\alpha}.$$
于是，解得满足极值必要条件的唯一解
$$x_i^0=\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1}\quad(i=1,2,\cdots,m+1).$$
对应的函数值为
$$u_0=u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=\alpha^{\frac{1}{k}}\left[\sum_{i=1}^{m+1}\left(\frac{A}{\alpha}a_i^{k-1}\right)^{k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=\alpha^{\frac{1}{k}}\frac{A}{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{m+1}a_i^{(k-1)k'}\right]^{\frac{1}{k'}}=\alpha^{\frac{1}{k}-1}A\left(\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\right)^{\frac{1}{k'}}$$
$$=A\alpha^{\frac{1}{k}-1}\alpha^{\frac{1}{k'}}=A.$$
所研究的区域 $\sum_{i=1}^{m+1}a_i\,x_i=A$，$x_i\geqslant0(i=1,2,\cdots,m+1)$是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部分，其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面(之一部分)所组成：$x_i=0$，$\sum_{j=1}^{m+1}a_j\,x_j=A$ $(a_j\geqslant0,x_j\geqslant0;\ i=1,2,\cdots,m+1)$ 在这些边界面上，求
$$u(x_1,x_2,\cdots,x_{m+1})=u(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},0,x_{i+1},\cdots,x_{m+1})=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{j=1}^{i-1}x_j^{k'}+\sum_{j=i+1}^{m+1}x_j^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}$$
的最小值变为求 m 个变量的最小值. 以估计 $x_{m+1}=0$，$\sum_{i=1}^{m}a_ix_i=A$ 的最小值为例. 根据数学归纳法假设，注意到 $\alpha=\sum_{i=1}^{m+1}a_i^k\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^k$，即有
$$u(x_1,x_2,\cdots,x_m,0)=\alpha^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{m}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_ix_i=A.$$
因此，u 在边界面上的最小值不小于 A. 由此可知，u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{m+1}^0)=A$，故命题当 $n=m+1$ 时成立. 于是，由数学归纳法可知，
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant A,\tag{1}$$
当 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$，$x_i\geqslant0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时.

下面我们证明赫尔德不等式
$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\quad(a_i\geqslant0,x_i\geqslant0)\tag{2}$$
成立. 事实上，若 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$，则(2)式显然成立；若 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i>0$，令 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=A$，则 $A>0$. 于是，根据不等式(1)知
$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^k\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{k'}\right)^{\frac{1}{k'}}\geqslant A=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\,,$$
故不等式(2)成立. 证毕.

注 赫尔德(Holder)不等式是一个重要而常用的不等式，而且还可推广到一般的形式，证明方法也很多. 例如，可参看 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya 合著的名著“Inequalities”(Second Edition, 1952), Chapter Ⅱ, 2.7～2.8.

【3674】 对于 n 阶行列式 $A=|a_{ij}|$，证明阿达马不等式：

$$A^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right).$$

提示 在关系式 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \ (i=12,\cdots n)$ 存在的条件下，研究行列式 $A=|a_{ij}|$ 的极值.

证 为区别起见，以下用 A 表矩阵 (a_{ij})，$|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$.

考虑函数 $u=|A|=|a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i (i=1,2,\cdots,n)$ 下的极值问题. 其中 $S_i>0 \ (i=1,2,\cdots,n)$.

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集，故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值. 下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件. 设

$$F=u-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 - S_i \right).$$

由于函数 u 是多项式. 当按第 i 行展开时，有

$$u=|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}}=A_{ij}-2\lambda_i a_{ij}=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

得 $a_{ij}=\frac{A_{ij}}{2\lambda_i}$. 当 $i\neq k$ 时，有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij} a_{kj}}{2\lambda_i} = \frac{1}{2\lambda_i} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{kj} = 0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时，行列式不同的两行所对应的向量必直交. 若以 A' 表示 A 的转置矩阵，则由行列式的乘法得

$$u^2=|A'|\cdot|A|=\begin{vmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n} S_i.$$

因此，函数 u 满足极值的必要条件时，必有 $u=\pm\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}$.

显然由于函数 u 在条件 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \ (i=1,2,\cdots,n)$ 下不恒为常数，故

$$u_{\max}=\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}, \quad u_{\min}=-\sqrt{\prod_{i=1}^{n} S_i}.$$

从而，
$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i, \quad 当 \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = S_i \ (i=1,2,\cdots,n) 时. \tag{1}$$

下面我们证明
$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right). \tag{2}$$

若至少有一个 i，使 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2=0$，则 $a_{ij}=0 \ (j=1,2,\cdots,n)$. 从而，$|A|=0$. 于是，不等式(2)显然成立.

若对一切 $i \ (i=1,2,\cdots,n)$，都有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \neq 0$. 令 $S_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$，则 $S_i>0 \ (i=1,2,\cdots,n)$. 于是，根据不等式(1)即得

$$|A|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} S_i = \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right),$$

故不等式(2)成立. 证毕.

求下列函数在指定区域内的上确界(sup)和下确界(inf):

【3675】 $z=x-2y-3$,若 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1$.

解 以 D 表区域 $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x+y\leqslant 1$,它是一个有界闭区域(为一闭三角形),故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值.由于 z 是 x,y 的线性函数,故不存在临界点,因此,最大值与最小值都在 D 的边界上达到.

D 的边界为三条直线段:

$$y=0\ (0\leqslant x\leqslant 1),\quad x=0\ (0\leqslant y\leqslant 1),\quad x+y=1\ (0\leqslant x\leqslant 1);$$

在其上 z 分别变成一元函数:

$$z=x-3\ (0\leqslant x\leqslant 1),\quad z=-2y-3\ (0\leqslant y\leqslant 1),\quad z=3x-5\ (0\leqslant x\leqslant 1).$$

由于这些函数都是一元线性函数,故也无临界点,其最大值与最小值必在此三线段的端点(即点(0,0),点(1,0),点(0,1))达到.由此可知,z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点(0,0),(1,0),(0,1)中达到.

由于 $z(0,0)=-3$, $z(1,0)=-2$, $z(0,1)=-5$,故

$$\sup z=-2\qquad \inf z=-5.$$

【3683】 分解已知正数 a 为 n 个正的因数,使得它们的倒数的和为最小.

提示 由题意,我们应求函数 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$在条件 $a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

解 按题设,我们应求函数 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$在条件 $a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$ 或 $\ln a=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$ $(a>0,x_i>0)$下的极值.

设 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u+\lambda(\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i-\ln a)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_i}=-\dfrac{1}{x_i^2}+\dfrac{\lambda}{x_i}=0 & (i=1,2,\cdots,n),\\ a=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

可得 $x_i=\frac{1}{\lambda}$ $(i=1,2,\cdots,n)$.从而解得

$$x_1^0=x_2^0=\cdots=x_n^0=a^{\frac{1}{n}},\quad u(x_1^2,x_2^0,\cdots,x_n^0)=na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$趋于边界时,至少有一个 $x_i\to 0$,即$\frac{1}{x_i}\to+\infty$,而 $u>\frac{1}{x_i}$,故 $u\to+\infty$.因此,函数 u 必在区域内部取得最小值.于是,将正数 a 分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$时,其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$最小.

【3687】 已知容积为 V 的无盖长方浴盆,当其尺寸怎样时,有最小的表面积?

提示 设浴盆的长、宽、高分别为 x、y、h,由题意,我们应求函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ $(x>0,y>0,h>0)$下的极值.

解 设浴盆长、宽、高分别为 x、y、h,则考虑函数 $S=2(x+y)h+xy$ 在条件 $V=xyh$ $(x>0,y>0,h>0)$下的极值.

设 $F(x,y,h)=S-\lambda(xyh-V)$.解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2h-\lambda yh=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2h-\lambda xh=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial h}=2(x+y)-\lambda xy=0, & (3)\\ xyh=V.\end{cases}$$

(1),(2),(3)可改写为
$$\frac{1}{h}+\frac{2}{y}=\lambda=\frac{1}{h}+\frac{2}{x}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y},$$

故有 $$x_0=y_0=2h_0=\sqrt[3]{2V},\quad h_0=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}=\sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定,一定在某一处达到最小.因此,当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$,高为$\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$时,浴盆的表面积最小,且最小表面积为 $S=3\sqrt[3]{4V^2}$.

从数学上来考虑,应讨论 x,u,h 趋于边界的情况.当 x,y,h 中有任一个趋于零,例如,$h\to+0$,则由 $V=xyh$ 即可断定 $xy\to+\infty$.但是,$S>xy$,故 $S\to+\infty$.当 x,y,h 中有任一个趋于$+\infty$时,一定引起至少有另一个趋于零.重复上面的讨论可知,$S\to+\infty$.因此,连续函数 S 必在区域内部取得最小值.

【3696】 在椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内作出具有最大体积的内接长方体.

解 此长方体的对称中心为原点.设其一个顶点为(x,y,z),按题意,考虑函数 $V=8xyz$ 在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(x>0,y>0,z>0)$下的极值.为计算简单计,略去常数 8.设 $F=xyz-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$.解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz-2\lambda\frac{x}{a^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz-2\lambda\frac{y}{b^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy-2\lambda\frac{z}{c^2}=0,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases}$$

得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$,这时 $V=\frac{8}{3\sqrt{3}}abc>0$.

现在讨论边界情况.当 $x\to a-0,y\to b-0,z\to c-0$ 中有任一个成立时,则另两个变量必皆趋于零;又若 x,y,z 中有一个趋于零时,则体积 V 趋于零.总之,在边界上,恒有 $V\to0$.于是,具有最大体积的长方体的长、宽、高分别为$\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

【3701】 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

提示 设(x_1,y_1)为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2)为直线 $x-y-2=0$ 上任一点.由题意,我们应求函数 $r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ 在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-1=0$ 下的极值.

解 设(x_1,y_1)为抛物线 $y=x^2$ 上任一点,(x_2,y_2)为直线 $x-y-2=0$ 上的任一点.按题意,我们应求函数

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

在条件 $y_1-x_1^2=0$ 及 $x_2-y_2-1=0$ 下的极值.显然,由几何知,当两点(x_1,y_1)和(x_2,y_2)至少有一伸向无穷时,r 也必趋于无穷大,故 r 的最小值必在有限处达到.

设 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)=r^2+\lambda_1(y_1-x_1^2)+\lambda_2(x_2-y_2-2)$.解方程组

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x_1}=-2(x_2-x_1)-2\lambda_1x_1=0,\\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=2(x_2-x_1)+\lambda_2=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y_1}=-2(y_2-y_1)+\lambda_1=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y_2}=2(y_2-y_1)-\lambda_2=0,\\ y_1=x_1^2,\\ x_2-y_2-2=0\end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1=\frac{1}{2}$，$y_1=\frac{1}{4}$；$x_2=\frac{11}{8}$，$y_2=-\frac{5}{8}$.

于是，所求的最短距离为 $r_0=\sqrt{\left(\frac{11}{8}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{7}{8}\sqrt{2}$.

【3704】 求用平面 $Ax+By+Cz=0$ 与柱体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ 相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 $\bar{a}$ 及 $\bar{b}$，即可按公式 $S=\pi\bar{a}\bar{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点(0,0,0)在原椭圆柱面的中心轴上，且截平面 $Ax+By+Cz=0$ 又通过它. 因此，原点是截线椭圆的中心，从而长短半轴 $\bar{a}$ 及 $\bar{b}$ 的平方 $\bar{a}^2$ 及 $\bar{b}^2$，分别为函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $Ax+By+Cz=0$ 及 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F=u+2\lambda(Ax+By+Cz)-\mu\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right).$$

于是，达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}=\left(1-\frac{\mu}{a^2}\right)x+\lambda A=0, & (1)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}=\left(1-\frac{\mu}{b^2}\right)y+\lambda B=0, & (2)\\ \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial z}=z+\lambda C=0, & (3)\\ Ax+By+Cz=0, & (4)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. & (5)\end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x、y、z 后，然后相加，得 $x^2+y^2+z^2=\mu$，即从方程组可解得 $u(x,y,z)=\mu$. 由(1)、(2)、(3)、(4)知，若要 x,y,z 及 λ 不全为零，μ 必须满足下列方程(同时 μ 只要满足下列方程，临界点 (x,y,z) 也一定有解)：

$$\begin{vmatrix}1-\frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A\\ 0 & 1-\frac{\mu}{b^2} & 0 & B\\ 0 & 0 & 1 & C\\ A & B & C & 0\end{vmatrix}=0$$

展开后，得
$$\frac{C^2}{a^2b^2}\mu^2-\left(\frac{B^2}{a^2}+\frac{A^2}{b^2}+\frac{C^2}{a^2}+\frac{C^2}{b^2}\right)\mu+(A^2+B^2+C^2)=0.$$

此方程有两正根. 显然即为最大值及最小值 $\bar{a}^2$、$\bar{b}^2$. 由韦达定理知

$$\bar{a}^2\bar{b}^2=\frac{a^2b^2(A^2+B^2+C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积 $\pi\bar{a}\bar{b}=\frac{\pi ab\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}$　$(C\neq 0)$.

当 $C=0$ 时，平面 $Ax+By=0$ 过 Oz 轴，显然得不到椭圆截面.

【3706】 根据费马原理，光在最短时间内从一点传播到另一点.

假定点 A 和点 B 位于交界面为平面的不同的光介质中，并且光的传播速度在第一种介质中等于 v_1，而在第二种介质中等于 v_2，试推出光的折射定律.

解 如图 3706 所示，光线从点 A 射出，沿着折线 AMB 到达点 B. 由 A、B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD，并与直线 l 交于点 C 及点 D. 设 $AC=a$，$BD=b$，$CD=d$. 选择角度 α，β 为变量，则

$$AM=\frac{a}{\cos\alpha},\qquad BM=\frac{b}{\cos\beta},\qquad CM=a\tan\alpha,\qquad MD=b\tan\beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha,\beta)=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_2\cos\beta}$$

在条件 $a\tan\alpha+b\tan\beta=d$ 下的最小值，其中 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$，（当 M 在 C 与 D 之间时，$\alpha>0$，$\beta>0$；当 M 在点 C 的左边时，$\alpha<0$，$\beta>0$；当 M 在点 D 的右边时 $\alpha>0$，$\beta<0$）. 显然 $f(\alpha,\beta)$ 是连续函数；又当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}-0$ 时（这时点 M 从右边伸向无穷远，$\beta\to-\frac{\pi}{2}+0$），显然 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$；当 $\alpha\to-\frac{\pi}{2}+0$ 时（这时点 M 从左边伸向无穷远，$\beta\to\frac{\pi}{2}-0$），显然也有 $f(\alpha,\beta)\to+\infty$. 由此可知 $f(\alpha,\beta)$ 在有限处达到最小值，此处必为临界点. 设

$$F=\frac{a}{v_1\cos\alpha}+\frac{b}{v_1\cos\beta}-\lambda(a\tan\alpha+b\tan\beta-d)$$

注意到由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\alpha}=\dfrac{a\sin\alpha}{v_1\cos^2\alpha}-\dfrac{\lambda a}{\cos^2\alpha}=0,\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\beta}=\dfrac{b\sin\beta}{v_2\cos^2\beta}-\dfrac{\lambda b}{\cos^2\beta}=0,\end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin\alpha}{v_1}=\lambda,\qquad\frac{\sin\beta}{v_2}=\lambda.$$

于是，在临界点必满足

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

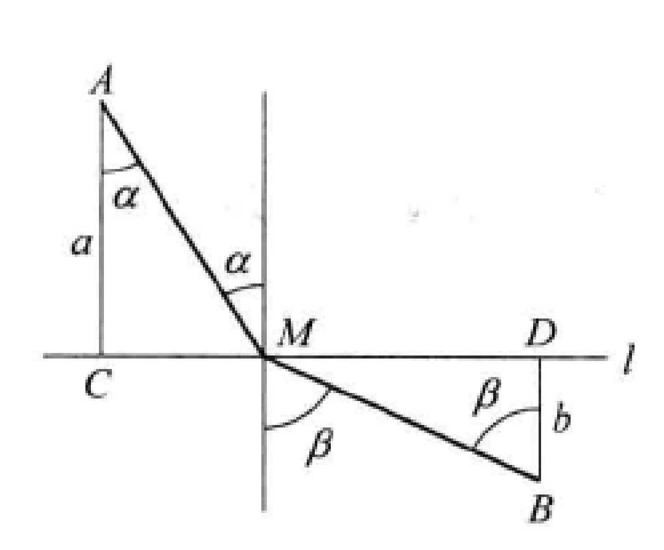


图 3706

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系. 这就是著名的光线折射定律. 此时，由点 A 到点 B 的光线传播所需要的时间最短.

【3707】 一折射棱镜的折射角为 α，折射率为 n. 光线以怎样的入射角射向此棱镜侧面，其偏向角（即入射线与出射线之间的角）为最小？求此最小偏向角.

解 如图 3707 所示，ABC 为棱镜. $\angle BAC=\alpha$ 为棱镜顶角（即棱镜的折射角），DE 为入射光线，折射后从 F 点折射出棱镜，射出线为 FG. IH 和 JH 分别为入射点和射出点的法线，它们相交于 H（$IH\perp AC$，$JH\perp AB$）. 入射线 DE 的延长线 DM 与射出线的反向延长线 FL 交于 K.

令 $\angle DEI=\beta$，$\angle GFJ=\gamma$，$\angle GKM=\delta$，$\angle HEF=\lambda$，$\angle EFH=\mu$.

按题意即问：当 β 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 之间的一定范围内变化时，δ 何时达到最小值. 这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题.

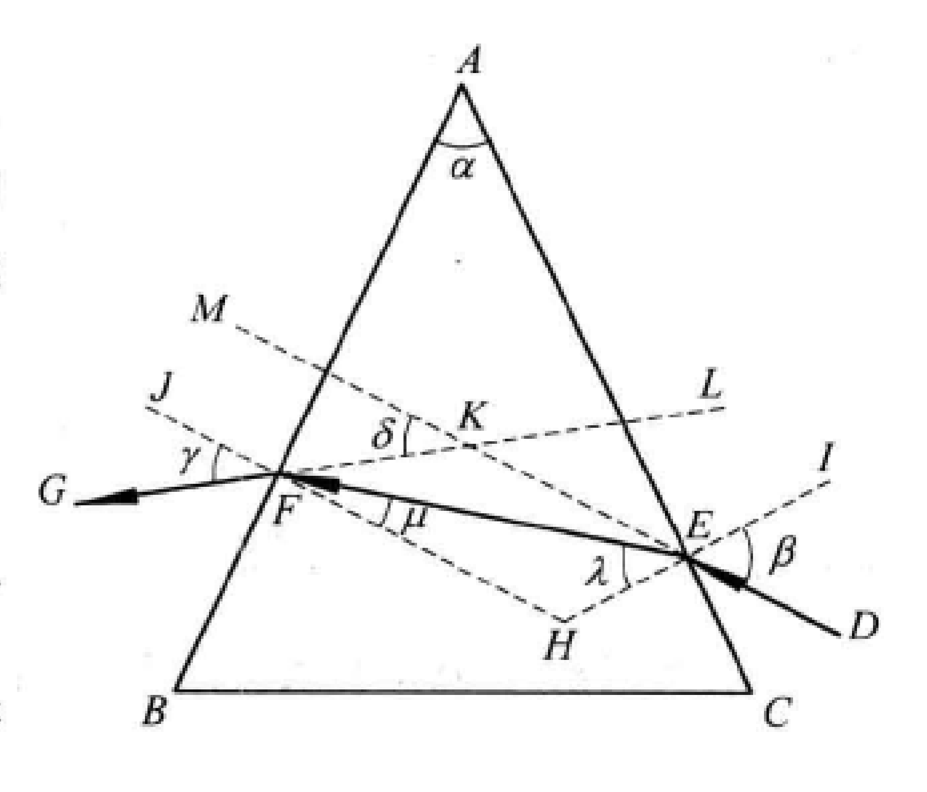


图 3707

由折射定律（3706 题）可知：

$$\sin\beta=n\sin\lambda,\tag{1}$$

$$\sin\gamma=n\sin\mu.\tag{2}$$

由几何关系不难求出 α、β、γ、δ、λ 及 μ 之间的关系：

$$\lambda+\mu=\alpha\tag{3}$$

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha.\tag{4}$$

由于 α 为常数，故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去 λ、μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta,\gamma,\lambda,\mu)=\beta+\gamma-\alpha+k_1(\sin\beta-n\sin\lambda)+k_2(n\sin\mu-\sin\gamma)+k_3(\lambda+\mu-\alpha).$$

临界点适合下列方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \beta}=1+k_1\cos\beta=0, & (5) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \gamma}=1-k_2\cos\gamma=0, & (6) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-k_1 n\cos\lambda+k_3=0, & (7) \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}=k_2 n\cos\mu+k_3=0. & (8) \end{cases}$$

由(7)、(8)消去 k_3，得
$$k_1\cos\lambda=-k_2\cos\mu. \tag{9}$$

由(5)、(6)得 $k_1=-\dfrac{1}{\cos\beta}$，$k_2=\dfrac{1}{\cos\gamma}$，代入(9)，两边平方，即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta}=\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma} \quad 或 \quad \frac{1-\sin^2\lambda}{1-\sin^2\beta}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-\sin^2\gamma}. \tag{10}$$

将(1)、(2)代入(10)，得
$$\frac{1-\sin^2\lambda}{1-n^2\sin^2\lambda}=\frac{1-\sin^2\mu}{1-n^2\sin^2\mu},$$

整理后得
$$(n^2-1)(\sin^2\lambda-\sin^2\mu)=0.$$

由于 $0<\lambda<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\mu<\dfrac{\pi}{2}$，故 $\sin\lambda=\sin\mu$ 或 $\lambda=\mu$. 代入(3)，得 $\lambda=\mu=\dfrac{\alpha}{2}$. 从而，$\beta=\gamma=\arcsin(n\sin\dfrac{\alpha}{2})$. 于是，

$$\delta=\beta+\gamma-\alpha=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的临界点.

根据物理知识，作为本题所讨论的对象：顶角较小的分光棱镜，在区域内确实存在着最小的折射. 于是，当入射角

$$\beta=\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

时，则

$$\delta=2\arcsin\left(n\sin\frac{\alpha}{2}\right)-\alpha$$

应为最小偏向角. 至于作其他用途的各种棱镜，光线的折射路径不仅与顶角有关，而且大部分与整个棱镜的构造有关，这已不属于本题所考虑的对象，因而，也不再对它们进行讨论.

【3710】 在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$ 来近似地代替函数 x^2，使得绝对偏差

$$\Delta=\sup|x^2-(ax+b)| \quad (1\leqslant x\leqslant 3)$$

为最小.

解 考虑函数

$$u(a,b)=\Delta^2=\sup_{1\leqslant x\leqslant 3}[x^2-(ax+b)]^2, \quad f(x,a,b)=x^2-(ax+b).$$

由于 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x-a$，故当固定 a,b 时，$f(x,a,b)$ 只在 $x=\dfrac{a}{2}$ 处达到极值 $f(\dfrac{a}{2},a,b)$. 当限制 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时，只有当 $2<a<6$ 时，$f(x,a,b)$ 才可能在 $1<x<3$ 内部达到极值. 于是，

$$u(a,b)=\begin{cases} \max\left\{f^2(1,a,b), f^2(3,a,b), f^2\left(\dfrac{a}{2},a,b\right)\right\}, & 2<a<6, \\ \max\{f^2(1,a,b), f^2(3,a,b)\}, & a\leqslant 2 \text{ 或 } a\geqslant 6. \end{cases}$$

从上式得知，对一切 (a,b) 均有 $u(a,b)>0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1，Ω_2 及 Ω_3，使得

$$u(a,b)=\begin{cases} f^2(1,a,b)=(1-a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_1, \\ f^2(3,a,b)=(9-3a-b)^2, & (a,b)\in\Omega_2, \\ f^2\left(\dfrac{a}{2},a,b\right)=\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right)^2, & (a,b)\in\Omega_3, \end{cases} \quad 2<a<6.$$

由于 $u(a,b)>0$，不难看出 $u(a,b)$ 在区域 $\Omega_i(i=1,2,3)$ 内部均无临界点. 再看区域边界的状况. 以 Ω_1 及 Ω_3 的边界为例. 根据 $u(a,b)$ 的连续性，即知在边界上有 $u(a,b)=(1-a-b)^2$，且满足条件

$$(1-a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点. 设

$$F(a,b)=(1-a-b)^2+\lambda\left[(1-a-b)^2-\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2\right],$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial a}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-\lambda a\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right),\\ \dfrac{\partial F}{\partial b}=-2(1+\lambda)(1-a-b)-2\lambda\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right).\end{cases}$$

使$\frac{\partial F}{\partial a}=0$，$\frac{\partial F}{\partial b}=0$ 且满足条件 $1-a-b\neq0$，$\frac{a^2}{4}+b\neq0$ 的点没有.

同法可证：在 Ω_1，Ω_2 及 Ω_2，Ω_3 的边界上也无临界点，但是，$u(a,b)$一定在区域内达到最小值. 因此，只能在 Ω_1，Ω_2，Ω_3 的边界交点上取得最小值，即在满足方程

$$(1-a-b)^2=(9-3a-b)^2=\left(\frac{a^2}{4}+b\right)^2 \tag{1}$$

的点(a,b)上取得最小值. 方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases}1-a-b=9-3a-b=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & (2)\\ 1-a-b=9-3a-b=\dfrac{a^2}{4}+b, & (3)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=-\left(\dfrac{a^2}{4}+b\right), & (4)\\ 1-a-b=-(9-3a-b)=\dfrac{a^2}{4}+b. & (5)\end{cases}$$

方程组(2)无解.

方程组(3)的解为 $a=4$，$b=-\frac{7}{2}$. 对应的 $\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为 $a=2$，$b=1.$，对应的 $\Delta=2$.

方程组(5)的解为 $a=6$，$b=-7$，对应的 $\Delta=2$.

综上所述，可知：在区间$(1,3)$内，用线性函数 $4x-\frac{7}{2}$ 来近似地代替函数 x^2，即可使绝对偏差 Δ 为最小，且 $\Delta_{\min}=\frac{1}{2}$.

第七章　带参数的积分

§1. 带参数的常义积分

1° **积分的连续性**　若函数 $f(x,y)$ 在有界区域 $R[a\leqslant x\leqslant A;\ b\leqslant y\leqslant B]$ 内有定义并且是连续的，则

$$F(y)=\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

是在闭区间 $b\leqslant y\leqslant B$ 上的连续函数.

2° **积分符号下的微分法**　若除在 1° 中所列的条件之外，并且偏导数 $f'_y(x,y)$ 在区域 R 内连续，则当 $b<y<B$ 时成立莱布尼茨公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^A f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

在更一般的情况下，当积分的下限和上限为参数 y 的可微函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$，并且当 $b<y<B$ 时 $a\leqslant\varphi(y)\leqslant A$，$a\leqslant\psi(y)\leqslant A$，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x=f[\psi(y),y]\psi'(y)-f[\varphi(y),y]\varphi'(y)+\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x,y)\,\mathrm{d}x\qquad(b<y<B).$$

3° **积分符号下的积分法**　在 1° 的条件下有

$$\int_b^B \mathrm{d}y\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^A \mathrm{d}x\int_b^B f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

【3711】　证明：不连续函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 的积分

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

为连续函数. 作出函数 $u=F(y)$ 的图像.

证明思路　当 $-\infty<y<0$ 时，$F(y)=1$；当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(y)=1-2y$；当 $1<y<+\infty$ 时，$F(y)=-1$. 由于

$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=\lim_{y\to-0}1=1$$

及 $F(0)=1$. 因此，$F(y)$ 在点 $y=0$ 处连续. 同理可证 $F(y)$ 在点 $y=1$ 处连续. 于是，函数 $F(y)$ 在 $-\infty<y<+\infty$ 内连续. $u=F(y)$ 的图像如图 3711 所示.

证　当 $-\infty<y<0$ 时，$F(y)=\int_0^1 1\cdot\mathrm{d}x=1$；

当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$F(y)=\int_0^y(-1)\,\mathrm{d}x+\int_y^1 1\cdot\mathrm{d}x=1-2y$；

当 $1<y<+\infty$ 时，$F(y)=\int_0^1(-1)\,\mathrm{d}x=-1$.

由于



$$\lim_{y\to+0}F(y)=\lim_{y\to+0}(1-2y)=1,\quad \lim_{y\to-0}F(y)=1$$

且 $F(0)=1$，即有

$$F(+0)=F(-0)=F(0),$$

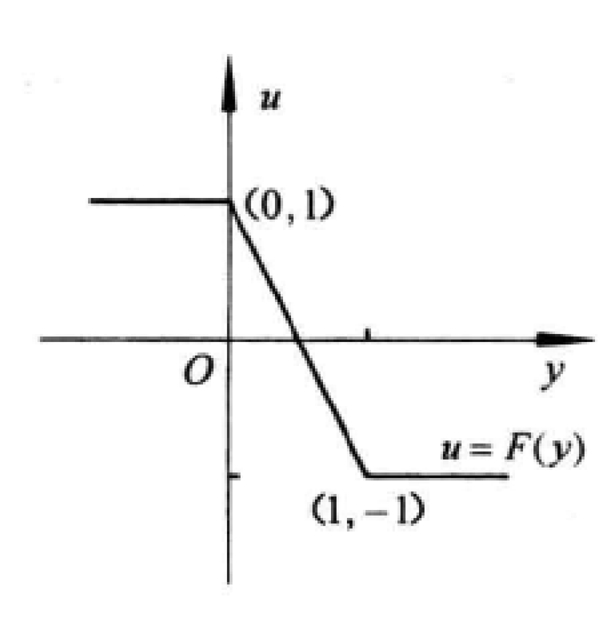


图 3711

故 $u=F(y)$ 当 $y=0$ 时为连续的.

同法可证 $u=F(y)$ 当 $y=1$ 时为连续的. 当 $y\neq 0$，$y\neq 1$ 时，$u=F(y)$ 显然连续. 于是，$u=F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图 3711 所示.

【3713】 求：(1) $\lim\limits_{\alpha\to0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$.

解 (1) 因为$\dfrac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，$\alpha$，$1+\alpha$都是$\alpha$的连续函数，故含参变量$\alpha$的积分$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$是$-\infty<\alpha<+\infty$上的连续函数，因此，

$$\lim_{\alpha\to0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to0}F(\alpha)=F(0)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

(4) 考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\leqslant x\leqslant1,0<y\leqslant1,\\[2mm] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & 0\leqslant x\leqslant1,y=0.\end{cases}$$

由$\lim\limits_{u\to+0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$易知$f(x,y)$是$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$上的连续函数.从而，积分$F(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$是$0\leqslant y\leqslant1$上的连续函数，因此，$\lim\limits_{y\to+0}F(y)=F(0)$，从而，更有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}F\left(\frac{1}{n}\right)=F(0)=\int_0^1 f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^1=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

【3714】 设函数$f(x)$在闭区间$[A,B]$上连续.证明：

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=f(x)-f(a)\quad(A<a<x<B).$$

证明思路 *只要注意$f(x)$在$[A,B]$上连续，故它在$[A,B]$上存在原函数$F(x)$，即$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$F'(x)=f(x)$ $(A\leqslant x\leqslant B)$.将所要证明等式左端的极限用函数$F(x)$表出，即易获证.*

证 由于$f(x)$在$[A,B]$上连续，故在$[A,B]$上存在原函数$F(x)$.于是，

$$\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]\mathrm{d}t=\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}[F(x+h)-F(a+h)-F(x)+F(a)]$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a).$$

【3716】 当$y=0$时，可否根据莱布尼茨法则计算函数

$$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

的导数？

提示 *当$y=0$时，不能在积分号下求导数，就是求右导数或左导数也不行.*

解 不能.事实上，我们有：当$y\neq0$时，

$$F(y)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=x\ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\sqrt{1+y^2}-\int_0^1\left(1-\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\sqrt{1+y^2}-1+y\arctan\frac{1}{y}.$$

又有 $$F(0)=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{d}x=-1.$$

由此可知

$$F'_+(0)=\lim_{y\to+0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to+0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=\frac{\pi}{2},$$

$$F'_-(0)=\lim_{y\to-0}\frac{F(y)-F(0)}{y}=\lim_{y\to-0}\left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y}+\arctan\frac{1}{y}\right]=-\frac{\pi}{2},$$

故 $F'(0)$不存在.

另一方面,当 $x>0$ 时, $$\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\bigg|_{y=0}=\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=0}\equiv 0,$$

故 $$\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\bigg|_{y=0}\mathrm{d}x=0.$$

由此可知,当 $y=0$ 时不能在积分号下求导数,就是求右导数或求左导数也不行,因为

$$F'_+(0)=\frac{\pi}{2}\neq 0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\bigg|_{y=0}\mathrm{d}x,\quad F'_-(0)=-\frac{\pi}{2}\neq 0=\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial y}\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)\bigg|_{y=0}\mathrm{d}x.$$

【3718】 设:(4) $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(x+\alpha,x-\alpha)\mathrm{d}x$; (5) $F(\alpha)=\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y$,求 $F'(\alpha)$.

解 (4)设 $u=x+\alpha,\ v=x-\alpha$,则 $F(\alpha)=\int_0^\alpha f(u,v)\mathrm{d}x$. 于是,

$$\begin{aligned}F'(\alpha)&=f(2\alpha,0)+\int_0^\alpha[f'_u(u,v)-f'_v(u,v)]\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^\alpha[f'_u(u,v)+f'_v(u,v)]\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u,v)\mathrm{d}x\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}\\&=f(2\alpha,0)+2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x-[f(2\alpha,0)-f(\alpha,-\alpha)]\\&=f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^\alpha f'_u(u,v)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$$(5)F'(\alpha)=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\sin(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\Big\{\sin[x^2+(x+\alpha)^2-\alpha^2]-\sin[x^2+(x-\alpha)^2-\alpha^2](-1)\\&\quad+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\Big\}\mathrm{d}x\\&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+\int_0^{\alpha^2}\left\{\sin(2x^2+2\alpha x)+\sin(2x^2-2\alpha x)+\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}(-2\alpha)\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x\\&=2\alpha\int_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin(\alpha^4+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y+2\int_0^{\alpha^2}\sin2x^2\cos2\alpha x\mathrm{d}x-2\alpha\int_0^{\alpha^2}\mathrm{d}x\int_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos(x^2+y^2-\alpha^2)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

【3720】 设 $F(x)=\int_a^b f(y)\,|x-y|\,\mathrm{d}y$,其中 $a<b$ 及 $f(y)$为可微函数,求 $F''(x)$.

提示 分别就 $x\in(a,b)$及 $x\,\overline{\in}\,(a,b)$两种情况求解.

解 当 $x\in(a,b)$时,由于

$$F(x)=\int_a^x(x-y)f(y)\mathrm{d}y+\int_x^b(y-x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x(x-y)f(y)\mathrm{d}y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x(y-x)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_a^x\frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]\mathrm{d}y-\int_b^x\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y=\int_a^x f(y)\mathrm{d}y+\int_b^x f(y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

当 $x\,\overline{\in}\,(a,b)$时,例如 $x\leqslant a$,则 $F(x)=\int_a^b(y-x)f(y)\mathrm{d}y$,故有

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y=-\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,\quad F''(x)=0;$$

同理,对于 $x\geqslant b$ 也可得 $F''(x)=0$. 总之,

$$F''(x)=\begin{cases}2f(x), & x\in(a,b),\\ 0, & x\overline{\in}(a,b).\end{cases}$$

【3725】 求完全椭圆积分 $$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

及 $$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\quad(0<k<1)$$

的导数,并把它们用函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 表示出来.

证明:$E(k)$满足微分方程 $$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

提示 注意 $E'(k)=\dfrac{E(k)-F(k)}{k}$ 及 $F'(k)=-\dfrac{F(k)}{k}+\dfrac{E(k)}{k(1-k^2)}$.

解 $$E'(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-k^2\sin^2\varphi-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi\right]-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E(k)-F(k)}{k}.\tag{1}$$

$$F'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k\sin^2\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-k^2\sin^2\varphi)-1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

我们易证 $$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1-k^2}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}-\frac{k^2}{1-k^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}[\sin\varphi\cos\varphi(1-k^2\sin\varphi)^{-\frac{1}{2}}]$$

故有 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{1-k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi.$$

于是,

$$F'(k)=-\frac{F(k)}{k}+\frac{E(k)}{k(1-k^2)}.\tag{2}$$

由(1)式,对 k 再求导数,并注意到(2)式,即得

$$E''(k)=\frac{[E'(k)-F'(k)]k-[E(k)-F(k)]}{k^2}=\frac{\left[\dfrac{E(k)-F(k)}{k}+\dfrac{F(k)}{k}-\dfrac{E(k)}{k(1-k^2)}\right]k-kE'(k)}{k^2}$$

$$=-\frac{E(k)}{1-k^2}-\frac{E'(k)}{k},$$

即 $$E''(k)+\frac{E'(k)}{k}+\frac{E(k)}{1-k^2}=0.$$

应用对参数的微分法,计算下列积分:

【3733】 $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x.$

解题思路 令 $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x.$

当 $|a|<1$ 时,可在积分号下求导数,并利用 2028 题(1)的结果,易得 $I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时,令 $b=\dfrac{1}{a}$,可得 $I(a)=2\pi\ln|a|$.

当 $|a|=1$ 时,利用 2353 题(1)的结果,可得 $I(a)=0$.

解 设 $I(a)=\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x$. 当 $|a|<1$ 时,由于

$$1-2a\cos x+a^2\geqslant 1-2|a|+a^2=(1-|a|)^2>0,$$

故 $\ln(1-2a\cos x+a^2)$ 为连续函数且具有连续导数,从而可在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数,得

$$I'(a)=\int_0^\pi \frac{-2\cos x+2a}{1-2a\cos x+a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^\pi\left(1+\frac{a^2-1}{1-2a\cos x+a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{(1+a^2)-2a\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{a}-\frac{1-a^2}{a(1+a^2)}\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\cos x}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\arctan\left(\frac{1+a}{1-a}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi\,*)}=\frac{\pi}{a}-\frac{2}{a}\ \frac{\pi}{2}=0.$$

于是,当 $|a|<1$ 时,$I(a)=C$(常数). 但是,$I(0)=0$,故 $C=0$. 从而,$I(a)=0$.

当 $|a|>1$ 时,令 $b=\frac{1}{a}$,则 $|b|<1$,并有 $I(b)=0$. 于是,我们有

$$I(a)=\int_0^\pi \ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)\mathrm{d}x=I(b)-2\pi\ln|b|=-2\pi\ln|b|=2\pi\ln|a|.$$

当 $|a|=1$ 时,有

$$I(1)=\int_0^\pi \ln2(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi\left(\ln4+2\ln\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\ln2+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t=2\pi\ln2+4\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)^{**)}=0;$$

同法可求得 $I(-1)=0$.

综上所述,故知 $$\int_0^\pi \ln(1-2a\cos x+a^2)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & |a|\leqslant 1,\\ 2\pi\ln|a|, & |a|>1.\end{cases}$$

*) 利用 2028 题(1)的结果.

**) 利用 2353 题(1)的结果.

【3737】 应用积分号下的积分法,计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$$

解 首先注意,因为

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=0,\quad \lim_{x\to1-0}\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to1-0}\frac{bx^{b-1}-ax^{a-1}}{x^{-1}}=\lim_{x\to1-0}(bx^b-ax^a)=b-a,$$

故 $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$ 不是广义积分,并且,如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0,在 $x=1$ 时的值为 $b-a$,则可理解为 $[0,1]$ 上连续函数的积分. 由于

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

(注意,$x=0$ 时左端规定为 0,$x=1$ 时右端规定为 $b-a$),而函数 x^y 在 $0\leqslant x\leqslant 1$, $a\leqslant y\leqslant b$ 上连续(不妨设 $a<b$),故有

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

【3739】 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分(参阅习题 3725). 证明公式:

(1) $\int_0^k F(k)k\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k)$;　　(2) $\int_0^k E(k)k\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]$,

其中 $k_1^2=1-k^2$.

证明思路 利用 3725 题的结果,可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'=kF(k)\quad 及\quad \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'=kE(k),$$

从而,公式(1)及(2)可获证.

证 (1)利用 3725 题的结果,可得

$$[E(k)-k_1^2F(k)]'=E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)$$

$$=\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]=kF(k).$$

于是，$$E(k)-k_1^2F(k)=\int_0^k kF(k)\mathrm{d}k+C,$$

其中 C 为常数. 但当 $k=0$ 时，上式左端为 $E(0)-F(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$，而右端等于 C，故 $C=0$. 最后证得

$$\int_0^k kF(k)\mathrm{d}k=E(k)-k_1^2F(k).$$

(2) 由于

$$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]'=\frac{1}{3}[2kE(k)+(1+k^2)E'(k)+2kF(k)-(1-k^2)F'(k)]$$

$$=\frac{1}{3}\left\{2kE(k)+(1+k^2)\frac{E(k)-F(k)}{k}+2kF(k)-(1-k^2)\left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}\right]\right\}=kE(k),$$

故 $$\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)]=\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k+C,$$

以 $k=0$ 代入上式，得 $C=0$. 于是，最后证得

$$\int_0^k kE(k)\mathrm{d}k=\frac{1}{3}[(1+k^2)E(k)-k_1^2F(k)].$$

§2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1° **一致收敛性的定义** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, y_1<y<y_2$ 内是连续的. 若对于任何 $\varepsilon>0$，都存在数 $B=B(\varepsilon)$，使得在 $b\geqslant B$ 的条件下有

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{1}$$

在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛.

积分(1)的一致收敛与形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(其中 $a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$) 的一切级数的一致收敛等价.

若积分(1)在区间 (y_1,y_2) 中一致收敛，则在这个区间内它是参数 y 的**连续函数**.

2° **柯西准则** 积分(1)在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛的充分必要条件为：对于任何 $\varepsilon>0$，存在数 $B=B(\varepsilon)$，使得只要 $b'>B$ 及 $b''>B$，则

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad (y_1<y<y_2).$$

3° **魏尔斯特拉斯准则.** 积分(1)一致收敛的充分条件为：存在与参数 y 无关的强函数 $F(x)$，使得

(1) 当 $a\leqslant x<+\infty$ 时 $|f(x,y)|\leqslant F(x)$， (2) $\int_a^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x<+\infty$.

4° 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域：

【3742】 $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x.$

解 首先注意
$$\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'=\frac{(1-p)x^p+(1-q)x^q}{(x^p+x^q)^2}.$$

若 $\max(p,q)>1$,则显然当 x 充分大时 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'<0$,从而,当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的,并且很明显,这时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^p+x^q}=0$. 又因 $\left|\int_\pi^A\cos x\mathrm{d}x\right|=|\sin A|\leqslant 1$ (对任何 $A>\pi$),故知 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛.

若 $\max(p,q)\leqslant 1$,则恒有 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)'\geqslant 0$,故函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x\geqslant\pi$ 上是递增的. 于是,对于任何正整数 n,有
$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x>\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}}\frac{x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\ \frac{\pi}{\pi^p+\pi^q}\ \frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)}=\text{常数}>0,$$
故不满足柯西收敛准则,因此,积分 $\int_\pi^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$ 发散.

【3744】 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$.

解题思路 先考虑积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$,并利用 2362 题的结果. 再考虑积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$,由 $\lim\limits_{x\to1+0}(x-1)^p\frac{1}{\ln^p x}=1$ 可知积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^p}$ 有相同的敛散性. 综合上述两个积分的结果即可求得原积分的收敛域.

解 考虑积分
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)}=\int_0^1\ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$
利用 2362 题的结果即知:它当 $-p>-1$ 或 $p<1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$. 由于
$$\lim_{x\to1+0}(x-1)^p\frac{1}{\ln^p x}=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right]^p=\left[\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x^{-1}}\right]^p=1.$$
故积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性,而后者显然当 $p<1$ 时收敛,$p\geqslant 1$ 时发散,从而,前者亦然.

于是,仅当 $p<1$ 时,积分 $\int_0^2\frac{\mathrm{d}x}{|\ln x|^p}$ 收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

【3747】 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$.

解 设 $a>0$. 我们证明:对任何数列
$$0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots(a_n\to+\infty)$$
级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x$ 都收敛. 事实上,有
$$\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x+a}\bigg|_{a_n}^{a_{n+1}}+\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x$$
故
$$\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x=\frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a}-\frac{\sin a_m}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+p}}\frac{\sin x}{(x+a)^2}\mathrm{d}x.$$
从而,
$$\left|\sum_{n=m}^{m+p-1}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\int_{a_m}^{a_{m+1}}\frac{\mathrm{d}x}{(x+a)^2}$$

$$=\frac{1}{a_{m+p}+a}+\frac{1}{a_m+a}+\left(\frac{1}{a_m+a}-\frac{1}{a_{m+p}+a}\right)=\frac{2}{a_m+a},$$

由此可知，满足柯西收敛准则，从而，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛.

若 $a=0$，显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散，故广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx$ 发散.

下设 $a<0$. 若 $a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+\int_{(n+1)\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx=\int_0^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x+a}dx+(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}}dt.$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\cos x}{x+a}=(-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛(它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为连续函数的积分)；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 收敛.

若 $a<0$ 但 $a\neq-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$，此时 $\cos(-a)\neq0$. 由连续性，可取 $\delta>0$，使当 $-a\leqslant x\leqslant -a+\delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且 $|\cos x|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|$. 于是，

$$\left|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx\right|\geqslant\frac{1}{2}|\cos(-a)|\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{dx}{x+a}=+\infty.$$

由此可知，瑕积分 $\int_{-a}^{-a+\delta}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 发散. 从而，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 更是发散.

综上所述，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{x+a}dx$ 仅当 $a>0$ 及 $a=-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$ 时收敛.

【3752】 证明：若(ⅰ)积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；(ⅱ)函数 $\varphi(x,y)$ 有界，且关于 x 是单调的，则积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$ 一致收敛(在对应区域内).

证 设 $|\varphi(x,y)|\leqslant L$，则由题设(ⅰ)知：对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在数 $B=B(\varepsilon)$，使当 $A'>A>B$ 时，就有不等式

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L}. \tag{1}$$

由积分第二中值定理知：存在 $\xi\in[A,A']$，使有下述等式

$$\int_A^{A'}f(x)\varphi(x,y)dx=\varphi(A+0,y)\cdot\int_A^{\xi}f(x)dx+\varphi(A'-0,y)\cdot\int_{\xi}^{A'}f(x)dx. \tag{2}$$

由(1)式，得

$$\left|\int_A^{\xi}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L},\qquad\left|\int_{\xi}^{A'}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由(2)式，可得

$$\left|\int_A^{A'}f(x)\varphi(x,y)dx\right|<L\,\frac{\varepsilon}{2L}+L\,\frac{\varepsilon}{2L}=\varepsilon,$$

即积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\varphi(x,y)dx$ 在对应的 y 区域内一致收敛.

【3754】 证明：积分 $$I=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

(1) 在任何区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 内一致收敛;

(2) 在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 内非一致收敛.

证 显然,积分 I 对于每一个定值 $\alpha\geqslant 0$ 是收敛的. 事实上,当 $\alpha=0$ 时,$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=0$;当 $\alpha>0$ 时,

$$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=-e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

(1) 如果 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$,则由于 $0<\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha A}\leqslant e^{-aA}$,故对于任给的 $\varepsilon>0$,可以找到不依赖于 α 的数 $A_0=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{\varepsilon}$,使当 $A>A_0$ 时,就有 $\int_A^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx<e^{-aA_0}=\varepsilon$. 于是,在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上积分 I 一致收敛.

(2) 如果 $0\leqslant\alpha\leqslant b$,则不存在这样的数 A_0. 事实上,取 $0<\varepsilon<1$ 就办不到. 由于当 $\alpha\to+0$ 时,$e^{-A\alpha}\to 1$,故对于足够小的 α 值,$e^{-A\alpha}$ 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大. 因此,在区间 $0\leqslant\alpha\leqslant b$ 上,积分 I 对 α 的收敛是不一致的.

【3755】 证明:狄利克雷积分 $$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

(1) 在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛,

(2) 在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a,b]$ 上非一致收敛.

证 不失一般性,我们只考虑 α 的正值.

(1) 由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}$ 是收敛的,故对于任给的 $\varepsilon>0$,存在数 A_0,使当 $A>A_0$ 时,恒有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\right|<\varepsilon.$$

当 $\alpha>0$ 时,由于 $\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz$,故取 $A>\frac{A_0}{a}$,对于 $\alpha\geqslant a>0$,就有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx\right|<\varepsilon.$$

于是,在区间 $0<a\leqslant\alpha\leqslant b$ 上,积分 I 是一致收敛的.

(2) 对于任何的 $A>0$,当 $\alpha\to+0$ 时,

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\int_{A\alpha}^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\to\int_0^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz=\frac{\pi}{2}.$$

因此,当 $\alpha>0$ 且充分小时,有 $$\int_A^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx>\frac{\pi}{4}.$$

于是,在区间 $0\leqslant a\leqslant b$ $(b>0)$ 上,积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

【3760】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

提示 注意 $x=0$ 不是瑕点. 利用狄利克雷判别法或柯西准则.

解 首先注意,因为 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}e^{\alpha x}=1$. 故 $x=0$ 不是瑕点.

由于 $\left|\int_0^A\sin x dx\right|=|1-\cos A|\leqslant 2$,而当 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 时,函数 $\frac{e^{-\alpha x}}{x}$ 在 $x>0$ 关于 x 递减,并且当 $x\to+\infty$ 时它关于 $\alpha(0\leqslant\alpha<+\infty)$ 一致趋于零(因为 $0\leqslant\alpha<+\infty$,$x>0$ 时,$0<\frac{e^{-\alpha x}}{x}\leqslant\frac{1}{x}$),故由狄利克雷判别法知,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-\alpha x}dx$ 在 $0\leqslant\alpha<+\infty$ 上一致收敛.

【3762】 $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx\quad(0\leqslant\alpha<+\infty)$.

提示 注意此积分是收敛的而不一致收敛.

解 此积分是收敛的.事实上,当 $\alpha=0$ 时,积分为零;当 $\alpha>0$ 时,设 $\sqrt{\alpha}x=t$,则得

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是,此积分却不一致收敛.事实上,对于任何的 $A>0$,由于

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_{\sqrt{\alpha}A}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故对于 $0<\varepsilon_0<\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,必存在 $\alpha_0>0$,使有

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{\alpha_0}e^{-\alpha_0x^2}dx>\varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的.

【3766】 $\int_0^1x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$,(1)$p\geqslant p_0>0$;(2)$p>0\ (q>-1)$.

解 注意到 $x=0$ 和 $x=1$ 都可能是瑕点.作代换 $x=e^{-t}$,得

$$\int_0^1x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=-\int_{+\infty}^0e^{-(p-1)t}t^qe^{-t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^qdt,$$

右端的积分当 $p>0(q>-1)$ 时是收敛的*),从而,左端的积分此时也收敛.更由于($\varepsilon,\varepsilon'>0$ 很小)

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon'}x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx=\int_{\ln\frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln\frac{1}{\varepsilon}}e^{-pt}t^qdt,$$

故 $\int_0^1x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^qdt$ 的一致收敛性.

(1) 当 $p\geqslant p_0>0$ 时,由于

$$0<e^{-pt}t^q\leqslant e^{-p_0t}t^q\quad(0<t<+\infty)$$

而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-p_0t}t^q$ 收敛,故积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^qdt$ 一致收敛(对于 $p\geqslant p_0>0$).从而,原积分 $\int_0^1x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p\geqslant p_0>0$ 时一致收敛.

(2) 对任何 $A>0,p>0$,作代换 $pt=s$,则

$$\int_A^{+\infty}e^{-pt}t^qdt=\frac{1}{p^{q+1}}\int_{pA}^{+\infty}s^qe^{-s}ds,$$

由于 $q>-1$,故积分 $\int_0^{+\infty}s^qe^{-s}ds$ 收敛,且显然

$$0<\int_0^{+\infty}s^qe^{-s}ds<+\infty,$$

于是,有

$$\lim_{p\to+0}\int_A^{+\infty}e^{-pt}t^qdt=+\infty,$$

由此即知,积分 $\int_0^{+\infty}e^{-pt}t^qdt$ 在 $p>0$ 上非一致收敛.从而,原积分 $\int_0^1x^{p-1}\ln^q\frac{1}{x}dx$ 当 $p>0$ 时非一致收敛.

*) 利用 2361 题的结果(在其中作代换 $pt=s$).

【3772】 在下式中

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

把极限移到积分号内合理吗?

解题思路 不合理.这是因为积分 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b\ (b>0)$ 不一致收敛(3754 题(2)的结果),故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理.对于本题,实际上也不能交换.

解 不合理.事实上,由 3754 题(2)的结果知,积分 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 对 $0\leqslant\alpha\leqslant b\ (b>0)$ 的收敛并非一致,故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理.对于本题,实际上也不能交换,这是由于

$$\int_0^{+\infty}(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x})dx=0,$$

而
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx=\lim_{\alpha\to+0}(-e^{-\alpha x})\Big|_0^{+\infty}=1,$$

故得
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx\neq\int_0^{+\infty}(\lim_{\alpha\to+0}\alpha e^{-\alpha x})dx.$$

【3773】 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内可积分,证明公式:

$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

证 容许有有限个瑕点.为叙述简单起见,例如,设只有一个瑕点 $x=0$.已知积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛且被积函数中不含有 α,故它关于 α 一致收敛.又因函数 $e^{-\alpha x}$ 对于固定的 $0\leqslant\alpha\leqslant1$,关于 $x(x>0)$ 是递减的,并且一致有界:$0<e^{-\alpha x}\leqslant1(0\leqslant\alpha\leqslant1,x>0)$,故根据阿贝尔判别法知,$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1$ 上一致收敛.于是,对于任给的 $\varepsilon>0$,可取 $\eta>0,A_0>0\ (\eta<A_0)$,使

$$\left|\int_0^{\eta}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5},\qquad\left|\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{5}\quad(0\leqslant\alpha\leqslant1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[\eta,A_0]$ 上常义可积,故有界,即存在常数 M_0 使 $|f(x)|\leqslant M_0(\eta\leqslant x\leqslant A_0)$.再根据二元函数 $e^{-\alpha x}$ 在 $0\leqslant\alpha\leqslant1,\eta\leqslant x\leqslant A_0$ 上的一致连续性知,必存在 $\delta>0(\delta<1)$,使当 $0<\alpha<\delta$ 时,对一切 $\eta\leqslant x\leqslant A_0$,皆有 $0\leqslant1-e^{-\alpha x}<\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}$.于是,当 $0<\alpha<\delta$ 时,恒有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{+\infty}f(x)dx\right|\\=&\left|\int_{\eta}^{A_0}(e^{-\alpha x}-1)f(x)dx+\int_{A_0}^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_{A_0}^{+\infty}f(x)dx+\int_0^{\eta}e^{-\alpha x}f(x)dx-\int_0^{\eta}f(x)dx\right|\\<&M_0A_0\frac{\varepsilon}{5A_0M_0}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由此可知,
$$\lim_{\alpha\to+0}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

【3774】 若 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内绝对可积,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx dx=0.$$

证 由 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的绝对可积性可知:对于任给的 $\varepsilon>0$,存在 $A>0$,使有

$$\int_A^{+\infty}|f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,
$$\left|\int_0^{+\infty}f(x)\sin nx dx\right|\leqslant\left|\int_0^{A}f(x)\sin nx dx\right|+\frac{\varepsilon}{3}.$$

先设 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 中无瑕点.我们在 $[0,A]$ 中插入分点 $0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{m-1}<t_m=A$,并设 $f(x)$ 在 $[t_{k-1},t_k]$ 上的下确界为 m_k,则有

$$\int_0^{A}f(x)\sin nx dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}f(x)\sin nx dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[f(x)-m_k]\sin nx dx+\sum_{k=1}^{m}m_k\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin nx dx,$$

从而有

$$\left|\int_0^{A}f(x)\sin nx dx\right|\leqslant\sum_{k=1}^{m}w_k\Delta t_k+\sum_{k=1}^{m}|m_k|\frac{|\cos nt_{k-1}-\cos nt_k|}{n}\leqslant\sum_{k=1}^{m}w_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|,$$

其中 w_k 为 $f(x)$ 在区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上的振幅,$\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上可积，故可取某一分法，使有

$$\left|\sum_{k=1}^{m} w_k \Delta t_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法，$\sum_{k=1}^{m}|m_k|$ 为一定值，因而存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，对于上述所选取的 N，当 $n>N$ 时，

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right| \leqslant \left|\int_0^{A} f(x)\sin nx\,dx\right|+\left|\int_A^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} w_k\Delta t_k+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{m}|m_k|+\int_A^{+\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

其次，设 $f(x)$ 在区间 $[0,A]$ 中有瑕点. 为简便起见，不妨设只有一个瑕点，且为 0. 于是，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使有

$$\int_0^{\eta}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

但是，$f(x)$ 在 $[\eta,A]$ 上无瑕点，故应用上述结果可知：存在 N，使当 $n>N$ 时，恒有

$$\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx\right|\leqslant\int_0^{\eta}|f(x)|\,dx+\left|\int_{\eta}^{A} f(x)\sin nx\,dx\right|+\int_A^{+\infty}|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

总之，当 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内绝对可积，不论 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有无瑕点，均可证得

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin nx\,dx=0.$$

研究下列函数在所指定区间内的连续性：

【3780】 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$，当 $\alpha>0$.

解题思路 由狄利克雷判别法易知，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$ 对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛. 从而，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续. 由 $\alpha_0>0$ 的任意性即知，$F(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时连续.

解 对于任何 $A>1$，均有
$$\left|\int_1^{A}\cos x\,dx\right|\leqslant 2.$$

而函数 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $x\geqslant1,\alpha>0$ 关于 x 单调递减，且由

$$0<\frac{1}{x^{\alpha}}\leqslant\frac{1}{x^{\alpha_0}}\quad(x\geqslant1,\alpha\geqslant\alpha_0>0)$$

知：当 $x\to+\infty$ 时 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致趋于零. 因此，由狄利克雷判别法知，积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}\,dx$$

对 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 一致收敛. 于是，函数 $F(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时连续. 由 $\alpha_0>0$ 的任意性，故知 $F(\alpha)$ 当 $\alpha>0$ 时连续.

§3. 广义积分号下的微分法和积分法

1° **对参数的微分法** 若1)函数 $f(x,y)$ 及其导数 $f'_y(x,g)$ 在区域 $a\leqslant x<+\infty, y_1<y<y_2$ 内是连续的;2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛;3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\mathrm{d}x$ 在区间 (y_1,y_2) 内一致收敛,则当 $y_1<y<y_2$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

(莱布尼茨法则).

2° **对参数积分的公式** 若1)函数 $f(x,y)$ 当 $x\geqslant a$ 及 $y_1\leqslant y\leqslant y_2$ 时是连续的; 2) $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在有限区间 (y_1,y_2) 内一致收敛,则

$$\int_{y_1}^{y_2}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若 $f(x,y)\geqslant 0$,同时假定等式(1)中两个内侧的积分连续,并且等式(1)的一端有意义,则公式(1)对于无穷区间 (y_1,y_2) 也正确.

【3784】 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\quad(n>0),$$

计算积分 $I=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x$, 其中 m 为正整数.

解题思路 首先,注意当 $0<x\leqslant 1, n\geqslant n_0>0$ 时, $|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x$,利用2362题的结果及魏尔斯特拉斯准则,可知积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x$ 对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛,

从而, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x$ 对 $n\geqslant n_0$ 成立. 由 $n_0>0$ 的任意性可知,上式对任意 $n>0$ 均成立.

其次,利用数学归纳法,可得 $\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x$.

最后,可得 $\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}$.

解 $\frac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}=x^{n-1}\ln x$ ($n>0$ 为任意实数). 积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x \tag{1}$$

对于 $n\geqslant n_0>0$ 为一致收敛. 事实上,当 $0<x\leqslant 1, n\geqslant n_0>0$ 时,

$$|x^{n-1}\ln x|\leqslant -x^{n_0-1}\ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1}\ln x\mathrm{d}x$ 显然收敛*). 因此,由魏尔斯特拉斯准则即知,积分(1)对 $n\geqslant n_0>0$ 一致收敛. 于是,积分

$$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x$$

对参数 $n\geqslant n_0$ 求导数时,积分号与导数符号可交换,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^{n-1}}{\mathrm{d}n}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln x\mathrm{d}x.$$

由 $n_0>0$ 的任意性知,上式对任意 $n>0$ 均成立.

同理对 n 逐次求导数,也可在积分号下求导数,即

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}n^2}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(x^{n-1}\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$$

$$\vdots$$

由数学归纳法，可得 $$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}n^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x.$$

但是，$\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\ (n>0)$，故有

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得 $$\int_0^1 x^{n-1}\ln^m x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

*） 利用 2362 题的结果.

【3787】 证明：函数 $$F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x$$

在区域 $-\infty<\alpha<+\infty$ 内连续并且可微.

证 设 α_0 为 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点. 记 $M=\max(|\alpha_0-1|,|\alpha_0+1|)$，则当 $x>M,\alpha\in(\alpha_0-1,\alpha_0+1)$ 时，恒有

$$\left|\frac{\cos x}{1+(x-\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+(x-M)^2},\qquad\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\right|=\left|\frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|\leqslant\frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+(x-M)^2}$ 收敛，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\mathrm{d}x\quad 及\quad\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}x$$

在 (α_0-1,α_0+1) 内一致收敛. 从而，$F(\alpha)$ 在 (α_0-1,α_0+1) 内连续且可微，且可在积分号下求导数. 由 α_0 的任意性知，$F(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续且可微.

【3789】 证明傅茹兰公式：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,b>0),$$

式中 $f(x)$ 为连续函数，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 对任何的 $A>0$ 都有意义.

证 对任何的 $A>0$，有

$$\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_A^{+\infty}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_A^{+\infty}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{Aa}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\int_{Ab}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t=\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{\mathrm{d}t}{t}=f(\xi)\ln\frac{b}{a}\quad(Aa<\xi<Ab).$$

当 $A\to+0$ 时，$\xi\to+0$. 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的连续性，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用傅茹兰公式，计算积分：

【3792】 $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0).$

解 令 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上连续.

由于 $f(x)>0$ 且（利用洛必达法则）

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1,$$

故对任何 $A>0$，积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 都收敛. 因此，由傅茹兰公式，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan ax\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan bx\right)}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a},$$

故
$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分：

【3793】 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0,\beta>0).$

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\alpha xe^{-\alpha x^2}+2\beta xe^{-\beta x^2}}{1}=0,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 又由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}}-\frac{x}{e^{\beta x^2}}\right)=0,$$

故对任何 $\alpha>0,\beta>0$ 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx$ 都收敛. 今将 $\beta>0$ 固定，而把所求积分视为含参变量 $\alpha(\alpha>0)$ 的积分，即令

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha>0).$$

而
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)dx=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx.$$

下证右端积分在 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛. 事实上，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$，$0\leqslant x<+\infty$ 时，$0\leqslant xe^{-\alpha x^2}\leqslant xe^{-\alpha_0 x^2}$，而积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha_0 x^2}dx=\frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛，故积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 在 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时一致收敛. 因此，当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时，可在积分号下对参数求导数：

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx=-\frac{1}{2\alpha}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知，上式对一切 $\alpha>0$ 皆成立. 积分之，得

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+C \quad (0<\alpha<+\infty),$$

其中 C 为待定的常数. 在此式中令 $\alpha=\beta$，并注意到

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\beta x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=0,$$

即得 $0=I(\beta)=-\frac{1}{2}\ln\beta+C$，由此知 $C=\frac{1}{2}\ln\beta$. 于是，

$$I(\alpha)=-\frac{1}{2}\ln\alpha+\frac{1}{2}\ln\beta=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0),$$

即
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha>0,\beta>0).$$

注 本题中，实际应考察积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(x,\alpha)dx$，其中

$$f(x,\alpha)=\begin{cases}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}, & 0<x<+\infty,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

易知 $f(x,\alpha)$ 是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数（$\beta>0$ 固定）. 我们证明：

$$f'_\alpha(x,\alpha)=-xe^{-\alpha x^2}\quad(0\leqslant x<+\infty,0<\alpha<+\infty).$$

事实上，当 $0<x<+\infty$ 时，此式显然成立. 由于 $f(0,\alpha)\equiv 0\ (0<\alpha<+\infty)$，故 $f'_\alpha(0,\alpha)=0\ (0<\alpha<+\infty)$. 因此，上式当 $x=0$ 时也成立. $f'_\alpha(x,\alpha)$ 显然是 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha<+\infty$ 上的连续函数.

在以下许多题中，我们都应作此理解，但不必写出 $f(x,\alpha)$. 函数 $\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x,\alpha)$（$x=0$ 时规定其函数值为其极限值 0），而公式

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}\right)=-xe^{-\alpha x^2}$$

当 $x=0$ 时也成立（如上述）. 这样，才严格符合莱布尼茨法则（积分号下求导数）的条件.

另外，本题若利用逐次积分来作可更简单一些. 今作如下：易知（不妨设 $\alpha<\beta$）

$$\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}=\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx$ 当 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 时一致收敛（因为 $0\leqslant xe^{-yx^2}\leqslant xe^{-\alpha x^2}$，而 $\int_0^{+\infty}xe^{-\alpha x^2}dx$ 收敛），故可交换积分次序，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2}dy=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}xe^{-yx^2}dx=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{2y}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

【3803】 从公式 $I^2=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty}xe^{-x^2y^2}dy$ 出发，计算欧拉—泊松积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

解 在积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 中令 $x=ut$，其中 u 为任意正数，即得

$$I=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2}du$，再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分，得

$$I^2=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2t^2}dt.\qquad(1)$$

由于被积函数 $ue^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负的连续函数，并且积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2(1+t^2)}\quad\text{及}\quad\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udt=e^{-u^2}I$$

分别对于 t 及 u 是连续的，积分互换后的逐次积分显然存在. 于是，(1)式中的积分顺序可以互换*)，并且有

$$I^2=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-(1+t^2)u^2}udu=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}.$$

由于 $I>0$，故

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 483 目定理Ⅴ的系理.

利用欧拉—泊松积分，求下列积分：

【3804】 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx\quad(a>0,ac-b^2>0)$*).

解题思路 注意 $ax^2+2bx+c=\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]$，令 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax+b)=t$，并利用 3803 题的结果，即可获解.

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2}dx=e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-t^2}dt$

$$=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-ac}{a}}.$$

*) 只要假定 $a>0$，条件 $ac-b^2>0$ 可去掉.

【3809】 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解 令 $I(b)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x$. 由于 $e^{-ax^2}\cos bx$ 与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2}\cos bx)=-xe^{-ax^2}\sin bx$ 都是 $x\geqslant 0$, $-\infty<b<+\infty$ 上的连续函数,并且此时

$$|e^{-ax^2}\cos bx|\leqslant e^{-ax^2}, \qquad |xe^{-ax^2}\sin bx|\leqslant xe^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\mathrm{d}x$ 都收敛,故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x$ 都在 $-\infty<b<+\infty$ 上一致收敛,从而可在积分号下求导数,得

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x \quad (-\infty<b<+\infty).$$

利用分部积分法,得

$$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}\sin bx\mathrm{d}x=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\sin bx\Big|_0^{+\infty}+\frac{b}{2a}\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{b}{2a}I(b),$$

故 $I'(b)=-\frac{b}{2a}I(b)$ $(-\infty<b<+\infty)$. 于是,

$$\int\frac{I'(b)}{I(b)}\mathrm{d}b=-\frac{1}{2a}\int b\mathrm{d}b,$$

即
$$\ln I(b)=-\frac{b^2}{4a}+C \quad (-\infty<b<+\infty),$$

其中 C 是待定常数,也即
$$I(b)=C_1e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty<b<+\infty),$$

其中 C_1 也是待定常数. 但

$$I(0)=\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

代入,得 $C_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是,最后得

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}\cos bx\mathrm{d}x=I(b)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty<b<+\infty).$$

【3812】 从积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 出发,计算狄利克雷积分 $D(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$.

解 先设 $\beta>0$,将 β 固定,α 视为参变量. 仿 3760 题的证法,可知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant 0$ 时一致收敛,从而,$I(\alpha)$ 是 $\alpha\geqslant 0$ 上的连续函数(注意,上述积分中 $x=0$ 不是瑕点,因为 $\lim\limits_{x\to+0}e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}=\beta$). 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$ 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$ 时一致收敛(因为此时 $|e^{-\alpha x}\sin\beta x|\leqslant e^{-\alpha_0 x}$,而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛),故知当 $\alpha\geqslant\alpha_0$ 时,积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$ 可在积分号下求导数,得

$$I'(\alpha)=-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

由 $\alpha_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $0<\alpha<+\infty$ 皆成立. 两端对 α 积分,得

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+C \ (0<\alpha<+\infty), \tag{1}$$

其中 C 是某常数. 由 $|\sin u|\leqslant|u|$ 知

$$|I(\alpha)|\leqslant\beta\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\alpha} \quad (0<\alpha<+\infty),$$

由此可知 $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)=0$. 在(1)式两端令 $\alpha\to+\infty$ 取极限，得 $0=-\frac{\pi}{2}+C$，故 $C=\frac{\pi}{2}$. 于是，

$$I(\alpha)=-\arctan\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\pi}{2}\quad(0<\alpha<+\infty).\tag{2}$$

在(2)式两端令 $\alpha\to+0$ 取极限，并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha\geqslant0$ 时连续，即得

$$D(\beta)=I(0)=\lim_{\alpha\to+0}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta<0$ 时，$D(\beta)=-D(-\beta)=-\frac{\pi}{2}$. 又显然有 $D(0)=0$. 综上所述，有

$$D(\beta)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\beta.$$

利用狄利克雷积分和傅茹兰积分，求下列积分：

【3816】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x$.

提示 注意 $\sin^3\alpha x=\frac{3}{4}\sin\alpha x-\frac{1}{4}\sin3\alpha x$，并利用 3812 题的结果.

解 由于 $\sin3\alpha x=3\sin\alpha x-4\sin^3\alpha x$，故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{3\sin\alpha x-\sin3\alpha x}{4x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha.$$

*) 利用 3812 题的结果.

【3818】 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3\mathrm{d}x$.

提示 两次使用分部积分法，并利用 3812 题及 3816 题的结果.

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin^3\alpha x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{2x^2}\sin^3\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{3\alpha}{2x}\sin^2\alpha x\cos\alpha x\Big|_0^{+\infty}+\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x\cos^2\alpha x-\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha\sin\alpha x}{x}\mathrm{d}x-\frac{3\alpha}{2}\int_0^{+\infty}\frac{3\alpha\sin^3\alpha x}{x}\mathrm{d}x=3\alpha^2\cdot\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\frac{9}{2}\alpha^2\cdot\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\alpha^{*)}\\&=\frac{3\pi}{8}\alpha^2\operatorname{sgn}\alpha=\frac{3\pi}{8}\alpha|\alpha|.\end{aligned}$$

*) 利用 3816 题的结果.

【3835】 对于函数 $f(t)$，求拉普拉斯变换

$$F(p)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\mathrm{d}t\quad(p>0).$$

设：(6) $f(t)=\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$.

解 (6) $F(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$.

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}=1$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{t}=0$，故函数 $\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}$ 有界：

$$0<\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\leqslant M=\text{常数}\quad(0<t<+\infty).$$

由此可知，当 $p>0$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-pt}\frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ 收敛，并且

$$0<F(p)\leqslant M\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\frac{M}{p}\quad (0<p<+\infty). \tag{1'}$$

再考虑积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}\left(e^{-pt}\frac{1-e^{-t}}{t}\right)dt=\int_0^{+\infty} e^{-pt}(e^{-t}-1)dt=\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t}dt-\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad (p>0),$$

它对 $p\geqslant p_0>0$ 是一致收敛的. 因此,当 $p\geqslant p_0$ 时,可对函数$F(p)$应用莱布尼茨法则,得

$$F'(p)=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p}\quad (当\ p\geqslant p_0\ 时),$$

由 $p_0>0$ 的任意性知,上式对一切 $p>0$ 均成立. 两端积分,得

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}+C\quad (0<p<+\infty), \tag{2'}$$

其中 C 是某常数. 由(1′)式知,

$$\lim_{p\to+\infty}F(p)=0.$$

于是,在(2′)式两端令 $p\to+\infty$,取极限,得 $C=0$. 由此可知

$$F(p)=\ln\frac{p+1}{p}=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

【3839】 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}}d\xi\quad (\sigma_1>0,\sigma_2>0).$$

解 注意到

$$\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}+\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}=\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}[(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2-2\sigma_1^2x\xi+\sigma_1^2x^2],$$

并令

$$a=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\quad b=-\frac{\sigma_1^2x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},\quad c=\frac{\sigma_1^2x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2},$$

即得

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)}d\xi=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\ ^{*)}$$

将 a,b,c 的表达式代入上式,并令 $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$,化简整理得

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用 3804 题的结果.

§4. 欧拉积分

1° **Γ 函数** 当 $x>0$ 有:

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Γ一函数的基本性质由下面的递推公式表达: $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

若 n 为正整数,则

$$\Gamma(n)=(n-1)!;\quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

2° **延拓公式** 当 x 不等于整数时有:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

此公式可用来求自变量为负值的 Γ 函数.

3° **B 函数** 当 $x>0$ 及 $y>0$ 时有:

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

成立公式
$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

【3841】 证明：Γ 函数 $\Gamma(x)$ 在区域 $x>0$ 内连续，并且有各阶连续导数.

证
$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,$$

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$0<t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{x_0-1}\mathrm{e}^{-t}(0<t<1)$，而 $\int_0^1 t^{x_0-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛，故 $\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $x\geqslant x_0$ 时一致收敛；又当 $x\leqslant x_1$ 时，$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\leqslant t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}(t\geqslant1)$，而 $\int_1^{+\infty} t^{x_1-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛，故当 $x\leqslant x_1$ 时 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 一致收敛. 由此可知，积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 因此，$\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上连续. 由 x_0 及 $x_1(x_1>x_0>0)$ 的任意性，即知 $\Gamma(x)$ 在整个区域 $x>0$ 上连续.

考虑积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

当 $x\geqslant x_0>0$ 时，$|t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}|\leqslant t^{x_0-1}|\ln t|(0<t\leqslant1)$，而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}|\ln t|\mathrm{d}t$ 收敛（这是因为 $\lim\limits_{t\to+0} t^{1-\frac{x_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}|\ln t|=\lim\limits_{x\to+0}(-t^{\frac{x_0}{2}}\ln t)=0$），故积分 $\int_0^1 t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $x\geqslant x_0>0$ 时一致收敛. 同样，当 $x\leqslant x_1$ 时，$|t^{x-1}\cdot\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}|\leqslant t^{x_1}\mathrm{e}^{-t}(t\geqslant1)$，这是因为 $t\geqslant1$ 时 $0\leqslant\ln t<t$，而积分 $\int_1^{+\infty} t^{x_1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 因此，积分 $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ 当 $0<x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 时一致收敛. 由此可知 $\Gamma(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ 上具有连续导数 $\Gamma'(x)$，且可在积分号下求导数，得
$$\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln t\cdot\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$
由 x_0,x_1 的任意性可知，$\Gamma'(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且(1)式对一切 $x>0$ 皆成立.

完全类似地，可证 $\Gamma''(x)$ 在 $x>0$ 上连续，且可在(1)式积分号下求导数. 一般地，由数学归纳法可知，对任何正整数 n，$\Gamma^{(n)}(x)$ 在 $x>0$ 上都存在连续，并且可在积分号下求导数，得
$$\Gamma^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^n\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\quad(x>0).$$

【3842】 证明：B 函数 $\mathrm{B}(x,y)$ 在区域 $x>0,y>0$ 内连续，并且有各阶连续导数.

证 由于当 $x\geqslant x_0>0,y\geqslant y_0>0$ 时，恒有
$$0<t^{x-1}(1-t)^{y-1}\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}\quad(0<t<1),$$
而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}$ 收敛，故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ 在 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 上一致收敛，从而，$\mathrm{B}(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0,y\geqslant y_0$ 上的二元连续函数. 由 $x_0>0,y_0>0$ 的任意性知，$\mathrm{B}(x,y)$ 在整个区域 $x>0,y>0$ 上连续.

考虑积分
$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}[t^{x-1}(1-t)^{y-1}]\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t.$$
由于当 $x\geqslant x_0>0,y\geqslant y_0>0$ 时，恒有
$$|t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t|\leqslant t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|\quad(0<t<1),$$
而积分 $\int_0^1 t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|\mathrm{d}t$ 收敛

（因为 $\lim\limits_{t\to+0} t^{1-\frac{x_0}{2}}t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim\limits_{t\to+0} t^{\frac{x_0}{2}}\ln t=0$，

$$\lim_{t\to 1-0}(1-t)^{1-\frac{y_0}{2}}\cdot t^{x_0-1}(1-t)^{y_0-1}|\ln t|=-\lim_{t\to 1-0}(1-t)^{\frac{y_0}{2}}\ln t=0),$$

故积分 $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t$ 当 $x\geqslant x_0, y\geqslant y_0$ 时一致收敛. 因此，当 $x\geqslant x_0, y\geqslant y_0$，时可在积分号下对 x 求导数，得

$$\mathrm{B}'_x(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln t\mathrm{d}t, \tag{1}$$

并且 $\mathrm{B}'_x(x,y)$ 是 $x\geqslant x_0, x\geqslant y_0$ 上的连续函数. 由 $x_0>0, y_0>0$ 的任意性知，(1)式对一切 $x>0, y>0$ 皆成立，并且$\mathrm{B}'_x(x,y)$是区域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数. 同理可证 $\mathrm{B}'_y(x,y)$ 是区域 $x>0, y>0$ 上的二元连续函数，并且 $x>0, y>0$ 时，可在积分号下对 y 求导数，得

$$\mathrm{B}'_y(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ln(1-t)\mathrm{d}t.$$

完全类似地，利用数学归纳法，可证$\frac{\partial^n \mathrm{B}(x,y)}{\partial x^i\partial y^{n-i}}$在区域 $x>0, y>0$ 上存在连续，并且

$$\frac{\partial^n \mathrm{B}(x,y)}{\partial x^i\partial y^{n-i}}=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(\ln t)^i[\ln(1-t)]^{n-i}\mathrm{d}t.$$

利用欧拉积分计算下列积分：

【3843】 $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x.$

解 $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(3)}=\frac{\left[\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2!}.$

由于
$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi,$$

故 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. 于是，$\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}.$

【3845】 $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$

提示 令$\frac{x}{1+x}=t$.

解 设$\frac{x}{1+x}=t$，则 $x=\frac{t}{1-t}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$，代入即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

【3848】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x.$

提示 令 $\sin x=t$ 后，再令 $t=\sqrt{u}$.

解 设 $t=\sin x$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\sqrt{u}$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{5}{2}}(1-u)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$
$$=\frac{1}{2}\,\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{5!}=\frac{3\pi}{512}.$$

【3850】 $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$ （n 为正整数）.

提示 令 $x=\sqrt{t}$.

解 $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} t^{\frac{2n-1}{2}}e^{-t}dt=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}=\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}.$

求下列积分的存在域，并用欧拉积分表示这些积分：

【3851】 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ （$n>0$）.

提示 令 $x^n=t$ 后，再令 $\frac{t}{1+t}=u$，易知积分的存在域为 $0<m<n$，且结果为 $\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$.

解 令 $x^n=t$，再令 $\frac{t}{1+t}=u$，即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m-n}{n}}}{1+t}dt=\frac{1}{n}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}-1}(1-u)^{\frac{n-m}{n}-1}du,$$

此积分的存在域为 $\frac{m}{n}>0$ 及 $\frac{n-m}{n}>0$，即 $0<m<n$. 此时，我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx=\frac{1}{n}B\left(\frac{m}{n},\frac{n-m}{n}\right)=\frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}.$$

【3854】 $\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx.$

提示 令 $\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$，易知积分的存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$，且结果为

$$\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1).$$

解 设 $\frac{b+c}{b-a}\cdot\frac{x-a}{x+c}=t$，则 $x=\frac{a+lct}{1-lt}$，其中 $l=\frac{b-a}{b+c}$，且

$$x-a=\frac{(a+c)lt}{1-lt},\quad x-b=\frac{(a-b)+(b+c)lt}{1-lt},\quad x+c=\frac{a+c}{1-lt},\quad dx=\frac{(a+c)l}{(1-lt)^2}dt.$$

代入即得

$$\int_a^b\frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}}dx=(-1)^n\frac{l^{m+1}}{(a+c)^{n+1}}\int_0^1 t^m[(a-b)+(b+c)lt]^n dt$$

$$=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}\int_0^1 t^m(1-t)^n dt=\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}B(m+1,n+1),$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3856】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx.$

提示 令 $\sin x=t$ 后，再令 $t^2=u$，易知积分的存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$，且结果为

$$\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

解 令 $\sin x=t$，再令 $t^2=u$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}du=\frac{1}{2}B\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),$$

存在域为 $m>-1$ 及 $n>-1$.

【3868】 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$.

提示 令 $1-x=t$ 后，可得

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\mathrm{d}x,$$

并利用 2353 题(1)的结果.

解 设 $1-x=t$，则有 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\mathrm{d}t=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x$.

相加即得

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln\frac{\pi}{\sin\pi x}\mathrm{d}x=\ln\pi-\int_0^1 \ln\sin\pi x\mathrm{d}x$$

$$=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \ln\sin t\mathrm{d}t=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \ln\sin t\mathrm{d}t\right]=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\ln\pi-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)^{*)}=\ln 2\pi.$$

于是，

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln 2\pi=\ln\sqrt{2\pi}.$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

【3871】 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$ （n 为正整数).

解 设 $x=1-t$，则有

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln\Gamma(1-t)\cos 2n\pi t\mathrm{d}t=\int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x.$$

等式两端同加 $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$，得

$$2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=\int_0^1 (\ln\pi-\ln\sin\pi x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1 \cos 2n\pi x\ln\sin\pi x\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2nt\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2n\pi}\sin 2nt\ln\sin t\Big|_0^\pi+\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin 2nt\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4n\pi}\left[\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\mathrm{d}t+\int_0^\pi \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{4n\pi}(\pi+\pi)^{*)}=\frac{1}{2n}.$$

于是，

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)\cos 2n\pi x\mathrm{d}x=\frac{1}{4n}.$$

*) 利用 2291 题的结果.

证明等式：

【3872】 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{\pi}{4}$.

证明思路 首先，将积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ ($p>0,q>0,m>0$) 表成 Γ 函数(令 $x^m=t$)

$$\frac{1}{m}\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

其次，利用上述结果，即可证明等式.

证 首先，我们将积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x$ （$p>0,q>0,m>0$)

表成 Γ 函数. 作代换 $x^m=t$，即得

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^m)^{q-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\int_0^1 t^{\frac{p}{m}-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}u=\frac{1}{m}\mathrm{B}\left(\frac{p}{m},q\right)=\frac{1}{m}\frac{\Gamma(\frac{p}{m})\Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m}+q)}.$$

利用此结果,即可证得

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{4^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{4^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{\pi}{4}.$$

【3879】 求曲线 $r^n=a^n\cos n\varphi\quad(a>0,n$ 为正整数)的弧长.

提示 注意所求的弧长为 $s=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi$,并利用 3856 题的结果.

解 所求的弧长为

$$s=2n\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sqrt{r^2+\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2}\mathrm{d}\varphi=2na\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos^{\frac{1}{n}-1}n\varphi\mathrm{d}\varphi=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{n}-1}t\mathrm{d}t=a\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2n}\right)^{*)}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【3880】 求由曲线 $|x|^n+|y|^n=a^n\ (n>0,a>0)$所围的面积.

解 所求的面积为

$$A=4\int_0^a(a^n-x^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x=\frac{4a^2}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{4a^2}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}+1\right)=\frac{4a^2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$=\frac{2a^2}{n}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

§5. 傅里叶积分公式

1° **用傅里叶积分表示函数** 若 1)函数 $f(x)$在$-\infty<x<+\infty$内有定义;2)在每一个有限区间内此函数和它的导数 $f'(x)$皆是分段连续;3)$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内绝对可积,则在函数连续的一切点,可把函数表示成傅里叶积分的形式:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x]\mathrm{d}\lambda,\tag{1}$$

式中 $$a(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi\quad 及\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

在函数 $f(x)$不连续的各点,公式(1)的左端应改为$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

对于偶函数 $f(x)$,公式(1)给出:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}a(\lambda)\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda.\tag{2}$$

其中 $$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

并且对不连续的点也有同样的说明.

类似地,对于奇函数 $f(x)$可得:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}b(\lambda)\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,\tag{3}$$

其中 $$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi.$$

2° **在区间$(0,+\infty)$内用傅里叶积分表示函数** 若1)函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内有定义,2)此函数及其导数$f'(x)$在每一个有限区间$(a,b)\subset(0,+\infty)$内皆是分段连续,3)$f(x)$在区间$(0,+\infty)$内绝对可积,则在该区间内可按我们的愿望用公式(2)(偶式延拓)或用公式(3)(奇式延拓)来表示出函数$f(x)$.

用傅里叶积分表示下列函数:

【3881】 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

提示 易知函数$f(x)$满足傅里叶积分展式成立的条件,且当$|x|\neq 1$时,有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda;$$

而当$|x|=1$时,有
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$$

(此结果由3812题的结果也容易获得).

解 由于函数$f(x)$在$|x|\neq 1$上有定义,且$f(x)$和$f'(x)$在任何有限区间上皆分段连续,特别是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积,故可将$f(x)$表成傅里叶积分的形式(以下各题如不加说明,均满足傅里叶积分展式成立的条件).又由于$f(x)$为偶函数,故$b(\lambda)=0$,且

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\cos\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2\sin\lambda}{\pi\lambda}.$$

于是,当$|x|\neq 1$时($|x|\neq 1$为$f(x)$的连续点),有

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda;$$

而当$|x|=1$时为不连续点,由于

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},\qquad \frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有 $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}$ *).

*) 此结果由3812题的结果也容易获得.事实上,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{\pi}\ \frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

【3882】 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

解 由于$f(x)$为奇函数,故$a(\lambda)=0$,且

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(\xi)\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{1}\sin\lambda\xi\mathrm{d}\xi=\frac{2(1-\cos\lambda)}{\pi\lambda}.$$

于是,当$0<|x|\neq 1$时为连续点,有 $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda,$

当$x=0$时,虽为不连续点,但由于$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=0$, $f(0)=0$,且右端积分显然为零,故上式仍成立.

而当$|x|=1$时为不连续点,由于

$$\frac{f(-1+0)+f(-1-0)}{2}=-\frac{1}{2},\quad \frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

故有
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\operatorname{sgn}x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x^{*)}.$$

*) 此结果由3812题的结果也容易获得.事实上,

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\lambda}{\lambda}\sin\lambda\mathrm{d}\lambda=\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2\lambda}{\lambda}\mathrm{d}\lambda\right)=\frac{2}{\pi}\operatorname{sgn}x\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sgn}x.$$

【3895】 用傅里叶积分来表示函数

$$f(x)=e^{-x} \quad (0<x<+\infty).$$

(1)用偶式延拓； (2)用奇式延拓.

解 首先，我们注意到函数 e^{-x} 在 $[0,+\infty]$ 内连续且绝对可积：$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx=1<+\infty$，故对于

(1) 若用偶式延拓，则有

$$a(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\cos\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是，
$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0<x<+\infty).$$

由于按偶式延拓的函数在点 $x=0$ 连续，故上式当 $x=0$ 时也成立，即上式成立的范围是 $0\leqslant x<+\infty$.

(2)若用奇式延拓，则有

$$b(\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(\xi)\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\xi}\sin\lambda\xi d\xi=\frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

于是，
$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x}{1+\lambda^2}d\lambda \quad (0<x<+\infty).$$

但当 $x=0$ 时上式不成立.事实上，左端的值为1，而右端的值为零.

对于下列函数 $f(t)$，求傅里叶变换

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{l\to+\infty}\int_{-l}^{l} f(t)e^{-itx}dt:$$

【3896】 $f(x)=e^{-\alpha|x|} \quad (\alpha>0)$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}(\cos tx-i\ \sin tx)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}\cos tx dt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\cos tx dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}.$$

【3898】 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

解 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-itx}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos tx-i\ \sin tx)dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\cos tx dt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}{}^{*)}=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

*) 利用 3809 题的结果.

第八章　多重积分和曲线积分

§1. 二 重 积 分

1° **二重积分的直接计算法**　所谓连续函数 $f(x,y)$ 在有限封闭可求积二维区域 Ω 上的二重积分，指的是

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{\max|\Delta x_i|\to 0\\ \max|\Delta y_j|\to 0}}\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j$，而求和是对所有使 $(x_i,y_i)\in\Omega$ 的那些 i,j 值进行的.

若区域 Ω 由以下不等式给出：

$$a\leqslant x\leqslant b,\qquad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，则相应的二重积分可按以下公式来计算：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

2° **二重积分中的变量代换**　若连续可微函数

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$$

给出平面 Oxy 上的有限闭区域 Ω 与平面 Ouv 上的区域 Ω' 之间的一一映射，且雅可比行列式

$$I=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

的符号在 Ω 内保持不变(可能在零测度集上有例外)，则成立以下公式：

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f[x(u,v),y(u,v)]\,|I|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

例如，根据公式 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 时，有

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

【3911】　设 $f(x)$ 为闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 内的连续函数，证明不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

且仅当 $f(x)=$ 常数时等号成立.

证明思路　首先，证明不等式：$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$，

事实上，只要在不等式 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y\geqslant 0$ 中将被积函数 $[f(x)-f(y)]^2$ 展开，并注意 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y$，即可获证. 当 $f(x)=$ 常数时，显然上式中等号成立.

其次，证明：当 $\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 时，则 $f(x)=$ 常数. 事实上，此时有

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y=0.$$

对函数 $F(x)=\int_a^b[f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$ 利用 2205 题的结果，即可得 $\int_a^b[f(a)-f(y)]^2\mathrm{d}y=0$. 再次对函数 $G(y)=[f(a)-f(y)]^2$ 利用 2205 题的结果，即得 $f(x)=$ 常数.

证 因为

$$0\leqslant \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b [f(x)-f(y)]^2 \mathrm{d}y=(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x-2\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2+(b-a)\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y,$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)=$ 常数时，显然上式中等号成立. 反之，设上式中等号成立，则有

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y=0.$$

由于函数 $F(x)=\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$ 是 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $F(x)\equiv 0\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 特别 $F(a)=0$，即 $\int_a^b [f(a)-f(y)]^2\mathrm{d}y=0$. 又由于函数 $G(y)=[f(a)-f(y)]^2$ 是 $a\leqslant y\leqslant b$ 上的非负连续函数，故 $G(y)\equiv 0\ (a\leqslant y\leqslant b)$. 因此，$f(y)\equiv f(a)\ (a\leqslant y\leqslant b)$，即 $f(x)=$ 常数. 证毕.

【3912】 下列积分有怎样的符号?

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

解 (2)我们有 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1-I_2-I_3$，其中

$$I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_2=\iint\limits_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ I_3=\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

显然

$$0<I_1<\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,\qquad I_2>0,\qquad I_3>\iint\limits_{2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi-2\pi=2\pi,$$

故

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0.$$

(3)我们有

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 0}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零，第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数，因而，积分值是正的. 于是，原积分是正的.

【3914】 利用中值定理估计积分 $I=\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$.

解题思路 注意到积分域的面积为 200，故由积分中值定理知，

$$I=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\quad 其中(\xi,\eta)\in 区域|x|+|y|\leqslant 10.$$

显然有 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$，可以证明必有 $0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$.

于是，可知 $1.96<I<2$.

解 由于积分域的面积为 200，故由积分中值定理知，

$$I=\frac{1}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta}\cdot 200=\frac{200}{100+\cos^2\xi+\cos^2\eta},\tag{1}$$

其中 (ξ,η) 为区域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 中的某点.

显然 $0\leqslant\cos^2\xi+\cos^2\eta\leqslant 2$，我们证明必有

$$0<\cos^2\xi+\cos^2\eta<2.\tag{2}$$

由于函数 $\cos^2 x+\cos^2 y$ 在有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上的最大值为 2，最小值为 0. 从而，连续函数 $\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$ 在有界闭区域 $|x|+|y|\leqslant 10$ 上的最小值为 $\dfrac{1}{102}$，最大值为 $\dfrac{1}{100}$. 如果 $\cos^2\xi+\cos^2\eta=2$，则

由(1)式知，

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\left(\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\frac{1}{102}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I-I=0.$$

但 $f(x,y)=\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}-\dfrac{1}{102}$是非负连续函数，从而，必有 $f(x,y)\equiv 0$（在区域$|x|+|y|\leqslant 10$上），即 $\cos^2 x+\cos^2 y\equiv 2$（在区域$|x|+|y|\leqslant 10$上）. 这显然是错误的. 由此可知，$\cos^2\xi+\cos^2\eta<2$. 同理可证 $\cos^2\xi+\cos^2\eta>0$. 于是，(2)式成立.

从而，得 $\dfrac{200}{102}<I<\dfrac{200}{100}$， 即 $1.96<I<2$.

在问题 3916～3922 中，对二重积分$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$内按所给区域$\Omega$依两个不同的顺序安置积分的上下限.

【3917】 Ω—以 $O(0,0)$，$A(2,1)$，$B(-2,1)$为顶点的三角形.

提示 注意直线 OA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，OB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$ 及 AB 的方程为 $y=1$.

解 如图 3917 所示，OA 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$，OB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x$，AB 的方程为 $y=1$. 于是，

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-2y}^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x\\&=\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^1 f(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_{-2}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

图 3917



【3922】 Ω—圆环 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

解 如图 3922 所示. 若先对 y 后对 x 积分，则

$$\begin{aligned}I=&\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\left\{\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right.\\&\left.+\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y\right\}+\int_1^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

若先对 x 后对 y 积分，则

$$\begin{aligned}I=&\int_{-2}^{-1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\mathrm{d}y\left\{\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right.\\&\left.+\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_1^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

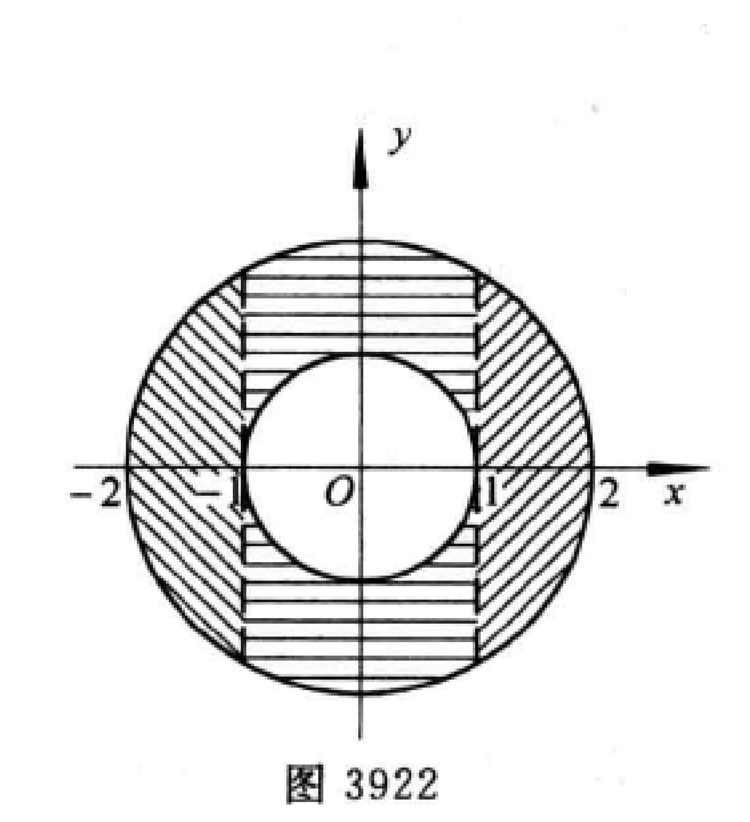


图 3922

在下列积分中改变积分的顺序：

【3925】 $\displaystyle\int_{-6}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域的围线为 $y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点为$(2,0)$及$(-6,8)$.

解 积分域的围线为：$y=2-x$ 及 $y+1=\frac{x^2}{4}$，其交点为$(2,0)$，$(-6,8)$，如图 3925 所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_{-6}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^8\mathrm{d}y\int_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

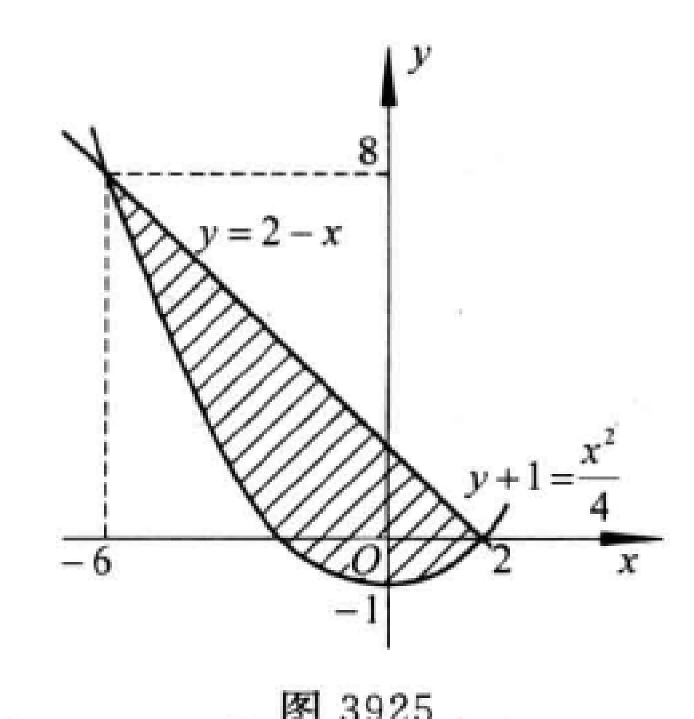


图 3925

图 3929

【3929】 $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y\quad(a>0)$.

提示 注意积分域的围线由圆$(x-a)^2+y^2=a^2\,(y\geqslant0)$，抛物线 $y^2=2ax\,(y\geqslant0)$及直线$x=2a$组成，其交点为$(0,0)$及$(2a,0)$.

解 积分域由围线$(x-a)^2+y^2=a^2\,(y\geqslant0)$，$y^2=2ax\,(y\geqslant0)$及 $x=2a$ 组成. 如图 3929 中阴影部分所示. 改变积分的顺序，即得

$$\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^a\mathrm{d}y\left\{\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x\right\}+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

计算下列积分：

【3933】 $\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}\;(a>0)$，其中 Ω 是以圆心在点(a,a)半径为 a 的圆周(它与坐标轴相切)的较短弧和坐标轴为界的区域.

提示 注意积分域 Ω 的围线为圆$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 与两坐标轴相切的较短弧及直线 $x=0,y=0$，因而，当 x 从 0 变到 a 时，对于每一个固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$.

解 如图 3933 所示. 当 x 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 x，y 从 0 变到 $a-\sqrt{2ax-x^2}$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^a\frac{a\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}-\int_0^a\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a\sqrt{a}.$$

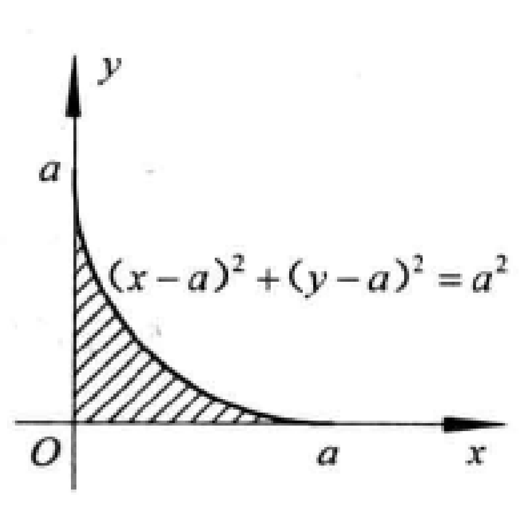
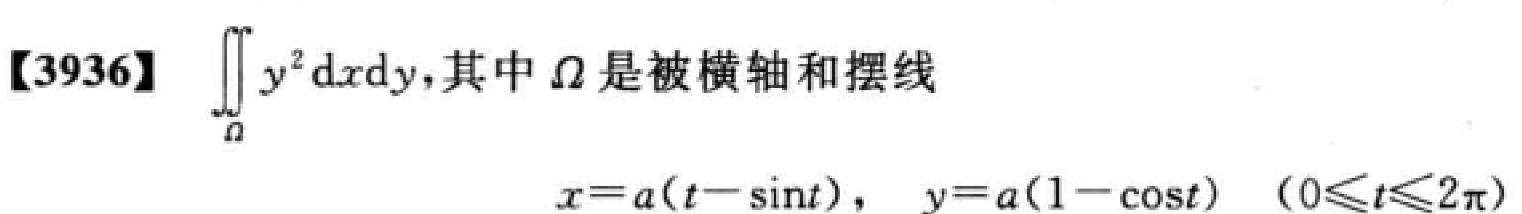


图 3933



【3936】 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Ω 是被横轴和摆线

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant2\pi)$$

的第一拱所包围的区域.

提示 利用 2281 题及 2282 题的结果.

解 $\iint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^y y^2\mathrm{d}x=\frac{a^4}{3}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^4\mathrm{d}t=\frac{2^4a^4}{3}\int_0^{2\pi}\sin^8\frac{t}{2}\mathrm{d}t=\frac{2^5a^4}{3}\int_0^{\pi}\sin^8u\mathrm{d}u$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^8u\mathrm{d}u\right\}=\frac{2^5a^4}{3}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8u\mathrm{d}u\right\}=\frac{2^5a^4}{3}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8u\mathrm{d}u\;{}^{*)}$$

$$=\frac{2^5a^4}{3}\cdot2\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{\pi}{2}\;{}^{**)}=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

*) 利用 2282 题的结果.

**) 利用 2281 题的结果.

在二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 中,令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r 和 φ,并配置积分的限,设:

【3941】 Ω—区域 $-a\leqslant x\leqslant a$;$\dfrac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a$.

解题思路 注意抛物线 $y=\dfrac{x^2}{a}$ 及直线 $y=a$ 的极坐标方程分别为 $r=\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 及 $r=\dfrac{a}{\sin\varphi}$. 又 φ 的积分范围 $[0,\pi]$ 应分为 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$,$[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}]$ 及 $[\dfrac{3\pi}{4},\pi]$.

解 如图 3941 所示. 区域 Ω 可分为三部分:

(1)当 φ 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$,其中 $r=\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=\dfrac{x^2}{a}$ 的极坐标方程;

(2)当 φ 从 $\dfrac{\pi}{4}$ 变到 $\dfrac{3\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\dfrac{a}{\sin\varphi}$;

(3)当 φ 从 $\dfrac{3\pi}{4}$ 变到 π 时,对于每一固定的 φ,r 从 0 变到 $\dfrac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$.

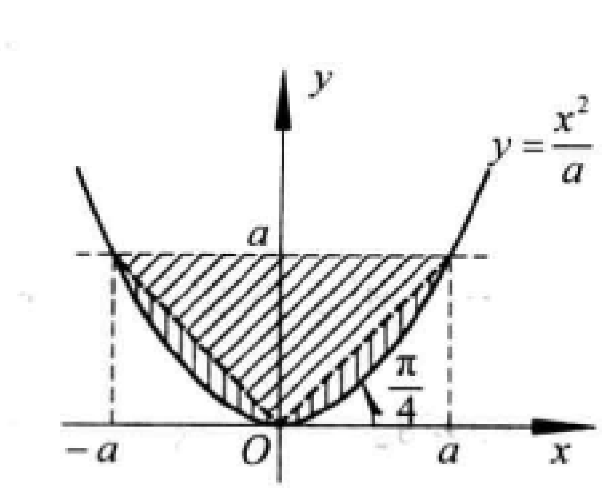


图 3941

于是,

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi,r\cos\varphi)r\mathrm{d}r$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r.$$

在下列积分中,令 $x=r\cos\varphi$ 和 $y=r\sin\varphi$,变换为极坐标 r 和 φ,并依两种不同的顺序配置积分的上下限:

【3944】 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 如图 3944 所示. 若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\dfrac{\pi}{4})$ 变到 1. 若先对 φ 积分,则当 r 从 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时,对于每一固定的 r,φ 从 $\dfrac{\pi}{4}-\arccos\dfrac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{1}{r\sqrt{2}}$,其中直线 $x+y=1$ 的极坐标方程为 $r\sin(\varphi+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,即 $\cos(\dfrac{\pi}{4}-\varphi)=\dfrac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\dfrac{\pi}{4}-\varphi=\pm\arccos\dfrac{1}{r\sqrt{2}}$.

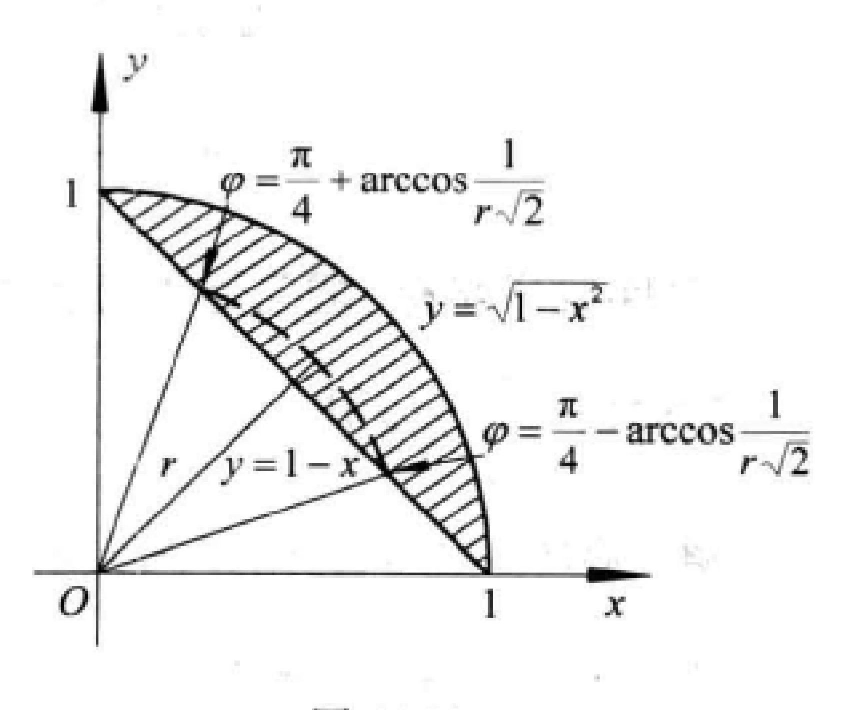


图 3944

于是,

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}^1 f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)r\mathrm{d}r=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r\mathrm{d}r\int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi.$$

【3946】+ $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$.

解 如图 3946 所示. 若先对 r 积分,则当 φ 从 0 变到 $\dfrac{\pi}{4}$ 时,对于每一固定的 φ,r 从 $\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\dfrac{1}{\cos\varphi}$,其中 $r=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y=x^2$ 的极坐标方程.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，对于每一固定的 r，φ 从 0 变到 $\arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$（由 $r=\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 解出 φ）；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\dfrac{1}{r}$ 变到 $\arcsin\dfrac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是，

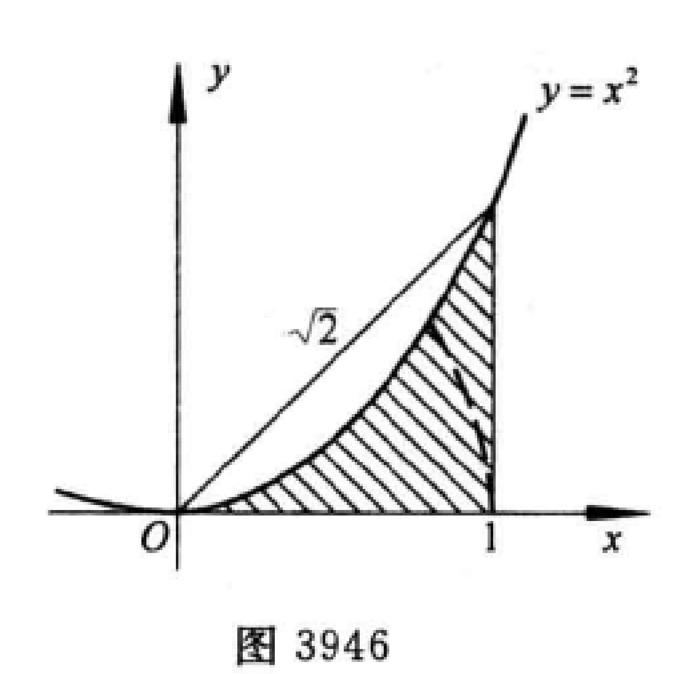


图 3946

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

$$=\int_0^1 rdr\int_0^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}} rdr\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\arcsin\frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi.$$

令 r 和 φ 为极坐标，在下列积分中变更积分的顺序：

【3948】 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr \quad (x\geqslant 0)$.

解 积分域为由圆 $r=a\cos\varphi$ 或 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 所围成的圆域.

若先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 a 时，对于每一固定的 r，φ 从 $-\arccos\dfrac{r}{a}$ 变到 $\arccos\dfrac{r}{a}$（图 3948）. 于是，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int_0^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)dr=\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(\varphi,r)d\varphi.$$

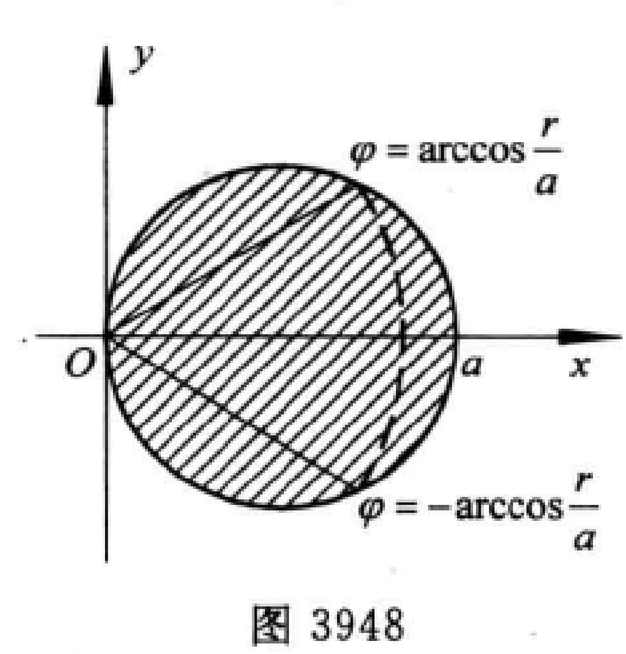


图 3948

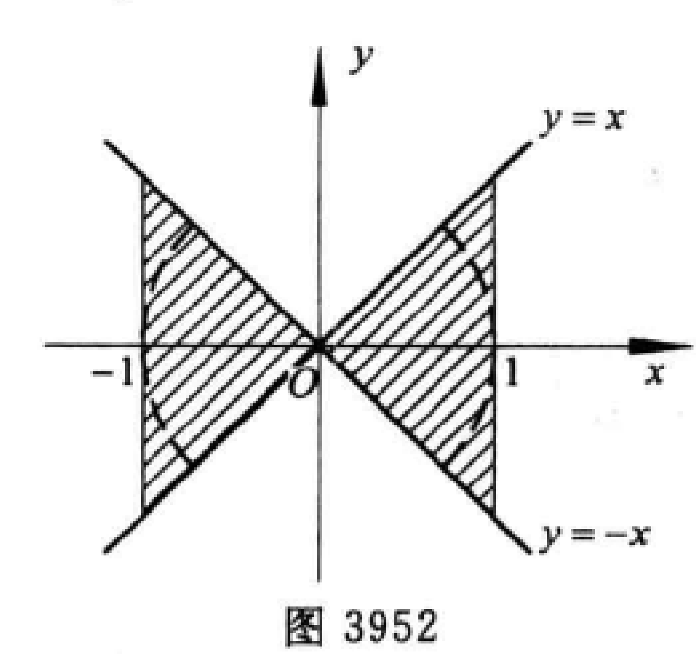


图 3952

变换成极坐标，把二重积分化为一重积分：

【3952】 $\displaystyle\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$，其中 $\Omega=\{|y|\leqslant|x|;|x|\leqslant 1\}$.

解题思路 注意先对 φ 后对 r 积分，当 r 从 0 变到 1 时，对于每一个固定的 r，φ 从 $-\dfrac{\pi}{4}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一个固定的 r，φ 从 $\arccos\dfrac{1}{r}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$.

注意到积分域 Ω 关于 x 轴及 y 轴的对称性，故当 φ 从 $-\dfrac{\pi}{4}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$ 时，应在所得的积分表达式前面乘以常数 2，而当 φ 从 $\arccos\dfrac{1}{r}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$ 时，则应在所得的积分表达式前面乘以常数 4. 这一点务请读者注意，否则就会产生错误.

解 积分域 Ω 如图 3952 所示. 先对 φ 积分，则当 r 从 0 变到 1 时，φ 从 $-\dfrac{\pi}{4}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$；当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时，对于每一固定的 r，φ 从 $\arccos\dfrac{1}{r}$ 变到 $\dfrac{\pi}{4}$. 于是，

$$\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi+4\int_1^{\sqrt{2}} rf(r)\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi$$
$$=\pi\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r.$$

变换成极坐标,计算下列二重积分:

【3955】 $\displaystyle\iint_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示 注意积分域 Ω 为 $\{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\pi\leqslant r\leqslant 2\pi\}$.

解 $\displaystyle\iint_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\pi}^{2\pi}r\sin r\mathrm{d}r=2\pi\int_{\pi}^{2\pi}r\sin r\mathrm{d}r=-6\pi^2.$

引入新的变量 u,v 来代替 x,y 并确定下列二重积分中的积分限:

【3958】 $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$,令 $u=x+y,v=x-y$.

提示 在变换 $u=x+y$, $v=x-y$ 下,积分域由 $0\leqslant x\leqslant 2,1-x\leqslant y\leqslant 2-x$ 变为 $1\leqslant u\leqslant 2$, $-u\leqslant v\leqslant 4-u$,且变换的雅可比行列式 $I=-\dfrac{1}{2},x=\dfrac{u+v}{2},y=\dfrac{u-v}{2}$.

解 在变换 $u=x+y$, $v=x-y$ 下,区域 $\Omega=\{0\leqslant x\leqslant 2,1-x\leqslant y\leqslant 2-x\}$ 变为 $\Omega'=\{1\leqslant u\leqslant 2,-u\leqslant v\leqslant 4-u\}$.事实上,$u+v=2x,u-v=2y$,故 $0\leqslant u+v\leqslant 4$,即 $-u\leqslant v\leqslant 4-u$.变换的雅可比行列式 $I=-\dfrac{1}{2}$,从而,$|I|=\dfrac{1}{2}$,且 $x=\dfrac{y+v}{2},y=\dfrac{y=v}{2}$.于是,

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{d}u\int_{-u}^{4-u}f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\mathrm{d}v.$$

【3959】 $\displaystyle\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Ω 是被曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0,y=0(a>0)$ 所包围的区域,令

$$x=u\cos^4 v,\qquad y=u\sin^4 v.$$

提示 注意 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\quad y=a\sin^4 v\quad\left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于所给变换,有 $|I|=4|u\cos^3 v\cdot\sin^3 v|$,且积分域 Ω 变为 $\Omega'=\left\{0\leqslant u\leqslant a,0\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

解 Ω 的界线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x=a\cos^4 v,\qquad y=a\sin^4 v\quad\left(0\leqslant v\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x=u\cos^4 v,y=u\sin^4 v$,有 $|I|=4|u\cos^3 v\sin^3 v|$,且区域 Ω 变为 $\Omega'=\left\{0\leqslant u\leqslant a,0\leqslant v\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$.于是,

$$\iint_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^a u\mathrm{d}u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 vf(u\cos^4 v,v\sin^4 v)\mathrm{d}v$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 v\sin^3 v\mathrm{d}v\int_0^a uf(u\cos^4 v,u\sin^4 v)\mathrm{d}u.$$

计算下列二重积分:

【3967】 $\displaystyle\iint_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其积分域 Ω 是椭圆区域 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$.

提示 作变换 $x=ar\cos\varphi,y=br\sin\varphi$,则区域 Ω 变为区域 $\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$,且有 $|I|=abr$.

解 作变换 $x=ar\cos\varphi, y=br\sin\varphi$，则区域 Ω 变为区域 $\Omega'=\{0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$，且 $|I|=abr$. 于是，

$$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=2\pi ab\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{2\pi ab}{3}.$$

【3973】$^+$ $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

提示 注意 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$

并在积分过程中作代换 $x=\sqrt{2}\sin t$ 及利用 1750 题的结果.

解 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{|y-x^2|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant x^2}}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\x^2\leqslant y\leqslant 2}}\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)^{*)}=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

*) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分：

【3974】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解题思路 注意：当 $y^2-x^2<2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$；当 $y^2-x^2>2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当 $y^2-x^2=2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

现将区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 及 Ω_5 五个子域，其中每一个子域的围线为

$\Omega_1: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y>0$；　　$\Omega_2: y^2-x^2=2, x=-1, x=1$；

$\Omega_3: x^2+y^2=4, x=-1$；　　$\Omega_4: x^2+y^2=4, x=1$；

$\Omega_5: x^2+y^2=4, y^2-x^2=2, y<0$.

当点在 Ω_1 及 Ω_5 时，$y^2-x^2>2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；

当点在 Ω_2,Ω_3 及 Ω_4 中时，$y^2-x^2<2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$.

从而，问题可获解.

解 当 $y^2-x^2<2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$；当 $y^2-x^2>2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当 $y^2-x^2=2$ 时，$\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=0$.

现将区域 $x^2+y^2\leqslant 4$ 分成 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3,\Omega_4$ 和 Ω_5 五部分，其界线分别为 $x^2+y^2=4$，$y^2-x^2=2$，$x=\pm 1$（图 3974）. 当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时，$y^2-x^2>2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=-1$；当点在 Ω_2、Ω_3 和 Ω_4 中时，$y^2-x^2<2$，故 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=1$. 于是，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint\limits_{\Omega_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Omega_5}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y+4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2+x^2}}\mathrm{d}y+4\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8\int_0^1\sqrt{2+x^2}\,\mathrm{d}x+4\left(\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

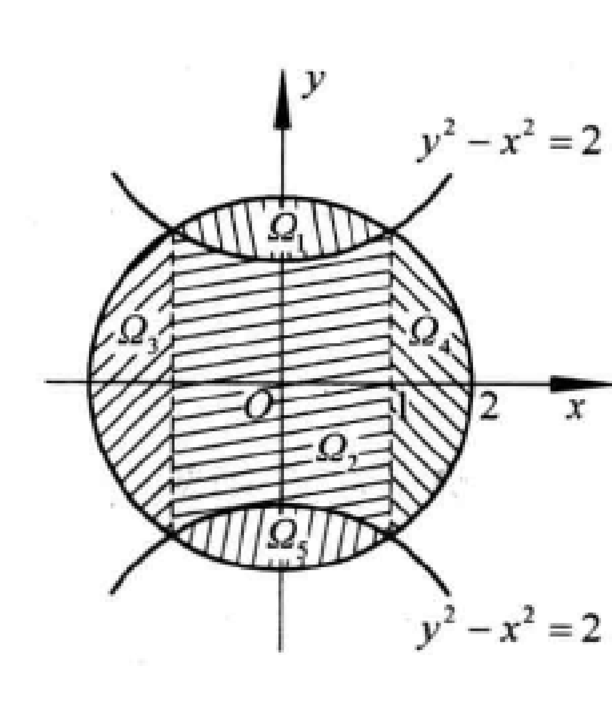


图 3974

【3975】 $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解题思路 注意：

当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；当 $3\leqslant x+y<4$ 时，$[x+y]=3$；当 $x+y=4$ 时，$[x+y]=4$.

现将区域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$ 分成四个子域 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ 及 Ω_4，它们依次为

$\Omega_1: x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$；　　$\Omega_2: 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ x=0,\ y=0$；

$\Omega_3: 2\leqslant x+y\leqslant 3,\ x=2,\ y=2$；　　$\Omega_4: x+y\geqslant 3,\ x\leqslant 2,\ y\leqslant 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=2$；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$.

注意 $\iint\limits_{\Omega_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为区域 Ω_i 的面积($i=1,2,3,4$)，问题即易获解.

解 当 $0\leqslant x+y<1$ 时，$[x+y]=0$；　当 $1\leqslant x+y<2$ 时，$[x+y]=1$；

当 $2\leqslant x+y<3$ 时，$[x+y]=2$；　当 $3\leqslant x+y<4$ 时，$[x+y]=3$；

当 $x+y=4$ 时，$[x+y]=4$.

如图 3975 所示，区域 $0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2$ 可分为下列四部分：

$\Omega_1: x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$；　$\Omega_2: 1\leqslant x+y\leqslant 2,\ x=0,\ y=0$；

$\Omega_3: 2\leqslant x+y\leqslant 3,\ x=2,\ y=2$；　$\Omega_4: x+y\geqslant 3,\ x\leqslant 2,\ y\leqslant 2$.

当点属于 Ω_1 的内部时，$[x+y]=0$；当点属于 Ω_2 的内部时，$[x+y]=1$；当点属于 Ω_3 的内部时，$[x+y]=2$；当点属于 Ω_4 的内部时，$[x+y]=3$. 于是，

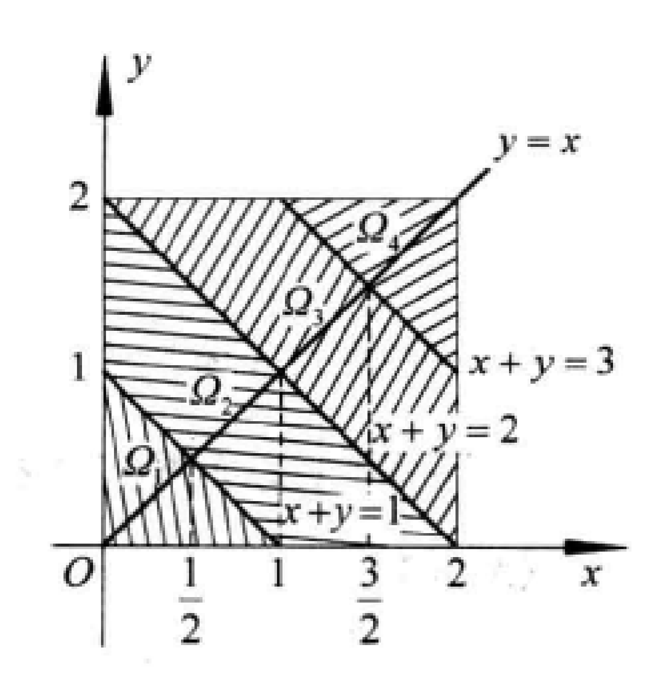


图 3975

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2}}[x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{\Omega_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{\Omega_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\mathrm{d}y+\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{2-x}\mathrm{d}y\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{x}\mathrm{d}y+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{3-x}\mathrm{d}y\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_{3-x}^{x}\mathrm{d}y$$

$$=2\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x\right]+4\left[\int_{1}^{\frac{3}{2}}(2x-2)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\mathrm{d}x\right]+6\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x-3)\mathrm{d}x=6.$$

【3977】 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数，证明：

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

证明思路 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，并注意 $\cos\varphi$ 及 $\sin\varphi$ 均为以 2π 为周期的周期函数，即可得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right].$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[1+(-1)^{m+n}]\cos^m t\sin^n t\mathrm{d}t.$$

从而，命题易获证.

证 作变换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，则得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\\0\leqslant r\leqslant a}}r^{m+n+1}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^{m+n+2}}{m+n+2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi\right].\quad(1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi=\pi+t$，即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi=(-1)^m(-1)^n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\ \sin^n t\,\mathrm{d}t.$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时，$(-1)^m(-1)^n=-1$，因而，(1)式为零，当 m 和 n 均为奇数时，$(-1)^m(-1)^n=1$，因而，(1)式等于 $\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m\varphi\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$. 但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数，故积分仍然为零.

总之，当 m 和 n 中至少有一个为奇数时，

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}x^m y^n\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

§2. 面积的计算法

Oxy 平面上区域 S 的面积由以下公式给出： $S=\iint\limits_S\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

求下列曲线所界的面积：

【3986】 $(x-y)^2+x^2=a^2\quad(a>0).$

解 如图 3986 所示. 所求面积的区域为：

$$-a\leqslant x\leqslant a,\quad x-\sqrt{a^2-x^2}\leqslant y\leqslant x+\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x-\sqrt{a^2-x^2}}^{x+\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}y=4\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\pi a^2.$$

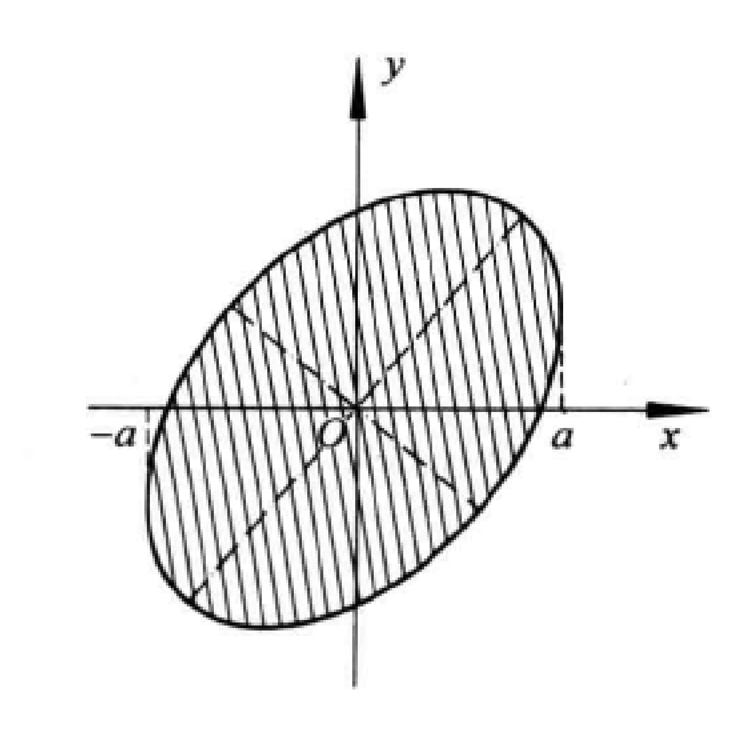


图 3986

变换为极坐标，计算下列曲线所围的面积：

【3987】 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$； $x^2+y^2\geqslant a^2$.

解 曲线的极坐标方程为 $r^2=2a^2\cos2\varphi$； $r\geqslant a$.

它们的交点在第一象限内为$(a,\frac{\pi}{6})$，如图 3987 所示. 利用对称性，得所求面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{\sqrt{2a^2\cos2\varphi}}r\mathrm{d}r=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2a^2\cos2\varphi-a^2)\mathrm{d}\varphi=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2.$$

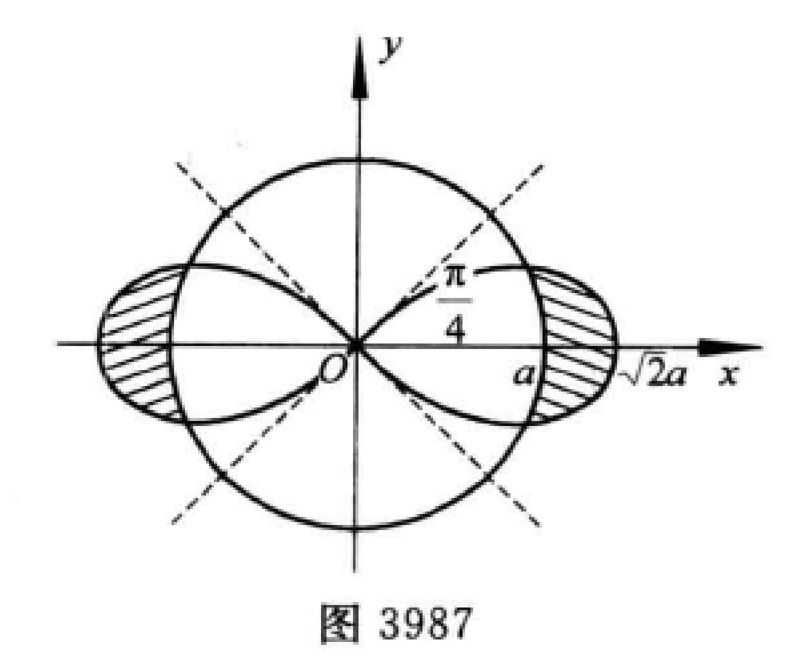


图 3987

根据以下公式引入广义极坐标 r 和 φ：

$$x=ar\cos^\alpha\varphi,\qquad y=br\sin^\alpha\varphi\quad(r\geqslant0),$$

其中 a,b 和 α 为以适当的方法选出的常数，且考虑到 $\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\alpha abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$，求由下列曲线所围的面积(假定参数是正的)：

【3995】 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$； $x=0$， $y=0$.

提示 作变换 $x=ar\cos^8\varphi$，$y=br\sin^8\varphi$，则方程化为 $r=1$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$.

解 令 $x=ar\cos^8\varphi$，$y=br\sin^8\varphi$，则方程化为

$$r=1\qquad(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}).$$

于是,曲线所围的面积为

$$S=\iint_S 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin^7\varphi\mathrm{d}\varphi=4ab\int_0^1 u^7(1-u^2)^3\mathrm{d}u$$

$$=4ab\int^1(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13})\mathrm{d}u=4ab\left(\frac{1}{8}-\frac{3}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{14}\right)=\frac{ab}{70}.$$

进行适当的变量代换,求下列曲线所围的面积:

【3999】 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=2,\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\frac{4x}{a}=\frac{y}{b}$ $(a>0,b>0)$.

提示 作变换$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$, $\frac{x}{y}=v$, 即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2$, $\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$,且有 $|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}$.

解 作变换$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=u$, $\frac{x}{y}=v$, 即

$$x=\frac{u^2v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},\quad y=\frac{u^2}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2},$$

则 $1\leqslant u\leqslant 2$, $\frac{a}{4b}\leqslant v\leqslant\frac{a}{b}$,且有

$$|I|=\frac{2u^3}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}.$$

于是,所求的面积为

$$S=\int_1^2 2u^3\mathrm{d}u\int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}}\frac{\mathrm{d}v}{\left(\sqrt{\frac{v}{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}=\frac{15}{2}\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\frac{2at\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4}\ ^{*)}$$

$$=15a\int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}}\left[\frac{1}{\left(t+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3}-\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+t\right)^4}\right]\mathrm{d}t=15a\left(\frac{7b}{72}-\frac{37b}{648}\right)=\frac{65ab}{108}.$$

*) 作代换 $v=at^2$.

【4001】 求椭圆$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ (其中 $\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$)的面积.

提示 作变换 $a_1x+b_1y+c_1=u$, $a_2x+b_2y+c_2=v$,则椭圆所围区域变为 $u^2+v^2\leqslant 1$,且有$|I|=\frac{1}{|\delta|}$.

解 作变换 $a_1x+b_1y+c_1=u$, $a_2x+b_2y+c_2=v$,则椭圆所围区域变为 $u^2+v^2\leqslant 1$,且有$|I|=\frac{1}{|\delta|}$.

于是,所求的面积为

$$S=\frac{1}{|\delta|}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|\delta|}.$$

§3. 体积的计算法

如图 8−3 所示，设柱体顶面位于连续曲面 $z=f(x,y)$，底面位于平面 $z=0$，侧面垂直于底面，且底面在平面 Oxy 上所占区域 Ω 是可求积的，则.柱体的体积等于

$$V=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

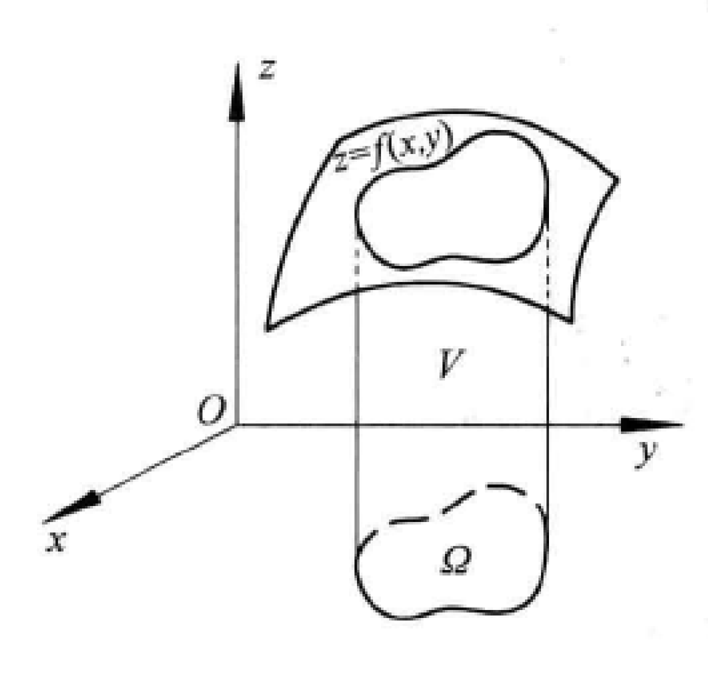


图 8−3

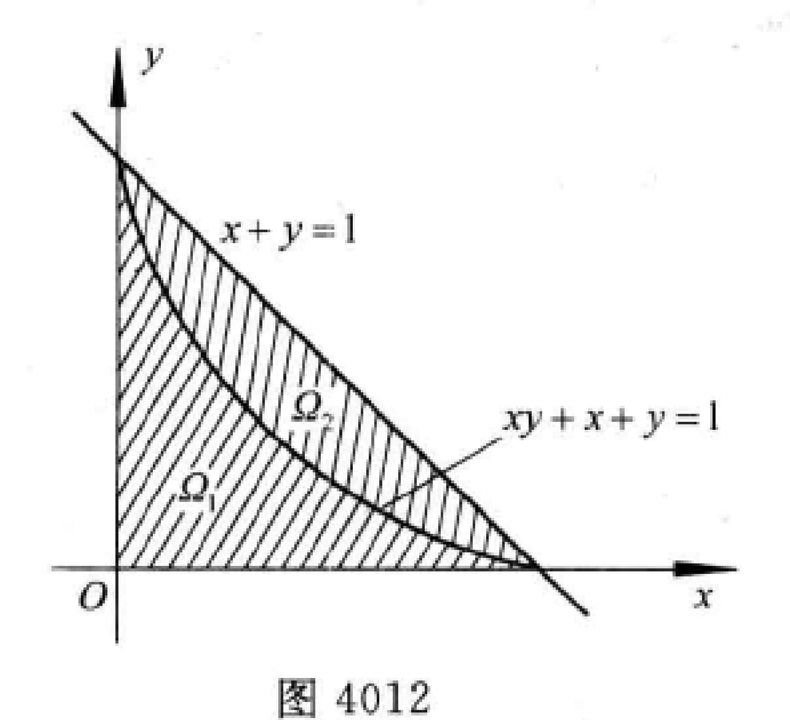


图 4012

求下列曲面所围区域的体积：

【4012】 $z=xy$，$x+y+z=1$，$z=0$.

提示 注意所求的体积 V 由两部分组成：

$$V_1: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x},\ z=xy.$$

$$V_2: 0\leqslant x\leqslant 1, \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x,\ z=1-x-y.$$

解 体积 V 由两部分组成：

$$V_1: 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x},\ z=xy.$$

$$V_2: 0\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x,\ z=1-x-y.$$

它们在 Oxy 平面上的投影域 Ω_1 及 Ω_2 如图 4012 所示.于是，所求的体积为

$$\begin{aligned}V&=V_1+V_2\\&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\left(-\frac{11}{4}+4\ln2\right)+\left(\frac{25}{6}-6\ln2\right)=\frac{17}{12}-2\ln2.\end{aligned}$$

变换成极坐标，求下列曲面所围区域的体积：

【4014】 $z=x+y$，$(x^2+y^2)^2=2xy$，$z=0(x>0,y>0)$.

提示 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，并利用 3856 题的结果.

解 令 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，则方程 $(x^2+y^2)^2=2xy$ 及 $z=x+y$ 变为

$$r^2=2\sin\varphi\cos\varphi=\sin2\varphi \quad 及 \quad z=r(\cos\varphi+\sin\varphi).$$

于是，所求的体积为

$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\sin2\varphi}} r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\mathrm{d}r=\frac{2\sqrt2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{\frac52}\varphi\cos^{\frac32}\varphi+\cos^{\frac52}\varphi\sin^{\frac32}\varphi)\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{2\sqrt2}{3}\mathrm{B}\left(\frac54,\frac74\right)^{*)}=\frac{2\sqrt2}{3}\frac{\Gamma\left(\frac54\right)\Gamma\left(\frac74\right)}{\Gamma(3)}=\frac{2\sqrt2}{3}\frac{\frac14\cdot\frac34\Gamma\left(\frac14\right)\Gamma\left(\frac34\right)}{2!}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4016】 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\geqslant a|x|$ $(a>0)$.

解 只需计算由下列曲面所围区域的体积：$x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2\leqslant a|x|$. 若引用极坐标，则 $r^2+z^2=a^2$, $r^2\leqslant a|r\cos\varphi|$，其体积为

$$V_1=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant ax\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}}\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r\sqrt{a^2-r^2}\,\mathrm{d}r=-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}.$$

于是，所求的体积为 $$V=\frac{4\pi a^3}{3}-\left(\frac{4\pi a^3}{3}-\frac{16a^3}{9}\right)=\frac{16a^3}{9}.$$

求下列曲面所围区域的体积(假定参数是正的)：

【4021】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $(z>0)$.

提示 注意两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影域的围线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，故令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$，则曲面方程化为 $z=c\sqrt{1-r^2}$ 及 $z=cr$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}})$.

解 两曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$. 令 $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$，则方程化为

$$z=c\sqrt{1-r^2}\quad 及\quad z=cr\quad \left(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

于是，曲面所围区域的体积为

$$V=\iint\limits_{\Omega}\left[c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}abr(c\sqrt{1-r^2}-cr)\mathrm{d}r$$

$$=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\sqrt{1-r^2}-r^2)\mathrm{d}r=-\frac{1}{3}abc\int_0^{2\pi}\left[r^3+(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{3}\pi abc(2-\sqrt{2}).$$

【4027】 $z^2=xy$, $x+y=a$, $x+y=b$ $(0<a<b)$.

解 由于 $z=\pm\sqrt{xy}$，又所界立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x+y=a$, $x+y=b$, $x=0$ 及 $y=0$ 围成. 利用对称性知，曲面所围区域的体积为

$$V=2\iint\limits_{\Omega}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\left(\int_0^a\mathrm{d}x\int_{a-x}^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y+\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{b-x}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^a\left[\sqrt{x(b-x)^3}-\sqrt{x(a-x)^3}\right]\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_a^b\sqrt{x(b-x)^3}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x-\frac{4}{3}\int_0^a(a-x)\sqrt{a(a-x)}\,\mathrm{d}x.$$

令 $x=b\sin^2 t$，可得

$$\int_0^b(b-x)\sqrt{x(b-x)}\,\mathrm{d}x=2b^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2b^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\mathrm{d}t\right)=2b^3\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}-\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{1}{16}\pi b^3;$$

同理，有 $$\int_0^a (a-x)\sqrt{x(a-x)}\,dx=\frac{1}{16}\pi a^3.$$

于是，所求的体积为 $$V=\frac{4}{3}\left(\frac{\pi b^3}{16}-\frac{\pi a^3}{16}\right)=\frac{\pi}{12}(b^3-a^3).$$

【4028】 $z=x^2+y^2, xy=a^2, xy=2a^2, y=\frac{x}{2}, y=2x, z=0.$

提示 注意曲面所围区域的立体在 Oxy 平面上的投影域由曲线 $xy=a^2$，$xy=2a^2$ 及直线 $y=\frac{x}{2}$，$y=2x$ 围成，故令 $xy=ua^2$，$y=vx$，则积分域变为长方形域

$$1\leqslant u\leqslant 2,\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2,\quad 且\ |I|=\frac{a^2}{2v},\ z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right).$$

再利用对称性.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy=a^2$，$xy=2a^2$ 和直线 $y=\frac{x}{2}$，$y=2x$ 围成. 利用对称性知，曲面所围区域的体积为 $V=2\iint\limits_{\Omega} z\,dxdy=2\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$. 作变量代换 $xy=ua^2$，$y=vx$，则积分域变为长方形域 $1\leqslant u\leqslant 2$，$\frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2$，且 $|I|=\frac{a^2}{2v}$，$z=x^2+y^2=a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)$.

于是，所求的体积为

$$V=2\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy=2\iint\limits_{\substack{1\leqslant u\leqslant 2\\ \frac{1}{2}\leqslant v\leqslant 2}} a^2\left(\frac{u}{v}+uv\right)\frac{a^2}{2v}dudv=a^4\int_1^2 u\,du\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{v^2}\right)dv=\frac{9}{2}a^4.$$

§4. 曲面面积的计算法

1° **曲面由显函数给出的情形** 光滑曲面 $z=z(x,y)$ 的面积由以下积分表示：

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

其中 Ω 为该曲面在 Oxy 平面上的投影.

2° **曲面由参数方程给出的情形** 若曲面是由参数方程给出的：

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),$$

其中 $(u,v)\in\Omega$，Ω 为封闭可求积的有限区域，且函数 x,y 和 z 在区域 Ω 内连续可微，则对于曲面的面积有公式

$$S=\iint\limits_{\Omega}\sqrt{EG-F^2}\,dudv,$$

其中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\quad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,\quad F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

【4040】 求曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在圆柱 $x^2+y^2=\pm ax$ 内那部分的面积(维维亚尼问题).

解 只需求出球面被圆柱面割出部分的面积. 因为

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

于是，利用对称性知，割出部分的面积为

$$S=8\iint\limits_{\Omega}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}}dr=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

于是，所求的面积为 $A=4\pi a^2-S=4\pi a^2-8a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=8a^2$.

【4046】 求以曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 和 $x+y+z=2a$ $(a>0)$为界的物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的投影为

$$3x^2+3y^2=(2a-x-y)^2,\quad 即\quad x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2.$$

令 $x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$，则方程变为 $\frac{\left(x'+\frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2}+\frac{y'^2}{(2a)^2}=1.$

由此可见，曲面所界的物体在 Oxy 平面上的投影域为以 $2a$ 为短半轴、$2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成. 对于$z=2a-x-y$, $z=\sqrt{3x^2+3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{3},\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=2.$$

于是，物体的表面积

$$S=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Omega}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\sqrt{3}+2)\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=4\pi(3+2\sqrt{3})a^2.$$

又所截圆锥之高为

$$H=\left|\frac{-2a}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2a}{\sqrt{3}}$$

（即坐标原点到平面 $x+y+z=2a$ 的距离）. 于是，物体的体积为

$$V=\frac{1}{3}\cdot A\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积：

$$A=\iint_{\Omega}\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 2a\cdot 2\sqrt{3}a=12\pi a^2.$$

因此，所求物体的体积为 $V=\frac{1}{3}\cdot 12\pi a^2\cdot\frac{2a}{\sqrt{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3$.

【4047】 求球面在两条纬线和两条经线之间那部分的面积.

解题思路 球面的参数方程为

$$x=R\cos\varphi\cos\psi,\quad y=R\sin\varphi\cos\psi,\quad z=R\sin\psi,$$

其中 R 为球的半径. $\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi$，又 $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $\psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2$，其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度，ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

解 球面的参数方程为 $x=R\cos\varphi\cos\psi$, $y=R\sin\varphi\cos\psi$, $z=R\sin\psi$,
其中 R 为球的半径. 因为

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi=R^2\cos^2\psi,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi+R^2\cos^2\psi=R^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\frac{\partial z}{\partial\psi}=R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi-R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi+0=0,$$

故 $\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos\psi$. 于是，所求的面积为

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\mathrm{d}\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi\mathrm{d}\psi=(\varphi_2-\varphi_1)(\sin\psi_2-\sin\psi_1)R^2,$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度，ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

§5. 二重积分在力学上的应用

1° **质心** 若薄板 Ω 位于平面 Oxy 内，x_0，y_0 为其质心坐标，$\rho=\rho(x,y)$ 为其面密度，则

$$x_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho x\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad y_0=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Omega}\rho y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 $M=\iint\limits_{\Omega}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为薄板的质量.

若薄板是均质的，则在公式(1)中应令 $\rho=1$.

2° **转动惯量** I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量，可表示为以下公式：

$$I_x=\iint\limits_{\Omega}\rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad I_y=\iint\limits_{\Omega}\rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2}$$

其中 $\rho=\rho(x,y)$ 为薄板的面密度.

还可研究惯性积
$$I_{xy}=\iint\limits_{\Omega}\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在公式(2)中取 $\rho=1$，我们就得到平面图形的几何转动惯量.

【4051】 求边长为 a 的正方形薄板的质量，设薄板上每一点的面密度与该点到正方形顶点之一的距离成正比，且在正方形的中心等于 ρ_0.

解 取坐标系如图 4051 所示，则面密度 $\rho=k\sqrt{x^2+y^2}$. 由于

$$\rho_0=k\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $k=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}$. 从而，$\rho=\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}$.

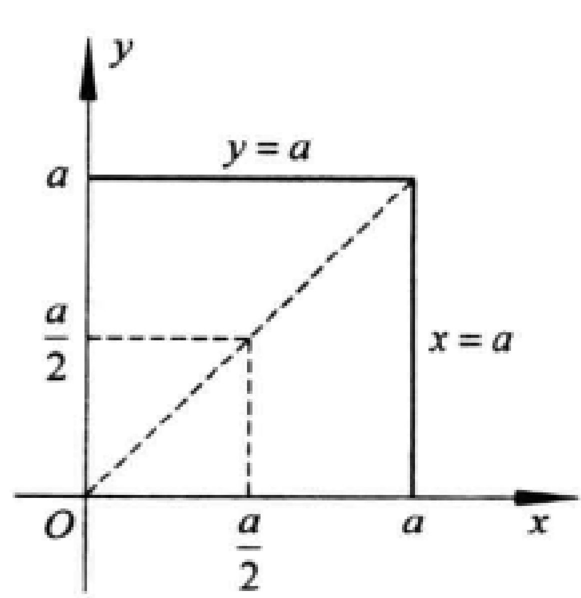


图 4051

若引用极坐标，即得质量

$$M=\iint\limits_{\Omega}\frac{\rho_0\sqrt{2}}{a}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^2\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}}r^2\mathrm{d}r\right]$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^3\varphi}\right]=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2\varphi}\,\mathrm{d}(\tan\varphi)$$

$$=\frac{\rho_0a^2}{3}2\sqrt{2}\left[\frac{\tan\varphi}{2}\sqrt{1+\tan^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\varphi+\sqrt{1+\tan^2\varphi}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\rho_0a^2}{3}[2+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})].$$

求以下列曲线为界的均匀薄板的质心坐标：

【4054】 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\quad(x>0,y>0)$.

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M=\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\rho\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^2t\mathrm{d}t^{*)}=3a^2\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4t-\sin^6t)\mathrm{d}t$$

$$=3a^2\rho\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi a^2\rho}{32},$$

$$M_y=\rho\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=\rho\int_0^a x(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=3a^3\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos^5t\mathrm{d}t=\frac{8a^3\rho}{105}.$$

于是，质心的横坐标为
$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{256a}{315\pi}.$$

由关于直线 $y=x$ 的对称性知，$x_0=y_0=\frac{256a}{315\pi}$.

*） 作代换 $x=a\cos^3 t$.

【4060】 求曲线 $y=\sqrt{2px}$，$y=0$，$x=X$ 所围图形的质心在参数 X 变化时所描绘的曲线.

解 变动面积的质量为 $$M=\rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{3}X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩 $$M_y=\rho\int_0^X x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y=\rho\frac{2\sqrt{2p}}{5}X^{\frac{5}{2}},\qquad M_x=\rho\int_0^X \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y=\rho\frac{1}{2}pX^2.$$

于是，变动面积的质心为 $$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{3}{5}X,\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{3\sqrt{pX}}{4\sqrt{2}}.$$

因此，质心的轨迹方程为 $$y_0=\frac{3}{4\sqrt{2}}\sqrt{p\cdot\frac{5}{3}x_0}=\frac{1}{8}\sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程，其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所围的面积($\rho=1$)对坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y：

【4063】 $r=a(1+\cos\varphi)$.

解 曲线所围的平面域可表示为 $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$，$0\leqslant r\leqslant a(1+\cos\varphi)$.

于是，

$$I_x=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\sin^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}a^4\int_0^{\pi}(1+4\cos\varphi+6\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+\cos^4\varphi)\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot\frac{21}{16}=\frac{21}{32}\pi a^{4\,*)}.$$

$$I_y=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\varphi)}r^2\cos^2\varphi\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2}a^4\int_0^{\pi}(\cos^2\varphi+4\cos^3\varphi+6\cos^4\varphi+4\cos^5\varphi+\cos^6\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

*） 对于任意正整数 n，有 $$\int_0^{\pi}\cos^n\varphi\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\varphi\mathrm{d}\varphi, & n\text{ 为偶数；}\\ 0, & n\text{ 为奇数.}\end{cases}$$

为算出 I_x、I_y 的值，也可变换被积函数的形式，直接用换元法计算，这样较简单. 事实上，我们有

$$I_x=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=2^6a^4\int_0^{\pi}\cos^{10}\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=2^6a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}x(1-\cos^2x)\mathrm{d}x=2^6a^4\frac{9\cdot7\cdot5\cdot3\cdot1}{10\cdot8\cdot6\cdot4\cdot2}\left(1-\frac{11}{12}\right)\frac{\pi}{2}=\frac{21}{32}\pi a^4.$$

$$I_y=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^4\mathrm{d}\varphi-\frac{21}{32}\pi a^4$$

$$=2^4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8x\mathrm{d}x-\frac{21}{32}\pi a^4=\frac{70}{32}\pi a^4-\frac{21}{32}\pi a^4=\frac{49}{32}\pi a^4.$$

【4068】 证明：平面图形 S 对通过其质心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为图形 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为惯性积：

$$I_{xy}=\iint_S\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明思路 取直角坐标系 $Ox'y'$，使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α，则有

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.\quad \text{且}\quad |I|=\left|\frac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=1.$$

于是,所求的转动惯量为 $I=\iint\limits_S y'^2\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$. 由题设即易获证.

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$,使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α,则有

$$x'=x\cos\alpha+y\sin\alpha,\quad y'=-x\sin\alpha+y\cos\alpha.$$

这就是旋转变换,雅可比行列式的绝对值 $|I|=\left|\dfrac{D(x',y')}{D(x,y)}\right|=1$.

于是,

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_S y'^2\rho\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'=\iint\limits_S(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\cos^2\alpha\iint\limits_S\rho y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\sin\alpha\cos\alpha\iint\limits_S\rho xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sin^2\alpha\iint\limits_S\rho x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=I_x\cos^2\alpha-2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha+I_y\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

【4071】 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中深度为 h(由球心算起)的地方,这里 $h\geqslant a$. 求液体对球的上表面和下表面的压力.

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$,则在球面上的点 (x,y,z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d=h-z\quad(-a\leqslant z\leqslant h).$$

于是,上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为

$$d=h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\quad d=h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}.$$

根据对称性知,压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的投影均为零,故只要计算压力在 Oz 轴上的投影,液体作用于球的上表面和下表面的压力分别记以 p_1 和 p_2,并设 γ 为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与 Oz 轴正向的夹角,则

$$\begin{aligned}p_1&=\iint\limits_{S_1}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-h\pi a^2\delta+\delta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r\\&=-h\pi a^2\delta+\left[\frac{-2\pi\delta}{3}\sqrt{(a^2-r^2)^3}\right]\bigg|_0^a=-\pi a^2\delta\left(h-\frac{2a}{3}\right)\quad(p_1<0\text{ 表示压力向下}).\end{aligned}$$

同理,我们有

$$p_2=\iint\limits_{S_2}d\delta\cos\gamma\mathrm{d}S=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\delta[h+\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2\delta\left(h+\frac{2a}{3}\right)\quad(p_2>0\text{ 表示压力向上}).$$

§6. 三 重 积 分

1° **三重积分的直接计算法** 函数 $f(x,y,z)$ 是连续的,且有界区域 V 由下列不等式给出:

$$x_1\leqslant x\leqslant x_2,\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\quad z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),$$

其中 $y_1(x),y_2(x),z_1(x,y),z_2(x,y)$ 皆为连续函数,则函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内的三重积分可按公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{d}x\iint\limits_{S(x)}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $x=$常数截区域 V 所得的截面.

2° **三重积分中的变量代换** 若连续可微函数

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w)$$

给出 $Oxyz$ 空间的有界可求积的三维闭区域 V 与 $O'uvw$ 空间的区域 V' 之间的一一映射,

并且当$(u,v,w)\in V'$时，

$$I=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\neq 0,$$

则成立公式

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{V'} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\,|I|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

在特殊情况下，有：1) 圆柱坐标系 φ,r,h，其中

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=h,\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,r,h)}=r.$$

2) 球坐标系 φ,ψ,r，其中

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,\quad \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi,\psi,r)}=r^2\cos\psi.$$

计算下列三重积分：

【4079】 $\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

所围的区域.

解题思路 设 P_x,Q_y,R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=$常数，$y=$常数，$z=$常数所截部分在 Oyz,Ozx,Oxy 平面上的投影，则有

$$\text{原式}=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\iint\limits_{P_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}y\iint\limits_{Q_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\iint\limits_{R_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 设 P_x,Q_y,R_z 分别表示区域 V 与平面 $x=$常数，$y=$常数，$z=$常数所截部分在 Oyz,Ozx,Oxy 平面上的投影，则有

$$\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\iint\limits_{P_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{-b}^{b}\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}y\iint\limits_{Q_y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\iint\limits_{R_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x^{*)}+\frac{\pi ac}{b^2}\int_{-b}^{b}y^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y+\frac{\pi ab}{c^2}\int_{-c}^{c}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=3\cdot\frac{4\pi abc}{15}=\frac{4\pi abc}{5}.$$

*) P_x 在平面 $x=$常数上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1,$$

故其面积为
$$\pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Q_y 及 R_z 的面积类推.

【4080】 $\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 V 是曲面 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 所围的区域.

解题思路 注意曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$. 则有

$$\text{原式}=\iint\limits_Q\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z.$$

解 曲面在 Oxy 平面上的投影 Q 为圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$. 于是，

$$\iiint\limits_V\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_\Omega\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}z=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left[\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.$$

在下列三重积分内，用不同方法配置积分的上下限：

【4081】 $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$

解 有界区域 V 如图 4081－1 所示.

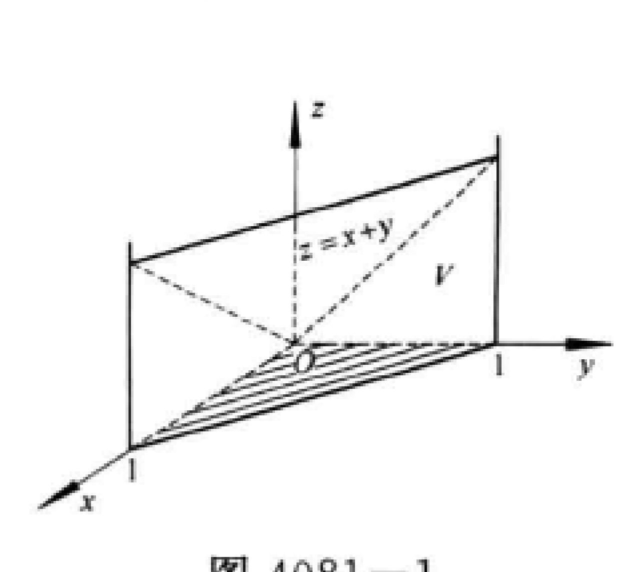


图 4081－1

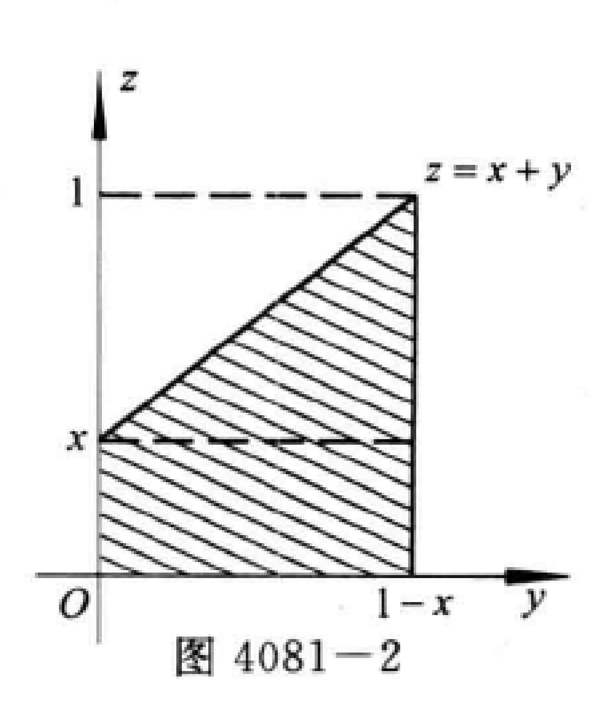


图 4081－2

如果先对 y 积分，再对 z,x 积分，如图 4081－2 所示，则积分域在 Oyz 平面上的投影域由诸直线

$$z=0,\quad z=x+y,\quad y=0,\quad y=1-x\quad (x\text{ 固定})$$

围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dx\left\{\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy\right\}^{*)},$$

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，如图 4081－3 所示，则有

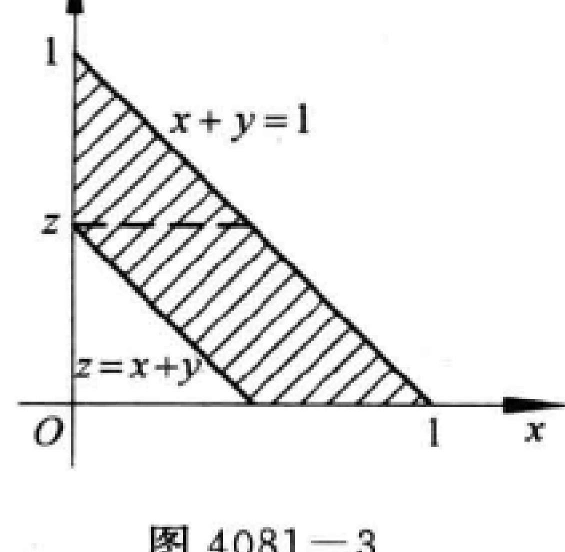
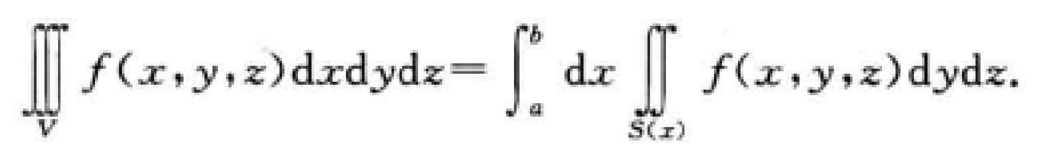


图 4081－3

$$\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left\{\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx\right\}.$$

*) 这里用的公式为



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dx\iint\limits_{S(x)} f(x,y,z)dydz.$$

【4083】 $\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz.$

解 如果先对 y 积分，再对 z、x 积分，则积分域在 Oxy 平面上的投影域*)由方程

$$x=1,\ z=0,\ z=x^2\quad 及\quad x=0,\ x=1,\ z=x^2,\ z=x^2+1$$

所表示的曲线围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz=\int_0^1 dx\left[\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy\right].$$

如果先对 x 积分，再对 z、y 积分，不难由轮换对称关系得出结果.

如果先对 x 积分，再对 y、z 积分，则积分域在 Oyz 平面上的投影域由方程

$$y=1,\ z=0,\ y=\sqrt{z}\quad 及\quad y=0,\ y=1,\ y=\sqrt{z},\ y=\sqrt{z-1}$$

所表示的曲线围成. 于是，我们有

$$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$$

$$=\int_0^1 dz\left[\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx+\int_{\sqrt{z}}^1 dy\int_0^1 f(x,y,z)dx\right]+\int_1^2 dz\int_{\sqrt{z-1}}^1 dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)dx.$$

*) 这里采用的投影方式系用结果



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S \mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{y_1}^{y_2} f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

变换为球坐标,计算积分:

【4087】 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 V 是曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant r\leqslant\sin\psi$,且 $|I|=r^2\cos\psi$.

解 令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,则曲面 $x^2+y^2+z^2=z$ 化为 $r=\sin\psi$. 从而,

$$V:0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sin\psi,\ |I|=r^2\cos\psi.$$

于是,

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sin\psi} r\cdot r^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\cos\psi\mathrm{d}\psi=\frac{\pi}{10}.$$

【4090】 进行适当的变量代换,计算三重积分

$$\iiint\limits_S \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,

则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$,且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限)有 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant r\leqslant1$.

解 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$, $y=br\sin\varphi\cos\psi$, $z=cr\sin\psi$,

则有 $|I|=abcr^2\cos\psi$,且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant1.$$

于是,

$$\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 abcr^2\cos\psi\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r=4\pi\int_0^1 abcr^2\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\mathrm{d}t=\frac{\pi abc}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4t)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2abc}{4}.$$

【4091】 变换为圆柱坐标,计算积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 V 是曲面 $x^2+y^2=2z$, $z=2$ 所围的区域.

提示 注意积分域 V 为 $0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$, $0\leqslant r\leqslant2$, $\frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant2$,且 $|I|=r$.

解 令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=z$,则 $x^2+y^2=2z$ 化为 $r^2=2z$. 积分域

$$V:0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant2,\ \frac{r^2}{2}\leqslant z\leqslant2.\quad |I|=r.$$

于是,
$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^2\mathrm{d}z=\frac{16\pi}{3}.$$

【4097】 证明:若函数 $f(x,y,z)$ 在区域 V 内是连续的,且对于任何区域 $\omega\subset V$ 有

$$\iiint\limits_\omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

则当 $(x,y,z)\in V$ 时, $f(x,y,z)\equiv0$.

提示 用反证法及积分中值定理.

证 用反证法. 若当 $(x,y,z)\in V$ 时, $f(x,y,z)\neq0$. 不失一般性,设对于 V 的某内点 (x_0,y_0,z_0),有

$f(x_0,y_0,z_0)>0$，则由于 $f(x,y,z)$ 的连续性，故存在点 (x_0,y_0,z_0) 的某个闭邻域 $\omega'\subset V$，使当 $(x,y,z)\in\omega'$ 时，$f(x,y,z)>0$. 这样一来，利用中值定理，即有

$$\iiint_{\omega'} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot V_{\omega'}>0,$$

其中 $(\xi,\eta,\zeta)\in\omega'\subset V$. 这与假设 $\iiint_{\omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\equiv 0$ 矛盾. 因此，当 $(x,y,z)\in V$ 时，$f(x,y,z)\equiv 0$.

§7. 利用三重积分计算体积

区域的体积 V 可表示为以下公式： $\quad V=\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

求以下列曲面为界的物体的体积：

【4104】 $az=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}\quad(a>0)$.

解 对区域 V 在 Oxy 平面上的投影作极坐标变换

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi,$$

则区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant a,\quad \frac{r^2}{a}\leqslant z\leqslant r,$$

且有 $|I|=r$. 于是，体积为

$$V=\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{a}}^{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a\left(r^2-\frac{r^3}{a}\right)\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{6}.$$

【4105】 $az=a^2-x^2-y^2,\ z=a-x-y,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a>0)$.

解 由 $az=a^2-x^2-y^2, x=0, y=0, z=0$ 为界的物体体积为

$$V_1=\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant a^2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}\left(\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{a}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a\frac{a^2-r^2}{a}r\mathrm{d}r=\frac{\pi a^3}{8}.$$

由 $z=a-x-y, x=0, y=0, z=0$ 为界的物体体积为

$$V_2=\iiint_{\substack{x+y+z\leqslant a\\x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{a-x-y}\mathrm{d}z=\frac{a^3}{6}.$$

于是，所求的体积为 $V=V_1-V_2=\dfrac{a^3}{24}(3\pi-4)$.

变换为球坐标或圆柱坐标，计算以下曲面所围的体积：

【4107】 $x^2+y^2+z^2=2az,\ x^2+y^2\leqslant z^2$.

解题思路 变换为圆柱坐标，则有

$$r^2+z^2=2az\quad 及\quad r^2\leqslant z^2,$$

且区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2},$$

这里要注意，球面方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的上半部，故取 $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

解 变换为圆柱坐标，则有 $\quad r^2+z^2=2az\quad 及\quad r^2\leqslant z^2$.

因而区域 V 为
$$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,\ 0\leqslant r\leqslant a,\ r\leqslant z\leqslant a+\sqrt{a^2-r^2}\,^{*)}.$$

于是，体积为

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r(a+\sqrt{a^2-r^2}-r)\mathrm{d}r=2\pi\left[\frac{ar^2}{2}-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^a=\pi a^3.$$

*) 球面的方程应该是 $z=a\pm\sqrt{a^2-r^2}$，但因体积 V 的一部分为球 $x^2+y^2+z^2=2az$ 的上半部，故取 $z=a+\sqrt{a^2-r^2}$.

【4109】 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

解 立体在第一，第三，第六及第八卦限内，对于这些卦限分别有：

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0;\quad x\leqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\geqslant 0;\quad x\leqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\leqslant 0;\quad x\geqslant 0,\ y\leqslant 0,\ z\leqslant 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分，一对一对地对称于坐标轴之一. 这是因为左端及右端当 x,y,z 中的任何两个同时变号时等号不变.

变换为球坐标，计算得体积

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{3\cos^2\psi\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi}}r^2\cos\psi\mathrm{d}r=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\sin\psi\mathrm{d}\psi$$

$$=4\left(\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\left(-\frac{1}{4}\cos^4\psi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

在下列各题中最好利用广义球坐标 r,φ,ψ（$r\geqslant 0$；$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$；$-\frac{\pi}{2}\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$），它们由以下公式引入：

$$x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\quad y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\quad z=cr\sin^\beta\psi\quad (a,b,c,\alpha,\beta\ \text{为常数}),$$

并且

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)}=\alpha\beta abcr^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\cos^{2\beta-1}\psi\sin^{\beta-1}\psi.$$

求以下列曲面为界的物体的体积：

【4111】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x}{h}$.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则区域的 $\frac{1}{4}$ 部分（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}.$$

于是，体积为 $V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h}\cos\varphi\cos\psi}}abcr^2\cos\psi\mathrm{d}r=\frac{4a^2bc}{3h}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\mathrm{d}\psi\right)=\frac{\pi a^2bc}{3h}$.

【4115】 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=1$.

解题思路 作变量代换 $x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$，则有 $|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$，且 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分（第一卦限内）为 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant r\leqslant 1$，并利用 3856 题的结果及延拓公式.

解 令 $x=ar\cos\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$y=br\sin\varphi\cos^{\frac{1}{2}}\psi$，$z=cr\sin^{\frac{1}{2}}\psi$，则有 $|I|=\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 区域 V（第一卦限内）为

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是，体积为

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1\frac{1}{2}abcr^2\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\psi\mathrm{d}\psi=\frac{2}{3}\pi abc\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)^{*)}$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}\pi abc\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{1}{3}\pi abc\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{2}\,\pi}{}^{**)}$$

$$=\frac{1}{3}abc\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

*) 利用 3856 题的结果.

* *) 利用延拓公式：$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}$.

利用适当的变量代换，计算以下列曲面为界的物体的体积(假定参数是正的)：

【4119】+ $z=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2), xy=a^2, xy=2a^2, x=2y, 2x=y\ (x>0, y>0)$.

解题思路 作变量代换 $z=u(x^2+y^2), xy=v, x=yw$，则

$$x=\sqrt{vw},\ y=\sqrt{\frac{v}{w}},\ z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right)\quad 及\quad |I|=\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2},$$

且区域 V 为 $1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\quad \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2$.

解 令 $z=u(x^2+y^2), xy=v, x=yw$，则

$$x=\sqrt{vw},\quad y=\sqrt{\frac{v}{w}},\quad z=u\left(vw+\frac{v}{w}\right).$$

变换的雅可比行列式为

$$I=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw+\frac{v}{w} & u\left(w+\frac{1}{w}\right) & u\left(v-\frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}=-\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right),$$

而区域 V 为

$$1\leqslant u\leqslant 2,\quad a^2\leqslant v\leqslant 2a^2,\quad \frac{1}{2}\leqslant w\leqslant 2.$$

于是，体积为

$$V=\int_1^2 \mathrm{d}u\int_{a^2}^{2a^2}\mathrm{d}v\int_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{4128v}{2}+\frac{v}{2w^2}\right)\mathrm{d}w=\frac{3a^4}{4}\int_{\frac{1}{2}}^2\left(1+\frac{1}{w^2}\right)\mathrm{d}w=\frac{9a^4}{4}.$$

【4128】 求以曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=h^2$$

为界的物体的体积，设

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0.$$

解 令 $a_1x+b_1y+c_1z=u,\quad a_2x+b_2y+c_2z=v,\quad a_3x+b_3y+c_3z=w$,

则有 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\Delta$. 于是，$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{1}{\Delta}$，且体积为

$$V=\frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant h^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

§8. 三重积分在力学上的应用

1° **物体的质量** 若一物体占有区域 V, $\rho=\rho(x,y,z)$ 为它在点 (x,y,z) 的密度，则该物体的质量等于

$$M=\iiint\limits_V \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{1}$$

2° **物体的质心** 物体的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 按下列公式来计算

$$\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ y_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ z_0=\dfrac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{2}$$

若物体是均匀的，则在公式(1)和(2)中可令 $\rho=1$.

3° **转动惯量** 积分

$$I_{xy}=\iiint\limits_V \rho z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{yz}=\iiint\limits_V \rho x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad I_{zx}=\iiint\limits_V \rho y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

分别称为物体对坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l=\iiint\limits_V \rho r^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

(其中 r 为物体各点 (x,y,z) 与轴 l 的距离)称为物体对于某轴 l 的转动惯量. 特别是，对于坐标轴 Ox,Oy,Oz 分别有

$$I_x=I_{xy}+I_{xz},\quad I_y=I_{yx}+I_{yz},\quad I_z=I_{zx}+I_{zy}.$$

积分

$$I_0=\iiint\limits_V \rho(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

称为物体对坐标原点的转动惯量.

显然有

$$I_0=I_{xy}+I_{yz}+I_{zx}.$$

4° **引力势** 积分

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_V \rho(\xi,\eta,\zeta)\,\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}$$

称为物体在点 $P(x,y,z)$ 的牛顿引力势. 式中 V 为物体所占区域，$\rho=\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 为物体的密度，且

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}.$$

质量为 m 的质点吸引物体的力在坐标轴 Ox,Oy,Oz 上的投影 X,Y,Z 分别等于

$$X=cm\frac{\partial u}{\partial x}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\xi-x}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\quad Y=cm\frac{\partial u}{\partial y}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\eta-y}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,\quad Z=cm\frac{\partial u}{\partial z}=cm\iiint\limits_V \rho\,\frac{\zeta-z}{r^3}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

其中 c 为引力常量.

【4132】 若物体的密度按规律 $\rho=\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0>0$ 及 $k>0$ 为常数)而变化，求占有无限区域 $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$，则质量为

$$M=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geqslant 1}\rho_0\mathrm{e}^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}r^2\rho_0\mathrm{e}^{-kr}\cos\psi\mathrm{d}r=4\pi\rho_0\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-kr}\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}r^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-kr}=-\frac{4\pi\rho_0}{k}r^2\mathrm{e}^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{4\pi\rho_0}{k}\int_1^{+\infty}2r\mathrm{e}^{-kr}\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi\rho_0}{k}\mathrm{e}^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}r\mathrm{d}\mathrm{e}^{-kr}$$

$$=\frac{4\pi\rho_0}{k}\mathrm{e}^{-k}-\frac{8\pi\rho_0}{k^2}r\mathrm{e}^{-kr}\Big|_1^{+\infty}+\frac{8\pi\rho_0}{k^2}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-kr}\,\mathrm{d}r=4\pi\rho_0\mathrm{e}^{-k}\left(\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$$

求以下列曲面为界的均匀物体的质心坐标：

【4134】 $z=x^2+y^2$，$x+y=a$，$x=0$，$y=0$，$z=0$.

解 物体的质量为
$$M=\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{6}a^4.$$
质心的横坐标为
$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{a^5}{15}=\frac{2a}{5}.$$
同理可求得 $y_0=\frac{2a}{5}$，而
$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{a-x}\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z=\frac{1}{M}\int_0^a\left(\frac{a^5}{10}-\frac{1}{2}a^4x+\frac{4}{3}a^3x^2-2a^2x^3+2ax^4-\frac{14}{15}x^5\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{6}{a^4}\cdot\frac{7}{180}a^6=\frac{7}{30}a^2.$$
于是，质心的坐标为 $x_0=y_0=\frac{2}{5}a$，$z_0=\frac{7}{30}a^2$.

【4137】 $x^2+z^2=a^2$，$y^2+z^2=a^2$ $(z>0)$.

解 物体的质量为 $M=\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=4\int_0^a(a^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8a^3}{3}$.

于是，
$$x_0=\frac{1}{M}\int_0^a\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}x\mathrm{d}x=0.$$
同理可得 $y_0=0$，而
$$z_0=\frac{1}{M}\int_0^a z\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\mathrm{d}x=a^4\cdot\frac{3}{8a^3}=\frac{3}{8}a.$$
于是，质心的坐标为 $x_0=y_0=0$，$z_0=\frac{3}{8}a$.

求以下列曲面(参变量是正的)为界的均匀物体对于坐标平面的转动惯量：

【4144】 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

提示 作代换 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，并利用对称性.

解 若令 $x=ar\cos\varphi\cos\psi$，$y=br\sin\varphi\cos\psi$，$z=cr\sin\psi$，则有
$$I_{xy}=abc^3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^4\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}r=\frac{abc^3}{5}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\sin^2\psi\mathrm{d}\psi=\frac{abc^3}{15}2\pi\sin^3\psi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$
利用对称性可得
$$I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc,\qquad I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

【4151】 证明等式：
$$I_l=I_{l_0}+Md^2.$$
其中 I_l 为物体对某轴 l 的转动惯量，I_{l_0} 为对平行于 l 并通过物体质心的轴 l_0 的转动惯量，d 为此二轴之间的距离及 M 为物体的质量.

证 取质心为坐标原点 O，z 轴与 l_0 重合，l 与 Oxy 平面的交点为 $(\zeta,\eta,0)$，如图 4151 所示，则
$$I_l=\iiint_V[(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2]\rho\mathrm{d}v$$
$$=\iiint_V(x^2+y^2)\rho\mathrm{d}v+(\zeta^2+\eta^2)\iiint_V\rho\mathrm{d}v-2\zeta\iiint_V x\rho\mathrm{d}v-2\eta\iiint_V y\rho\mathrm{d}v\quad(1)$$
由于质心在原点，故 $x_0=y_0=0$，即

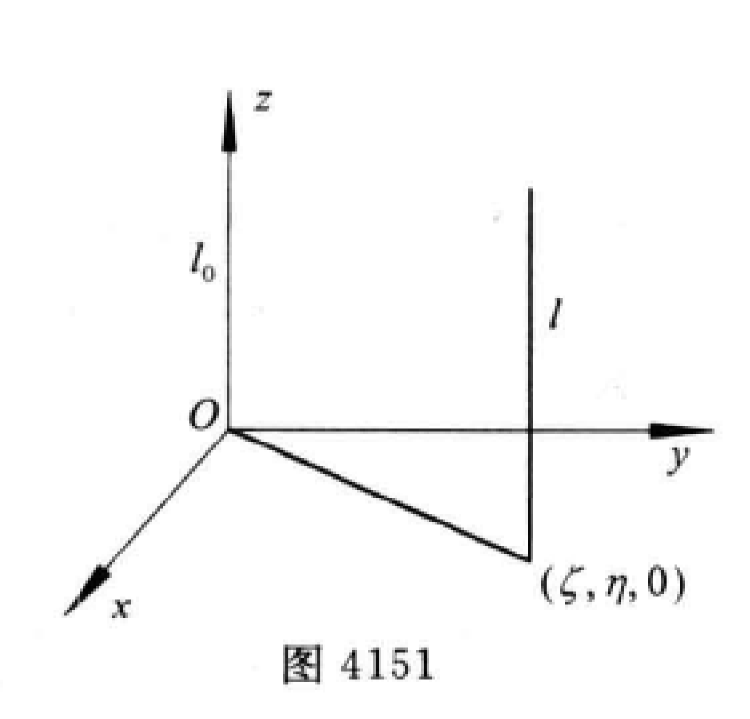


图 4151

$$x_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V x\rho\mathrm{d}v=0 \quad 及 \quad y_0=\frac{1}{M}\iiint\limits_V y\rho\mathrm{d}v=0,$$

并且 $M=\iiint\limits_V \rho\mathrm{d}v, d^2=\zeta^2+\eta^2$，代入(1)式，最后得 $I_l=I_{l_0}+Md^2$.

【4152】 证明：占有区域 V 的物体对过其质心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α,β,γ 的轴 l 的转动惯量等于：$I_l=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\alpha\cos\gamma$，

其中 I_x,I_y,I_z 为物体对坐标轴的转动惯量，而

$$K_{xy}=\iiint\limits_V\rho xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{zx}=\iiint\limits_V\rho xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad K_{yz}=\iiint\limits_V\rho yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

为惯性积.

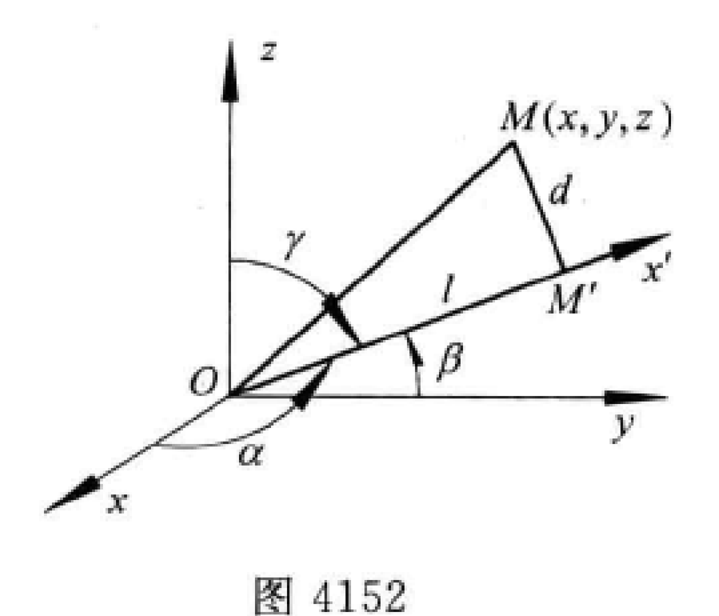


图 4152

证 如图 4152 所示. 距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{OM'}|}{|\overrightarrow{OM'}|}$$

$$=\frac{1}{r}\sqrt{\begin{vmatrix} y & z \\ r\cos\beta & r\cos\gamma\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z & x \\ r\cos\gamma & r\cos\alpha\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x & y \\ r\cos\alpha & r\cos\beta\end{vmatrix}^2}$$

其中 $r=|\overrightarrow{OM'}|$. 由于 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，故有

$$d^2=(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(y^2+z^2)\cos^2\alpha+(z^2+x^2)\cos^2\beta-2xy\cos\alpha\cos\beta-2yz\cos\beta\cos\gamma-2xz\cos\alpha\cos\gamma.$$

于是，

$$\begin{aligned}I_l&=\iiint\limits_V\rho d^2\cdot\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\cos^2\gamma\iiint\limits_V\rho\cdot(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos^2\alpha\iiint\limits_V\rho\cdot(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos^2\beta\iiint\limits_V\rho\cdot(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&\quad-2\cos\alpha\cos\beta\iiint\limits_V\rho xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\beta\cos\gamma\iiint\limits_V\rho yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2\cos\gamma\cos\alpha\iiint\limits_V\rho xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=I_x\cos^2\alpha+I_y\cos^2\beta+I_z\cos^2\gamma-2K_{xy}\cos\alpha\cos\beta-2K_{yz}\cos\beta\cos\gamma-2K_{zx}\cos\gamma\cos\alpha.\end{aligned}$$

证毕.

【4155】 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$ 在点(x,y,z)的牛顿引力势.

提示 取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即易获解.

解 由对称性显然可知，所求的牛顿引力势与 ξ,η,ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x,y,z)$，即得牛顿引力势

$$u(x,y,z)=\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\rho_0\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}}=\rho_0\int_{-R}^{R}\mathrm{d}\zeta\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant R^2-\zeta^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-r)^2}},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 积分之，得

$$u(x,y,z)=2\pi\rho_0\int_{-R}^{R}(\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}-|\zeta-r|)\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $$\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-2r\zeta+r^2}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{3r}[(R+r)^3-|R-r|^3]=\begin{cases}\dfrac{2}{3}R^3\dfrac{1}{r}+2rR, & r>R,\\[2mm] \dfrac{2}{3}r^2+2R^2, & r\leqslant R,\end{cases}$$

及 $$\int_{-R}^{R}|\zeta-r|\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}2Rr, & r>R,\\ r^2+R^2, & r\leqslant R.\end{cases}$$

因而，最后得 $$u(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{4}{3r}\pi R^3\rho_0, & r>R,\\[2mm] 2\pi\rho_0\left(R^2-\dfrac{1}{3}r^2\right), & r\leqslant R.\end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论：

(1)在球外一点上的牛顿引力势，与将球的全部质量集中在它的中心处时一样；

(2)如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球，则它在位于其空隙处的一点($r<R$)上的牛顿引力势可表示成差

$$u(x,y,z)=u_2(x,y,z)-u_1(x,y,z)=\left(R_2^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0-\left(R_1^2-\frac{1}{3}r^2\right)2\pi\rho_0=2\pi(R_2^2-R_1^2)\rho_0.$$

它与 r 无关，故空心球体在其空隙范围内的引力势保持一个常数值.

【4159】 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 $\xi^2+\eta^2\leqslant a^2$，$0\leqslant\zeta\leqslant h$ 对单位质量质点 $P(0,0,z)$的引力.

解 由对称性知，引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的投影为零，即 $X=Y=0$. 若引用柱坐标，即得引力在 Oz 轴上的投影为

$$Z=k\rho_0\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\leqslant a^2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[\xi^2+\eta^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}=k\rho_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r\mathrm{d}r\int_0^h\frac{(\zeta-z)\mathrm{d}\zeta}{[r^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=2\pi k\rho_0\int_0^a r\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]\mathrm{d}r=2\pi k\rho_0[\sqrt{a^2+z^2}-\sqrt{a^2+(h-z)^2}-|z|+|h-z|].$$

易知，当 $0\leqslant z<\dfrac{h}{2}$ 时，$Z>0$，此时吸引力朝着向上的铅垂线；

当 $\dfrac{h}{2}<z\leqslant h$ 时，$Z<0$，此时吸引力朝着向下的铅垂线；

当 $z=\dfrac{h}{2}$ 时，$Z=0$，引力为零.

§9. 二重和三重广义积分

1° **无界区域的情形** 若二维区域 Ω 是无界的，函数 $f(x,y)$在区域 Ω 上连续，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{\Omega_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{1}$$

其中 Ω_n 是可求积有界封闭区域，并且它们组成 Ω 的任意一个竭尽递增序列*. 若右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关，则相应积分称为收敛的；否则称为发散的.

类似地定义出连续函数在无界三维区域上的三重广义积分.

2° **不连续函数的情形** 若函数 $f(x,y)$在有界封闭区域 Ω 内除了点 $P(a,b)$而外处处是连续的，则定义：

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint\limits_{\Omega-U_\varepsilon}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\tag{2}$$

其中 U_ε 是包含点 P 的以 ε 为直径的区域，并且当极限存在时，所研究的积分称为收敛的；否则称为发散的.

假定在点 $P(a,b)$的邻近有等式

$$f(x,y)=\frac{\varphi(x,y)}{r^a},$$

其中函数 $\varphi(x,y)$的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间，且

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

则 1)当 $a<2$ 时，积分(2)收敛；2)当 $a\geqslant2$ 时，积分(2)发散.

若函数 $f(x,y)$有不连续的线，也可类似地定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分的概念易于引伸到三重积分的情形.

---

* 区域 Ω 的竭尽递增序列是指这样的序列 Ω_n，对任意正整数 n 有 $\Omega_n\subset\Omega_{n+1}\subset\Omega$，且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Omega_n=\Omega$.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$:

【4161】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解题思路 注意到广义重积分收敛必绝对收敛.

由题设知,所给积分与积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 由于$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$是正的,从而引用极坐标,即可知所给积分当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant1$ 时发散.

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

与积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 同时收敛或同时发散. 由于$\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}$是正的,故引用极坐标,得

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{1}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_1^{+\infty}\frac{r}{r^{2p}}\mathrm{d}r=\begin{cases}\dfrac{\pi}{p-1}, & p>1,\\ +\infty, & p\leqslant1.\end{cases}$$

由此可知,原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leqslant1$ 时发散.

【4164】 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,q>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant0,y\geqslant0\\x+1\geqslant1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q},\tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\geqslant1,x^p+y^q\leqslant2\right\}$,$\Omega_2=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\geqslant1,x^p+y^q\geqslant2\right\}$,令 $\Omega_3=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x^p+y^q\geqslant2\right\}$,易知,当 $x\geqslant0,y\geqslant0,x^p+y^q\geqslant2$ 时必有$x+y\geqslant1$(因若 $x+y<1$,则必有 $0\leqslant x<1,0\leqslant y<1$,从而,$0\leqslant x^p<1,0\leqslant y^q<1$,这就会得出 $x^p+y^q<2$),故 $\Omega_2=\Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域,故(1)式右端第一个积分为常义积分,因此,广义积分

$$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分$\displaystyle\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}$的敛散性,在此积分中作变量代换 $x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta$, $y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta$,

则易知
$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是,注意到被积函数是非负的,得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知,右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛,且其值为$\dfrac{1}{2}\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{p}\right)$;而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3<-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$)时收敛,当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\geqslant-1$(即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geqslant1$)时发散.

综上所述,可知广义积分$\iint\limits_{|x|+|y|\geqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$仅当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<1$时收敛.

【4166】 证明:若连续函数$f(x,y)$不为负及$S_n(n=1,2,\cdots)$为有界闭区域,并且组成区域S的任意一个竭尽递增序列.则

$$\iint\limits_S f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭区域的序列$S_n'(n=1,2,\cdots)$,$S_1'\subset S_2'\subset\cdots\subset S_n'\subset\cdots\subset S$,且$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S'_n=S$.由于$f(x,y)$在$S$上非负,故积分序列$\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$是递增的,从而,极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

存在(是有限数或是$+\infty$).我们要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I.$ (2)

先设I为有限数.任给$\varepsilon>0$,由(1)式知,存在N,使当$n\geqslant N$时,恒有

$$I-\varepsilon<\iint\limits_{S'_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon. \tag{3}$$

又存在n_0,使当$n\geqslant n_0$时,$S_n\supset S_N'$.从而,根据$f(x,y)$的非负性以及(3)式,得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S'_N}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>I-\varepsilon.$$

另一方面,对每个固定的$n\geqslant n_0$又必存在某个充分大的$k_n(\geqslant N)$使$S_{k_n}'\supset S_n$.于是,再由(3)式得

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{S'_{k_n}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon.$$

由此可知,当$n\geqslant n_0$时,恒有 $I-\varepsilon<\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<I+\varepsilon,$

故(2)式成立.

次设$I=+\infty$.任给$M>0$,由(1)式知,存在N_1,使

$$\iint\limits_{S'_{N_1}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M.$$

又存在n_1,使当$n\geqslant n_1$时,恒有$S_n\supset S'_{N_1}$,从而,此时有

$$\iint\limits_{S_n}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_{S'_{N_1}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>M,$$

故(2)式成立.证毕.

计算下列积分(参数是正的):

【4169】 $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant1\\x\geqslant1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}.$

解 由于被积函数非负,故 $I=\iint\limits_{\substack{xy\geqslant1\\x\geqslant1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^py^q}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}.$

而当$q>1$时, $\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^q}=\frac{x^{q-1}}{q-1}.$

(注意,当 $q\leqslant 1$ 时,此积分发散,从而,$I=+\infty$);又当 $p>q$ 时,

$$I=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty} x^{q-p-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意,当 $p\leqslant q$ 时,此积分发散,$I=+\infty$)

综上所述,可知:当 $p>q>1$ 时, $\iint\limits_{\substack{xy\geqslant 1\\ x\geqslant 1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}=\frac{1}{(p-q)(q-1)}$.

变换为极坐标,计算下列积分:

【4175】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

提示 注意到被积函数非负,采用极坐标即可获解.

解 由于被积函数非负,故采用极坐标就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=2\pi\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=+\infty}=\pi\ .$$

计算下列积分:

【4178】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $a<0$, $ac-b^2>0$.

解 我们有(令 $\delta=ac-b^2>0$,$t=x+\frac{b}{a}y$)

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f\\&=a\left(x^2+\frac{2b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}y^2\right)+\frac{ac-b^2}{a}y^2+2dx+2ey+f\\&=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{\delta}{a}y^2+2dx+2ey+f=at^2+\frac{\delta}{a}y^2+2d\left(t-\frac{b}{a}y\right)+2ey+f\\&=a\left(t^2+\frac{2d}{a}t+\frac{d^2}{a^2}\right)-\frac{d^2}{a}+\frac{\delta}{a}\left[y^2+\frac{2}{\delta}(ae-bd)y+\frac{(ae-bd)^2}{\delta^2}\right]-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}+f\\&=a\left(t+\frac{d}{a}\right)^2+\frac{\delta}{a}\left(y+\frac{ae-bd}{\delta}\right)^2+\beta,\end{aligned}$$

其中
$$\begin{aligned}\beta&=f-\frac{d^2}{a}-\frac{(ae-bd)^2}{a\delta}=\frac{1}{a\delta}[af(ac-b^2)-d^2(ac-b^2)-(ae-bd)^2]\\&=\frac{1}{\delta}(acf-b^2f-cd^2-ae^2+2bde)=\frac{\Delta}{\delta},\end{aligned}$$

这里

$$\Delta=\begin{vmatrix}a&b&d\\b&c&e\\d&e&f\end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases}u=\sqrt{-a}x+\dfrac{b\sqrt{-a}}{a}y+\dfrac{d\sqrt{-a}}{a}\\[2mm] v=\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\ y+\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\dfrac{ae-bd}{\delta},\end{cases}\qquad(1)$$

则 $\varphi(x,y)=-u^2-v^2+\beta$. 又

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}\sqrt{-a}&\dfrac{b}{a}\sqrt{-a}\\0&\sqrt{-\dfrac{\delta}{a}}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\sqrt{\delta}}>0.$$

故线性变换(1)是非退化的，它将(x,y)平面的点与(u,v)平面的点一一对应. 于是，利用4175题的结果，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varphi(x,y)}\,dx\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2-v^2+\beta}\frac{1}{\sqrt{\delta}}\,du\,dv=\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}\,du\,dv=\frac{\pi}{\sqrt{\delta}}e^{\frac{\Delta}{\delta}}.$$

研究下列不连续函数的二重广义积分的收敛性 $(0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M)$：

【4182】 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy.$

解 由于 $\quad x^2+xy+y^2=\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x+y)^2>0\quad$ (当$(x,y)\neq(0,0)$时)，

故 $$\frac{m}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+xy+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+xy+y^2)^p}\quad(\text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛，即知积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy\quad\text{与}\quad\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于$\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p}>0$(当$(x,y)\neq(0,0)$时)，采用极坐标即得

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{dx\,dy}{(x^2+xy+y^2)^p}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)^p}\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}},$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)^p}$为常义积分，其值为有限数，而

$$\int_0^1\frac{dr}{r^{2p-1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-p)}, & p<1;\\ +\infty, & p\geqslant1.\end{cases}$$

由此可知：原积分 $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p}\,dx\,dy$ 当$p<1$时收敛，当$p\geqslant1$时发散.

【4183】 $\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}\quad(p>0,q>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}=4\iint\limits_{\substack{x\geqslant0,y\geqslant0\\x+y\leqslant1}}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}=4\iint\limits_{\Omega_1}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}+4\iint\limits_{\Omega_2}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q},\tag{1}$$

其中 $\Omega_1=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1,x^p+y^q\geqslant2^{-p-q}\right\}$，

$\Omega_2=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1,x^p+y^q\leqslant2^{-p-q}\right\}$.

令$\Omega_3=\left\{(x,y)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,x^p+y^q\leqslant2^{-p-q}\right\}$，易知，当$x\geqslant0,y\geqslant0,x^p+y^q\leqslant2^{-p-q}$时，必有$x+y\leqslant1$(因为$x\geqslant0,y\geqslant0,x^p+y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}$，故$x^p\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^p}$，$y^q\leqslant\frac{1}{2^{p+q}}\leqslant\frac{1}{2^q}$，从而，$x\leqslant\frac{1}{2}$，$y\leqslant\frac{1}{2}$，由此知$x+y\leqslant1$). 故$\Omega_3=\Omega_2$. 由于函数$\frac{1}{x^p+y^q}$在有界闭区域$\Omega_1$上连续，故(1)式右端第一个积分为常义积分. 因此，广义积分$\displaystyle\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\frac{dx\,dy}{|x|^p+|y|^q}$的敛散性取决于广义积分$\displaystyle\iint\limits_{\Omega_3}\frac{dx\,dy}{x^p+y^q}$的敛散性.

在此积分中作变量代换 $x=r^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta,\quad y=r^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\theta$，则易知

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}=\frac{4}{pq}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是，注意到被积函数是非负的，得

$$\iint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p+y^q}=\frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r.$$

由 3856 题的结果知,右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\mathrm{d}\theta\quad(p>0,q>0)$$

恒收敛,且其值为$\frac{1}{2}\mathrm{B}(\frac{1}{q},\frac{1}{p})$;而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}}r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}r$$

当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3>-1$ (即$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$)时收敛,当$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3\leqslant-1$ (即$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}\leqslant1$)时发散.

综上所述,可知原积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p+|y|^q}$当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$ 时收敛,当$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\leqslant1$ 时发散.

计算下列积分:

【4189】 $\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域$\Omega$是由直线 $y=0,y=x,x=\pi$ 围成的.

解 作变量代换 $x=u+v,y=u-v$,则 Oxy 平面上的区域Ω 变为 uv 平面上的区域Ω'. 显然 Ω'由直线 $u=v,v=0,u+v=\pi$ 所界. 又有$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-2$. 于是,再注意到被积函数非正,即有

$$\iint\limits_{\Omega}\ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{\Omega'}\ln\sin2v\mathrm{d}u\mathrm{d}v=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}v\int_v^{\pi-v}\ln\sin2v\mathrm{d}u$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin2v\mathrm{d}v=2\ln2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\cos v\mathrm{d}v$$

$$=\pi^2\ln2-\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-2v)\ln\sin v\mathrm{d}v+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2t\ln\sin t\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin v\mathrm{d}v$$

$$=\frac{\pi^2}{2}\ln2+2\pi\left(-\frac{\pi}{2}\ln2\right)^{*)}=-\frac{\pi^2}{2}\ln2.$$

*) 利用 2353 题(1)的结果.

研究下列三重积分的收敛性:

【4191】 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $0<m\leqslant|\varphi(x,y,z)|\leqslant M$.

解题思路 仿 4161 题,所给积分与积分 $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 同时收敛或同时发散. 注意到 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$是正的,采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,即可知当$p>\frac{3}{2}$时收敛,当 $p\leqslant\frac{3}{2}$时发散.

解 由于
$$\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p}\leqslant\frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,可知积分

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad 与\quad\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

同时收敛或同时发散. 由于被积函数$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$是正的,采用球坐标 $x=r\cos\varphi\cos\psi$, $y=r\sin\varphi\cos\psi$, $z=r\sin\psi$,得

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}=4\pi\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}.$$

显然，$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$时收敛，$p\leqslant\frac{3}{2}$时发散；由此可知，$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 当 $p>\frac{3}{2}$时收敛，当 $p\leqslant\frac{3}{2}$时发散.

【4193】 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}\quad(p>0,q>0,r>0).$

解 由对称性及被积函数的非负性，有

$$\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}=8\iiint\limits_{\substack{x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\\x+y+z>1}}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}=8\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}+8\iiint\limits_{\Omega_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}.$$

其中，令

$$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r\leqslant3\},$$
$$\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z>1,x^p+y^q+z^r>3\}.$$

令 $\Omega_3=\{(x,y,z)\,|\,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x^p+y^q+z^r>3\}$，由于当 $x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x^p+y^q+z^r>3$ 时必有 $x+y+z>1$（否则，$x+y+z\leqslant1$，就有 $x\leqslant1,y\leqslant1,z\leqslant1$，从而，$x^p\leqslant1,y^q\leqslant1,z^r\leqslant1$，于是 $x^p+y^q+z^r\leqslant3$），故 $\Omega_2=\Omega_3$. 显然，$\iiint\limits_{\Omega_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$ 为常义积分，故积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ 的敛散性取决于 $\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$ 的敛散性. 对此积分，作变量代换

$$x=R^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi\cos^{\frac{2}{p}}\psi,\quad y=R^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi\cos^{\frac{2}{q}}\psi,\quad z=R^{\frac{2}{r}}\sin^{\frac{2}{r}}\psi.$$

则易知

$$\frac{D(x,y,z)}{D(R,\varphi,\psi)}=\frac{8}{pqr}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-1}\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi.$$

于是，由被积函数的非负性，并利用 3856 题的结果，得

$$\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}=\frac{8}{pqr}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{r}-1}\psi\cos^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\psi\mathrm{d}\psi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{q}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{p}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\cdot\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$$
$$=\frac{8}{pqr}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$$
$$=\frac{2}{pqr}\mathrm{B}\left(\frac{1}{r},\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{q},\frac{1}{p}\right)\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R.$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}R^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3}\mathrm{d}R$ 当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3<-1$（即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$）时收敛，当 $\frac{2}{p}+\frac{2}{q}+\frac{2}{r}-3\geqslant-1$ 时发散，故积分 $\iiint\limits_{\Omega_3}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^p+y^q+z^r}$（从而，积分 $\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$）当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$ 时收敛，当 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant1$ 时发散.

计算下列积分：

【4199】 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

解 采用球坐标，由被积函数的非负性，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=4\pi\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

作代换 $r^2=t$，则 $\quad\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$

于是，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz=\pi^{\frac{3}{2}}.$$

【4200】 计算积分
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3,$$
其中 $P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\,x_i\,x_j\ (a_{ij}=a_{ji})$为正定二次型.

解 用 A 表矩阵
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$是正定的，故由高等代数中关于二次型的理论知：存在正交矩阵
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}, \tag{1}$$
使
$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}, \tag{2}$$
其中 $\lambda_1>0,\lambda_2>0,\lambda_3>0$；也即在线性(正交)变换
$$\begin{cases} x_1=b_{11}x_1'+b_{12}x_2'+b_{13}x_3'\\ x_2=b_{21}x_1'+b_{22}x_2'+b_{23}x_3'\\ x_3=b_{31}x_1'+b_{32}x_2'+b_{33}x_3'\end{cases} \tag{3}$$
之下，二次型 $P(x_1,x_2,x_3)$化为平方和：
$$P(x_1,x_2,x_3)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=\lambda_1x_1'^2+\lambda_2x_2'^2+\lambda_3x_3'^2. \tag{4}$$
注意，由于 B 是正交矩阵，故 $B^{-1}=B'$(B'表 B 的转置矩阵)，从而，$|B|=|b_{ij}|=\pm1$. 显然，
$$\frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(x_1',x_2',x_3')}=|b_{ij}|=\pm1.$$
由(4)式，有
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1x_1'^2-\lambda_2x_2'^2-\lambda_3x_3'^2}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'. \tag{5}$$
再作变量代换 $x_1'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1,x_2'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2,x_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}u_3$，则
$$\frac{D(x_1',x_2',x_3')}{D(u_1,u_2,u_3)}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.$$
于是(注意 4199 题的结果)，
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1x_1'^2-\lambda_2x_2'^2-\lambda_3x_3'^2}\,dx_1'\,dx_2'\,dx_3'=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2+u_2^2+u_3^2)}\,du_1\,du_2\,du_3=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}. \tag{6}$$

但由(2)式知(记 $\Delta=|a_{ij}|=|A|$，注意，由于 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$ 是正定的，故 $\Delta>0$)
$$\Delta=|A|=|B^{-1}|\cdot|A|\cdot|B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \tag{7}$$
于是，根据(5)、(6)、(7)诸式，最后得
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1,x_2,x_3)}\,dx_1\,dx_2\,dx_3=\sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}.$$

§10. 多 重 积 分

1° **多重积分的直接计算法** 若函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在由下列不等式确定的有界区域 Ω 内是连续的:

$$\begin{cases} x_1'\leqslant x_1\leqslant x_1'', \\ x_2'(x_1)\leqslant x_2\leqslant x_2''(x_1) \\ \qquad\vdots \\ x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数,$x_2'(x_1)$,$x_2''(x_1)$,$\cdots$,$x_n'(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$,$x_n''(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$ 为连续函数,则相应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_{x_1'}^{x_1''}\mathrm{d}x_1\int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_n'(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{x_n''(x_1,\cdots,x_{n-1})}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_n.$$

2° **多重积分中的变量代换** 若

1)函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在有界可测区域 Ω 内是一致连续的;

2)连续可微函数 $x_i=\varphi_i(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$,把 $Ox_1,x_2,\cdots,x_n$ 空间内的区域 Ω 一一映射成 $O'\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 空间内的有界区域 Ω';

3)在区域 Ω' 内雅可比行列式 $I=\dfrac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)}\neq 0$,

则成立公式

$$\iint_\Omega\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\iint_{\Omega'}\cdots\int f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\,|I|\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n.$$

特别是,根据公式

$$\begin{aligned} x_1&=r\cos\varphi_1, \\ x_2&=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ &\vdots \\ x_{n-1}&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n&=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

变换成极坐标 $(r,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$ 时,有

$$I=\frac{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{D(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})}=r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}.$$

【4202】 设 $f=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为区域 $0\leqslant x_i\leqslant x\ (i=1,2,\cdots,n)$ 内的连续函数,证明等式:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1\quad(n\geqslant 2).$$

证 考虑下面三个有界闭区域:

$$\Omega=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_i\leqslant x,i=1,2,\cdots,n\right\},$$

$$\Omega_1=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_1\leqslant x,0\leqslant x_2\leqslant x_1,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,0\leqslant x_n\leqslant x,x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x,\cdots,x_2\leqslant x_1\leqslant x\right\}.$$

由假定 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在区域 Ω 上连续,显然,$\Omega_1\subset\Omega$,$\Omega_2\subset\Omega$,故 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续.根据化 n 重积分为累次积分的公式,我们有

$$\iint_{\Omega_1}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}f\mathrm{d}x_n,\tag{1}$$

$$\iint_{\Omega_2}\cdots\int f\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.\tag{2}$$

下证 $\Omega_1=\Omega_2$，事实上，若 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$，则

$$0\leqslant x_1\leqslant x, 0\leqslant x_2\leqslant x_1, \cdots, 0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}, \tag{3}$$

从而，
$$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n-2}\leqslant\cdots\leqslant x_2\leqslant x_1\leqslant x. \tag{4}$$

于是，
$$0\leqslant x_n\leqslant x, x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant x, \cdots, x_2\leqslant x_1\leqslant x. \tag{5}$$

由此可知 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$. 反之，若 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_2$，则(5)式成立. 从而，(4)式显然成立，由此又知(3)式成立，故 $(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_1$，于是，$\Omega_1=\Omega_2$ 获证. 由此，再根据(1)式与(2)式，即得

$$\int_0^x \mathrm{d}x_1\int_0^{x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f\mathrm{d}x_n=\int_0^x \mathrm{d}x_n\int_{x_n}^x \mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x f\mathrm{d}x_1.$$

证毕.

计算下列多重积分：

【4205】 $I_n=\underset{\substack{x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant a}}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$.

解 化为累次积分，有

$$I_n=\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n,$$

我们又知

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2}-x_{n-1})^2\Bigg|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\cdots-x_{n-2}}=\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2,$$

$$\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\mathrm{d}x_{n-2}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-3}}\frac{1}{2}(a-x_1-\cdots-x_{n-2})^2\mathrm{d}x_{n-2}$$

$$=\frac{1}{3!}(a-x_1-\cdots-x_{n-3})^3,$$

$$\vdots$$

这样继续下去，显然有

$$\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{a-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\cdots\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}}\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}}\mathrm{d}x_n=\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}.$$

于是，
$$I_n=\int_0^a\frac{1}{(n-1)!}(a-x_1)^{n-1}\mathrm{d}x_1=\frac{a^n}{n!}.$$

【4211】 求 n 维球体 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2$ 的体积.

解 令 $x_i=a\xi_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$，即得体积

$$V_n=\underset{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant a^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=a^nV_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a=1$ 时的 n 维球体的体积. 但是

$$V_n(1)=\underset{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2\leqslant 1}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n=\int_{-1}^1\mathrm{d}\xi_n\underset{\xi_1^2+\cdots+\xi_{n-1}^2\leqslant 1-\xi_n^2}{\iint\cdots\int}\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_{n-1}$$

$$=V_{n-1}(1)\int_{-1}^1(1-\xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}\xi_n=2V_{n-1}(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=2V_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}=V_{n-1}(1)\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)},$$

因为 $V_1(1)=2$，故由上述循环公式可得 $\quad V_n(1)=\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

因此，所求的体积为

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数，分别可得公式

$$V_{2m}=\frac{\pi^m}{m!}a^{2m},\qquad V_{2m+1}=\frac{2\cdot(2\pi)^m}{(2m+1)!!}a^{2m+1}.$$

特别是，对于 V_1,V_2,V_3 可求得熟知的值：$2a,\pi a^2,\frac{4}{3}\pi a^3$.

【4215】 证明等式：$\int_0^x x_1\,dx_1\int_0^{x_1}x_2\,dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\,d\,x_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\,du.$

证 利用 4202 题的结果，即得

$$\int_0^x x_1\,dx_1\int_0^{x_1}x_2\,dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\,d\,x_{n+1}=\int_0^x f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\,dx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\,dx_{n-1}\cdots\int_{x_2}^x x_1\,dx_1$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\,dx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\,dx_{n-1}\cdots\int_{x_3}^x\frac{1}{2}(x^2-x_2^2)x_2\,dx_2$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x x_n\,dx_n\int_{x_n}^x x_{n-1}\,dx_{n-1}\cdots\int_{x_4}^x\frac{1}{2^2\cdot 2}(x^2-x_3^2)^2x_3\,dx_3$$

$$=\cdots$$

$$=\int_0^x f(x_{n+1})\,dx_{n+1}\int_{x_{n+1}}^x\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}(x^2-x_n^2)^{n-1}x_n\,dx_n=\int_0^x\frac{1}{2^n n!}f(x_{n+1})(x^2-x_{n+1}^2)^n\,dx_{n+1}.$$

在上述积分中，将 x_{n+1} 代之以 u，不影响积分的值，故得

$$\int_0^x x_1\,dx_1\int_{x_0}^{x_1}x_2\,dx_2\cdots\int_0^{x_n}f(x_{n+1})\,dx_{n+1}=\frac{1}{2^n n!}\int_0^x(x^2-u^2)^n f(u)\,du.$$

【4216】 证明狄利克雷公式：

$$\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1}}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_n^{p_n-1}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_n=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}\quad(p_1,p_2,\cdots,p_n>0).$$

提示 用数学归纳法证明.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n=1$ 时，公式显然成立，即 $\int\limits_{0\leqslant x_1\leqslant 1}x_1^{p_1-1}\,dx_1=\frac{1}{p_1}=\frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1+1)}.$

其次，设公式对 $n-1$ 成立，今证公式对 n 也成立. 为此，将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1}\,dx_n\underset{\substack{x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leqslant 1-x_n}}{\iint\cdots\int}x_1^{p_1-1}x_2^{p_2-1}\cdots x_{n-1}^{p_{n-1}-1}\,dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}.$$

在里面的 $n-1$ 重积分中作代换

$$x_1=(1-x_n)\xi_1,x_2=(1-x_n)\xi_2,\cdots,x_{n-1}=(1-x_n)\xi_{n-1},$$

即得

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}\int_0^1 x_n^{p_n-1}(1-x_n)x^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}}\,dx_n$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\mathrm{B}(p_n,p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}\cdot\frac{\Gamma(p_n)\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$=\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来，我们得知公式对 n 重积分也正确. 从而，对 n 为任意的正整数时，狄利克雷公式均成立.

【4219】 计算半径为 R，密度为 ρ_0 的均质球对自身的引力势，即求积分

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}}\iiint\frac{dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

解 我们有
$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}dx_1dy_1dz_1\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}.$$

由 4155 题的结果可知
$$\iiint\limits_{x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}\frac{dx_2dy_2dz_2}{r_{1,2}}=2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$. 于是(利用球坐标)，

$$u=\frac{\rho_0^2}{2}\iiint\limits_{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2}\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r_1^2\right)dx_1dy_1dz_1=\frac{\rho_0}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi\int_0^R\left(2\pi R^2-\frac{2}{3}\pi r^2\right)r^2dr$$
$$=\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5.$$

§11. 曲线积分

1° **第一型曲线积分** 若函数 $f(x,y,z)$ 在平滑曲线 C

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)\ (t_0\leqslant t\leqslant T)\tag{1}$$

的各点上有定义并且连续，ds 为弧长的微分，则

$$\int_C f(x,y,z)ds=\int_{t_0}^T f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

这个积分的特征在于它与曲线 C 的方向无关.

2° **第一型曲线积分在力学上的应用** 若 $\rho=\rho(x,y,z)$ 为曲线 C 在点 (x,y,z) 的线密度，则曲线 C 的质量等于：

$$M=\int_C\rho(x,y,z)ds.$$

此曲线的质心坐标 (x_0,y_0,z_0) 由以下公式来表示：

$$x_0=\frac{1}{M}\int_C x\rho(x,y,z)ds,\quad y_0=\frac{1}{M}\int_C y\rho(x,y,z)ds,\quad z_0=\frac{1}{M}\int_C z\rho(x,y,z)ds.$$

3° **第二型曲线积分** 若函数 $P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 在曲线(1)上的各点是连续的，且曲线的方向是使参数 t 增加的方向，则

$$\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$
$$=\int_{t_0}^T\{P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)+Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)+R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\}dt.\tag{2}$$

当沿曲线 C 的方向变更时，此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时变力 $\{P,Q,R\}$ 所作的功.

4° **全微分的情形** 若

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=du,$$

式中 $u=u(x,y,z)$ 为区域 V 内的单值函数，则积分值与完全位于区域 V 内的曲线 C 的形状无关：

$$\int_C Pdx+Qdy+Rdz=u(x_2,y_2,z_2)-u(x_1,y_1,z_1),$$

式中(x_1,y_1,z_1)为积分路径的始点，(x_2,y_2,z_2)为其终点. 最简单的情况下，若区域V是单联通的，而函数P,Q,R有连续的一阶偏导数，则上式成立的充分必要条件为：在区域V内，下列条件恒满足：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时，在区域V是标准长方体这种简单情形下，函数u可按下面的公式来求得

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\mathrm{d}z+c,$$

其中(x_0,y_0,z_0)为区域V内某一固定的点，而c是任意常数.

计算下列第一型曲线积分：

【4225】 $\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$，其中$C$为星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧.

解 按参数方程计算. 若令$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t\quad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

于是，
$$\int_C (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s=4a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t=24a^{\frac{7}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\mathrm{d}(\sin t)=4a^{\frac{7}{3}}.$$

【4243】 计算均匀曲线$y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$从点$A(0,a)$到点$B(b,h)$的弧的质心的坐标.

解 弧长的微分为
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x=\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x.$$

质量为
$$M=\rho_0\int_0^b\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=a\rho_0\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\rho_0\sqrt{h^2-a^2}\,{}^{*)}.$$

于是，质心的坐标为

$$x_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b x\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{\rho_0}{M}\left[ab\operatorname{sh}\frac{b}{a}-a^2\left(\operatorname{ch}\frac{b}{a}-1\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{h^2-a^2}}\left[b\sqrt{h^2-a^2}-a^2\left(\frac{h}{a}-1\right)\right]$$
$$=b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};$$

$$y_0=\frac{\rho_0}{M}\int_0^b y\operatorname{ch}\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\int_0^b\frac{1+\operatorname{ch}2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{a\rho_0}{M}\left[\frac{x}{2}+\frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2x}{a}\right]\Big|_0^b$$
$$=\frac{a\rho_0}{M}\left(\frac{b}{2}+\frac{a}{4}\operatorname{sh}\frac{2b}{a}\right)=\frac{a}{\sqrt{h^2-a^2}}\left(\frac{b}{2}+\frac{h}{2}\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}\right)=\frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}.$$

*) 由$h=a\operatorname{ch}\frac{b}{a}$知：$\operatorname{ch}\frac{b}{a}=\frac{h}{a}$. 从而，$\operatorname{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\operatorname{ch}^2\frac{b}{a}-1}=\frac{\sqrt{h^2-a^2}}{a}$.

在参数增加的方向，沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分：

【4255】 $\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$，其中$ABCDA$为以$A(1,0)$，$B(0,1)$，$C(-1,0)$，$D(0,-1)$为顶点的正方形的围线.

提示 注意正方形各边的方程分别为

$$AB:y=1-x;\quad BC:y=1+x;\quad CD:y=-1-x;\quad DA:y=-1+x.$$

解 正方形各边的方程分别为

$$AB:y=1-x;\quad BC:y=1+x;\quad CD:y=-1-x;\quad DA:y=-1+x.$$

于是，

$$\oint_{ABCDA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{|x|+|y|}=\int_{AB}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x+y}+\int_{BC}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x+y}+\int_{CD}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{-x-y}+\int_{DA}\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x-y}$$
$$=\int_1^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^{-1}2\mathrm{d}x+\int_{-1}^0(1-1)\mathrm{d}x+\int_0^1 2\mathrm{d}x=0.$$

【4257】 $\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$，其中 OmA 为抛物线段 $y=x^2$，OnA 为直线段 $y=x$

解 如图 4257 所示，我们有

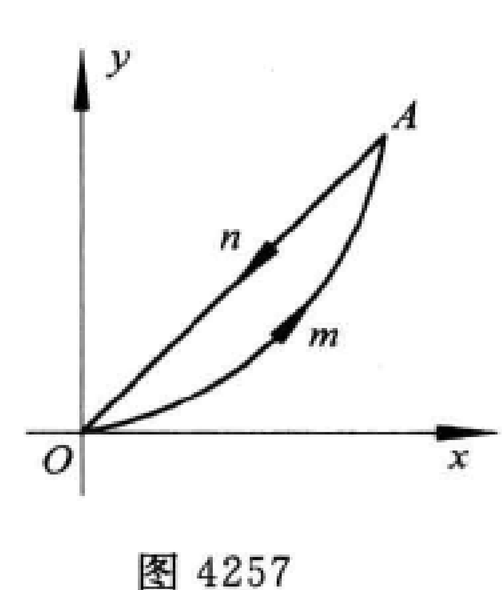


图 4257

$$\oint_{OmAnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=\int_{OmA}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\int_{AnO}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 2x\arctan x\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^0(\arctan 1-1)\mathrm{d}x$$

$$=x^2\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x-1+\left(\frac{\pi}{4}-1\right)x\Big|_1^0$$

$$=\frac{\pi}{4}-(x-\arctan x)\Big|_0^1-1-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=\frac{\pi}{4}-1$$

注 原题为 $\int_{OmAnO}\mathrm{d}y\arctan\frac{y}{x}-\mathrm{d}x$，若把它理解为

$$\int_{OmAnO}\mathrm{d}\left(y\arctan\frac{y}{x}\right)-\mathrm{d}x,$$

则其值为零，与原答案不符.

验证被积函数为全微分，并计算下列曲线积分：

【4262】 $\int_{(0,0)}^{(a,b)}f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，其中 $f(u)$ 为连续函数.

解题思路 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y}f(u)\mathrm{d}u$. 注意

$$F'_x(x,y)=F'_y(x,y)=f(x+y),\quad 及\quad \mathrm{d}F(x,y)=f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),$$

即可获解.

解 令 $F(x,y)=\int_0^{x+y}f(u)\mathrm{d}u$. 由于 $f(u)$ 连续，故

$$F'_x(x,y)=f(x+y),\quad F'_y(x,y)=f(x+y),$$

并且它们都是 x,y 的连续函数. 因此，$F(x,y)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y)=F'_x(x,y)\mathrm{d}x+F'_y(x,y)\mathrm{d}y=f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y),$$

故 $f(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$ 是全微分，并且

$$\int_{(0,0)}^{(a,b)}f(x,y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=F(a,b)-F(0,0)=\int_0^{a+b}f(u)\mathrm{d}u.$$

【4267】 $\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}$ 沿着不与直线 $y=x$ 相交的路径.

解 $P=-\frac{y}{(x-y)^2}$，$Q=\frac{x}{(x-y)^2}$ $(x\neq y)$. 容易验证：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}\quad(x\neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega=\{(x,y)\mid x>y\}$. 由于 Ω 是单连通区域，且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，故在 Ω 上，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某函数 $u=u(x,y)$ 的全微分，从而，在 Ω 上线积分 $\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关. 因此，可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分，得

$$\int_{(0,-1)}^{(1,0)}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\int_0^1\frac{-(-1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int_{-1}^0\frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

注 也可利用简单的技巧求出函数 $u(x,y)$ 来. 我们有

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\frac{(x-y)\mathrm{d}y-y\mathrm{d}(x-y)}{(x-y)^2}=\mathrm{d}\left(\frac{y}{x-y}\right),$$

从而， $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x-y)^2}=\dfrac{y}{x-y}\Bigg|_{(0,-1)}^{(1,0)}=1.$

【4277】 证明下面的估计对于曲线积分是正确的：

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant LM,$$

式中 L 为积分路径的长，$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在弧 C 上）.

证明思路 首先注意到

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\mathrm{d}s,$$

其次，由 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2+(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2+Q^2$ 可知

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2 \quad 或 \quad |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M.$$

从而，命题易获证.

证 由于 $\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|=\left|\int_C (P\cos\alpha+Q\sin\alpha)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_C |P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\mathrm{d}s,$

又因

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-2PQ\sin\alpha\cos\alpha,$$

故有

$$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2,$$

从而，$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M$. 于是，

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_C \mathrm{d}s=LM.$$

【4278】 估计积分 $I_R=\oint_{x^2+y^2=R^2}\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2}$. 证明：$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

提示 注意在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有 $P^2+Q^2\leqslant\dfrac{16}{R^6}$，及 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant\dfrac{4}{R^3}$，并利用 4277 题的结果.

解 在圆 $x^2+y^2=R^2$ 上，有

$$P^2+Q^2=\frac{y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}+\frac{x^2}{(x^2+xy+y^2)^4}=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}.$$
$$=\frac{R^2}{(R^2+xy)^4}\leqslant\frac{R^2}{(R^2-|xy|)^4}\leqslant\frac{R^2}{\left(R^2-\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^4}=\frac{16}{R^6}.$$

于是，$M\leqslant\dfrac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果，即得 I_R 的估计式：

$$|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知：$\lim\limits_{R\to\infty}I_R=0$.

计算下列全微分的曲线积分：

【4289】 $\displaystyle\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$， 式中 f 为连续函数.

解题思路 令 $F(x,y,z)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2+y^2+z^2} f(\sqrt{v})\mathrm{d}v$. 注意

$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，

及

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z),$$

再令 $\sqrt{v}=u$，即可得结果 $\displaystyle\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)\mathrm{d}u$.

解 令 $F(x,y,z)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2+z^2}f(\sqrt{v})\mathrm{d}v$. 由于 f 是连续函数，故

$F'_x(x,y,z)=xf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，$F'_y(x,y,z)=yf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，$F'_z(x,y,z)=zf(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$，并且这些偏导数都是连续的. 因此，$F(x,y,z)$ 可微，且

$$\mathrm{d}F(x,y,z)=F'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+F'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+F'_z(x,y,z)\mathrm{d}z=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).$$

于是，

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)=F(x_2,y_2,z_2)-F(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{2}\int_{x_1^2+y_1^2+z_1^2}^{x_2^2+y_2^2+z_2^2}f(\sqrt{v})\mathrm{d}v^{*)}$$

$$=\int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}uf(u)\mathrm{d}u,$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v}=u$ $(v=u^2,\ \mathrm{d}v=2u\mathrm{d}u)$.

求原函数 u，若：

【4292】 $\mathrm{d}u=\frac{(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

解 由于

$$(x+y-z)\mathrm{d}x+(x+y-z)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z$$
$$=(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+(x+y)\mathrm{d}z-z(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+z\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{d}[(x^2+y^2+2xy)+z^2]+(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y),$$

故 $$\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[(x+y)^2+z^2]}{(x+y)^2+z^2}+\frac{(x+y)\mathrm{d}z-z\mathrm{d}(x+y)}{(x+y)^2+z^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln[(x+y)^2+z^2]+\mathrm{d}\left(\arctan\frac{z}{x+y}\right)$$
$$=\mathrm{d}\left[\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}\right].$$

于是，$u=\ln\sqrt{(x+y)^2+z^2}+\arctan\frac{z}{x+y}+C$.

【4295】$^+$ 当单位质量从点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 时，求引力 $F=\frac{G}{r^2}$（其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$）对它所作的功，其中 G 是引力常量.

解 引力指向坐标原点，故它的方向余弦为

$$\cos\alpha=-\frac{x}{r},\quad \cos\beta=-\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=-\frac{z}{r},$$

而引力的投影为 $$X=-\frac{Gx}{r^3},\quad Y=-\frac{Gy}{r^3},\quad Z=-\frac{Gz}{r^3}.$$

于是，引力所作的功为

$$A=-G\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{r^3}=-\frac{G}{2}\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{G}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Bigg|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$
$$=G\left(\frac{1}{x_2^2+y_2^2+z_2^2}-\frac{1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\right).$$

当然，这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的，上式表明功与路径无关，仅决定于起始点的坐标.

§12. 格 林 公 式

1° **曲线积分与二重积分的关系** 设 C 为分段光滑的简单封闭围线，它围成单连通的有界区域 S，并且当沿着围线正方向移动时，区域 S 保持在左边；此外，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 及其一阶偏导数 $P'_y(x,y)$，

$Q'_x(x,y)$在区域 S 内及其边界上皆是连续的,则成立格林公式

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

若把区域 S 的边界 C 理解为一切边界围线之和,并且这样选取沿围线的环绕方向,使得区域 S 始终位于左边,则公式(1)对于由几个简单围线围成的有界区域 S 也成立.

2° **平面区域的面积** 以分段光滑的简单围线 C 为界的图形的面积 S 等于:

$$S=\oint_C x\mathrm{d}y=-\oint_C y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x.$$

在这一节中,若没有相反的约定,则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点),并这样选取围线的正方向,使得所围不含无穷远点的区域始终位于曲线的左边.

【4297】 应用格林公式,计算曲线积分

$$I=\oint_k(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2)\mathrm{d}y,$$

其中 k 是以 $A(1,1)$,$B(3,2)$,$C(2,5)$为顶点的三角形围线 ABC,并且积分时的环绕方向为正.直接计算积分,以验证所求得的结果.

图 4297

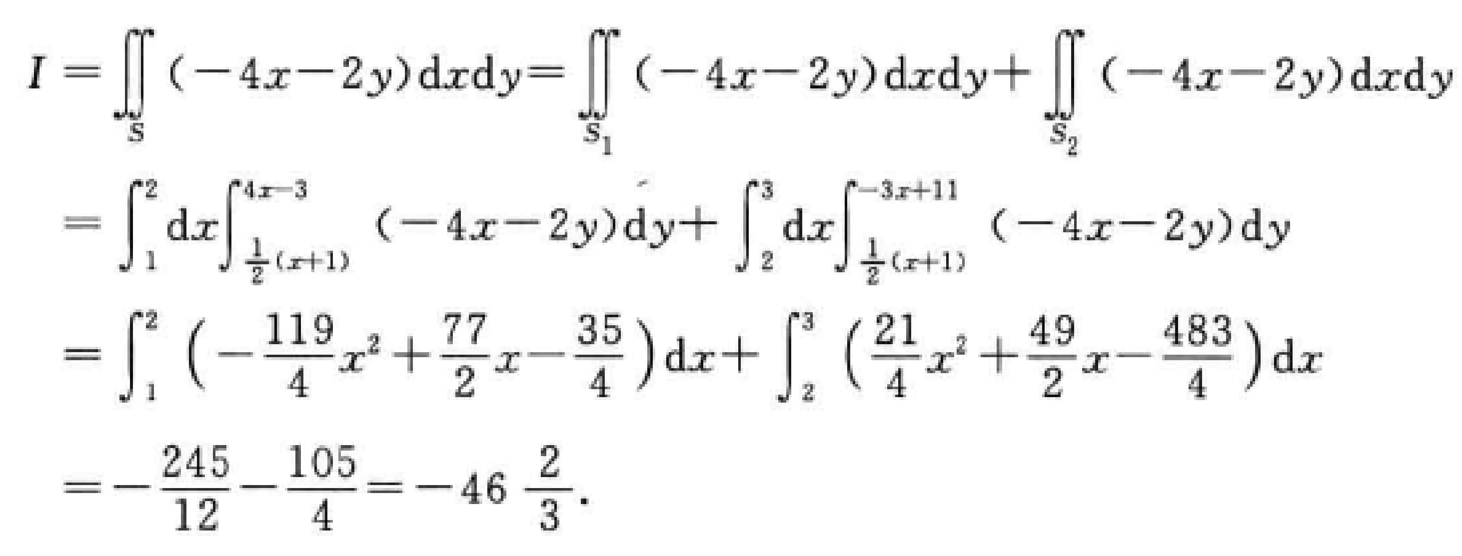
解 如图 4297 所示.AB,BC 及 CA 的方程分别为

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\quad y=-3x+11,\quad y=4x-3.$$

由于 $P=(x+y)^2$,$Q=-(x^2+y^2)$.故

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2x-2(x+y)=-4x-2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴,它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分.于是,



$$\begin{aligned}I&=\iint_S(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3}(-4x-2y)\mathrm{d}y+\int_2^3\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{-3x+11}(-4x-2y)\mathrm{d}y\\&=\int_1^2\left(-\frac{119}{4}x^2+\frac{77}{2}x-\frac{35}{4}\right)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(\frac{21}{4}x^2+\frac{49}{2}x-\frac{483}{4}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{245}{12}-\frac{105}{4}=-46\,\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

如果直接计算,则

$$\begin{aligned}I&=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}\\&=\int_1^3\left[\left(x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]\mathrm{d}x+\int_3^2[(x-3x+11)^2-(-3)\\&\quad\cdot(x^2+9x^2-66x+121)]\mathrm{d}x+\int_2^1[(x+4x-3)^2-4(x^2+16x^2-24x+9)]\mathrm{d}x\\&=\int_1^3\left(\frac{13}{8}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{1}{8}\right)\mathrm{d}x+\int_3^2(34x^2-242x+484)\mathrm{d}x+\int_2^1(-43x^2+66x-27)\mathrm{d}x\\&=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=-46\,\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

应用格林公式,计算下列曲线积分:

【4303】 计算曲线积分 $\displaystyle\int_{AmO}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,

其中 AmO 为由点 $A(a,0)$至点 $O(0,0)$的上半圆周 $x^2+y^2=ax$.

提示 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$与点 $A(a,0)$,这样,便构成封闭的半圆形 $AmOA$,利用格林公式即易

获解.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$，这样，便构成封闭的半圆形 $AmOA$，且在线段 OA 上，

$$\int_{OA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0.$$

从而，$\oint_{AmOA}=\int_{AmO}+\int_{OA}=\int_{AmO}$. 另一方面，利用格林公式可得

$$\oint_{AmOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}m\,dxdy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

于是，
$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4304】 计算曲线积分 $\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$,

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数，AmB 为连接点 $A(x_1,y_1)$ 和点 $B(x_2,y_2)$ 的任意路径，但要求此路径与线段 AB 一起围成具有已知面积 S 的区域 $AmBA$.

提示 连接点 B 与点 A，构成封闭围线 $AmBA$，利用格林公式并注意

$$\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(ydx+dy)$$

即易获解. 利用此题的结果可计算 4303 题.

解 首先，我们有 $\oint_{AmBA}=\int_{AmB}+\int_{BA}$，而

$$\oint_{AmBA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy=\iint\limits_{S}m\,dxdy=mS.$$

另一方面，

$$\int_{BA}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy=\int_{BA}d[e^x\varphi(y)]-\int_{BA}m(ydx+dy)$$

$$=e^x\varphi(y)\Big|_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)}-m\int_{x_2}^{x_1}\left[y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]dx$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)-m\left(y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_1-x_2)+\frac{m}{2}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1)^2$$

$$=e^{x_1}\varphi(y_1)-e^{x_2}\varphi(y_2)+m(y_2-y_1)+\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

于是，
$$\int_{AmB}[\varphi(y)e^x-my]dx+[\varphi'(y)e^x-m]dy$$

$$=mS+e^{x_2}\varphi(y_2)-e^{x_1}\varphi(y_1)-m(y_2-y_1)-\frac{m}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

注 利用此题的结果可计算 4303 题. 事实上，由于 $\varphi(y)=\sin y$，$x_1=a$，$y_1=0$，$x_2=y_2=0$，$S=\frac{\pi a^2}{8}$，代入即得

$$\int_{AmO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

【4307】 计算
$$I=\oint_C\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

其中 C 为不经过坐标原点的简单封闭围线，且积分时的环绕方向为正.

提示 研究两种情况：(1)坐标原点在围线 C 之外，(2)围线 C 包围坐标原点.

解 令 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$. 易知，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论：

(1) 坐标原点在围线 C 之外，这时，在由 C 围成的有界闭区域 S 上，P 与 Q 以及它们的偏导数都连续，故可应用格林公式，得

$$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点. 这时，由于 P,Q 在原点无定义，故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式. 今取 $a>0$ 充分小，使中心在原点半径为 a 的圆周 $L_a(L_a:x^2+y^2=a^2)$ 完全位于围线 C 之内. 用 S_a 表界于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然，在 S_a 上，P、Q 及其偏导数均连续，故可应用格林公式，得

$$\left(\oint_C+\oint_{-L_a}\right)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{S_a}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

其中 $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向(即顺时针方向).

于是，$I=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，其中 L_a 沿正方向(即逆时针方向). 利用 L_a 的参数方程 $x=a\cos t,y=a\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 即得

$$I=\oint_{L_a}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{L_a}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}[(a\cos t)(a\cos t)-a\sin t(-a\sin t)]\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=2\pi.$$

利用曲线积分计算由下列曲线所围的面积：

【4310】 抛物线 $(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 和轴 Ox.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 及 $(0,0)$.

注意在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上，有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$；而在抛物线这一段上，则有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{(1+t)^4}\mathrm{d}t\ (0\leqslant t\leqslant+\infty),$$

从而，问题易获解.

解 作代换 $y=tx$，则原方程化为 $x^2(1+t)^2=ax$. 从而，曲线的参数方程为

$$x=\frac{a}{(1+t)^2},\quad y=\frac{at}{(1+t)^2}\quad(0\leqslant t<+\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a,0)$ 与 $(0,0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上，有

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

在抛物线上，有
$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{(1+t)^4}\mathrm{d}t.$$

于是，面积为 $S=\dfrac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\dfrac{a^2}{2}\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t)^4}=-\dfrac{a^2}{6}\ \dfrac{1}{(1+t)^3}\Bigg|_0^{+\infty}=\dfrac{a^2}{6}.$

【4311】 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy\ (a>0)$.

解题思路 令 $y=tx$，即得曲线的参数方程为

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}\ (0\leqslant t\leqslant+\infty),$$

且有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\dfrac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t\ (0\leqslant t\leqslant+\infty)$. 从而，问题可获解.

解 作代换 $y=tx$，则得曲线的参数方程为 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$，$y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

由于 $\mathrm{d}x=\dfrac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}y=\dfrac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$，从而，$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\dfrac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t$.

于是,面积为 $S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t=\frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$

【4315】 计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ $(a>0,b>0,n>0)$ 和坐标轴所围的面积.

解题思路 令 $x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$,即得

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2}{n}ab\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\ (0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})\ (\text{在曲线上}).$$

曲线与坐标轴交于点 $(a,0)$ 及点 $(0,b)$. 注意在 Oy 轴上从点 $(0,b)$ 到点 $(0,0)$ 的一段,以及在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 的一段上,均有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 再注意利用 3856 题的结果,问题即可获解.

解 作代换 $x=a\cos^{\frac{2}{n}}\varphi$, $y=b\sin^{\frac{2}{n}}\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2})$,即得

$$x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a,0)$ 和点 $(0,b)$. 在 Oy 轴上,从点 $(0,b)$ 到点 $(0,0)$ 一段,以及在 Ox 轴上从点 $(0,0)$ 到点 $(a,0)$ 一段上,显然有 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$. 于是,面积为

$$S=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2ab}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{ab}{n}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)^{*)}=\frac{ab}{2n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$$

*) 利用 3856 题的结果.

【4320】 计算圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2+y^2=ax,\qquad z^2=a^2-ax.$$

若将平面 Oxy 上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 记以 C,其弧长记以 s,则所求的面积显然可表为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\ \mathrm{d}s.$$

由于 $x^2+y^2=ax$ 即为 $\left(x-\frac{a}{2}\right)+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$,故令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi,\qquad y=\frac{a}{2}\sin\varphi,$$

从而,弧长的微分为 $\mathrm{d}s=\frac{a}{2}\mathrm{d}\varphi$. 于是,面积为

$$S=2\oint_C\sqrt{a^2-ax}\ \mathrm{d}s=2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a}{2}(1-\cos\varphi)}\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{2\pi}a^2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\left(\frac{\varphi}{2}\right)=4a^2.$$

【4321】 计算

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2},$$

若 $X=ax+by$, $Y=cx+dy$,且 C 为包围坐标原点的简单封闭围线 $(ad-bc\neq0)$.

解 首先注意,由于 $ad-bc\neq0$,故只有原点 $(0,0)$ 使 $X^2+Y^2=0$. 易知

$$X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=(ax+by)(c\mathrm{d}x+d\mathrm{d}y)-(cx+dy)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)=(ad-bc)(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x),$$

故
$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中
$$P=-\frac{(ad-bc)y}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2},\qquad Q=\frac{(ad-bc)x}{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}.$$

容易算得
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(ad-bc)[(a^2+c^2)x^2-(b^2+d^2)y^2]}{[(ax+by)^2+(cx+dy)^2]^2}\quad((x,y)\neq(0,0)\text{时}),$$

故由格林公式知

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_{C'} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中 C' 可为包围原点(0,0)的任一位于 C 内的围线. 特别是,可取 C' 为围线 $(ax+by)^2+(cx+\mathrm{d}y)^2=r^2$(即 $X^2+Y^2=r^2$),$r>0$ 充分小. 于是,利用格林公式得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_{X^2+Y^2=r^2}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}\\&=\frac{1}{2\pi r^2}\oint_{X^2+Y^2=r^2}X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\oint_{x^2+y^2=r^2}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\&=\frac{ad-bc}{2\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\left|\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}\right|\mathrm{d}X\mathrm{d}Y.\end{aligned}$$

由于 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=ad-bc$,故 $\frac{D(x,y)}{D(X,Y)}=\frac{1}{ad-bc}$. 于是,代入上式得

$$I=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\frac{1}{|ad-bc|}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=\frac{ad-bc}{\pi r^2}\cdot\frac{1}{|ad-bc|}\pi r^2=\mathrm{sgn}(ad-bc).$$

【4322】 若简单的围线 C 包围坐标原点,$X=\varphi(x,y)$,$Y=\psi(x,y)$,而曲线 $\varphi(x,y)=0$ 和 $\psi(x,y)=0$ 在围线 C 以内有几个单交点,计算积分 I(参阅 4321 题).

解 设 $\varphi(x,y)=0$,$\psi(x,y)=0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)$. 首先注意,本题应假定函数 $\varphi(x,y)$ 与 $\psi(x,y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数,并且在各点 $P_i(i=1,2,\cdots,m)$ 处有 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}=\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x\neq0$. 容易算得

$$X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}y,$$

从而,

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{2\pi}\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

其中

$$P=\frac{\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi}{\varphi^2+\psi^2},\qquad Q=\frac{\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi}{\varphi^2+\psi^2}.$$

又可算得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\\&=\frac{1}{(\varphi^2+\psi^2)^2}[(\varphi\psi''_{xy}-\varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2+\psi^2)-(\varphi'_x\psi'_y+\varphi'_y\psi'_x)\varphi^2+(\varphi'_y\psi'_x+\varphi'_x\psi'_y)\psi^2+2(\varphi'_x\varphi'_y-\psi'_x\psi'_y)\varphi\psi]\\&\qquad((x,y)\neq(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,m)).\end{aligned}$$

围绕点 $P_i(x_i,y_i)$ 作围线 C_i:$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=r^2$(即 $X^2+Y^2=r^2$),取 $r>0$ 充分小,使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内(这是办得到的,因为在各点 P_i,$\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq0$. 从而,由连续性知,在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\neq0$ 且保持定号. 于是,根据隐函数存在定理知,变换 $X=\varphi(x,y)$,$Y=\psi(x,y)$ 在点 $(x,y)=(x_i,y_i)$ 邻近及点 $(X,Y)=(0,0)$ 邻近是双方单值双方连续的),并使 $\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2+Y^2\leqslant r^2$(记为 S_i)上保持定号,将格林公式应用于诸围线 $C,C_1,\cdots,C_m$ 之间的区域,可得

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

故

$$I=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}.\tag{1}$$

但 $$\oint_{C_i}\frac{X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X}{X^2+Y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_C X\mathrm{d}Y-Y\mathrm{d}X=\frac{1}{r^2}\oint_{C_i}(\varphi\psi'_x-\varphi'_x\psi)\mathrm{d}x+(\varphi\psi'_y-\varphi'_y\psi)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{r^2}\iint\limits_{S_i}2(\varphi'_x\psi'_y-\varphi'_y\psi'_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\iint\limits_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\left(\mathrm{sgn}\,\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint\limits_{S_i}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{r^2}\left(\mathrm{sgn}\,\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\iint\limits_{X^2+Y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y=\frac{2}{r^2}\left(\mathrm{sgn}\,\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}\right)_{P_i}\cdot\pi r^2=2\pi\left(\mathrm{sgn}\,\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

代入(1)式,即得 $$I=\sum_{i=1}^{m}\left(\mathrm{sgn}\,\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}\right)_{P_i},$$

或写为 $$I=\sum\mathrm{sgn}\,\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)},$$

其中 $\sum$ 的是对曲线 $\varphi(x,y)=0$ 与 $\psi(x,y)=0$ 在 C 内的各交点相加.

注 显然,4321 题是 4322 题的特例.这时,曲线 $ax+by=0$ 与 $cx+\mathrm{d}y=0$ 在 C 内只有一个交点,即原点(0,0),而 $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)}=ad-bc$.

【4323】 证明:若 C 为封闭围线,$\boldsymbol{l}$ 为任意的方向,则有

$$\oint_C\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=0,$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量.

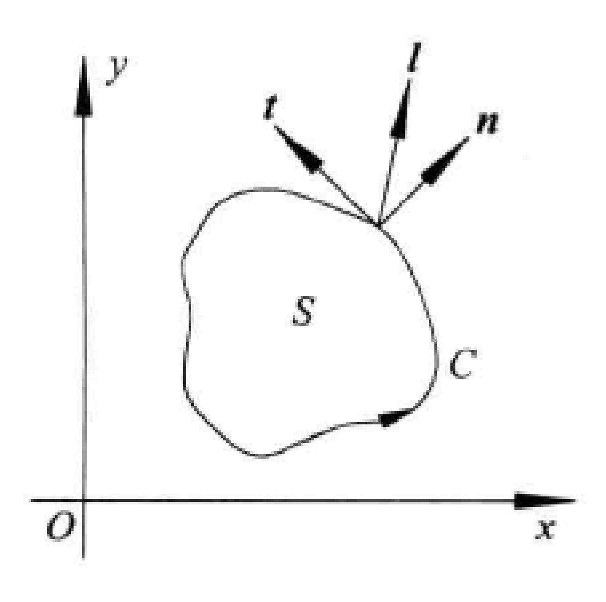


图 4323

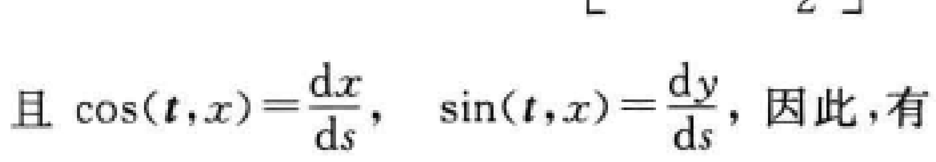
证 如图 4323 所示.不妨规定 C 的方向为逆时针的,以 $\boldsymbol{t}$ 表示.由于夹角

$$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l},x)-(\boldsymbol{n},x),$$

故得 $$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{l},x)\cos(\boldsymbol{n},x)+\sin(\boldsymbol{l},x)\sin(\boldsymbol{n},x).$$

但是, $$\sin(\boldsymbol{n},x)=\sin\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=-\cos(\boldsymbol{t},x),$$

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\cos\left[(\boldsymbol{t},x)-\frac{\pi}{2}\right]=\sin(\boldsymbol{t},x),$$


且 $\cos(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\sin(\boldsymbol{t},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, 因此,有

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\cos(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}y-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x.$$

再利用格林公式,并注意到 $\sin(\boldsymbol{l},x)$ 和 $\cos(\boldsymbol{l},x)$ 均为常数,即得

$$\oint_C\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\oint_C[-\sin(\boldsymbol{l},x)\mathrm{d}x+\cos(\boldsymbol{l},x)]\mathrm{d}y=\iint\limits_S 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

§13. 曲线积分在物理学上的应用

【4327】 计算单层的对数势 $$u(x,y)=\oint_C\kappa\ln\frac{1}{r}\mathrm{d}s,$$

式中 $\kappa=$常数,$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$,设围线 C 是圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$.

解 由对称性知,单层的对数势为

$$u(x,y)=2\kappa\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{r}\cdot R\mathrm{d}\theta=2R\kappa\int_0^{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{R^2-2R\rho\cos\theta+\rho^2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=-R\kappa\int_0^{\pi}\ln R^2\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\xi x+\eta y=R\rho\cos\theta$，而 θ 是向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$ 与 $\boldsymbol{r}_1=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}$ 的正向夹角.

利用 3733 题（或 2192 题）的结果，可得

$$\int_0^{\pi}\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta=\begin{cases}0, & \rho\leqslant R,\\ 2\pi\ln\frac{\rho}{R}, & \rho>R.\end{cases}$$

于是，我们有 $u(x,y)=-2R\kappa\int_0^{\pi}\ln R\mathrm{d}\theta-R\kappa\int_0^{\pi}\ln\left[1-2\frac{\rho}{R}\cos\theta+\left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right]\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi R\kappa\ln\frac{1}{R}, & \rho\leqslant R,\\ 2\pi R\kappa\ln\frac{1}{\rho}, & \rho>R.\end{cases}$

【4329】 计算高斯积分 $u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s$，

式中 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的长度，此向量连接点 $A(x,y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi,\eta)$，$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 与曲线 C 在点 M 的外法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

解 设 $\boldsymbol{n}$ 与 Ox 轴的夹角为 α，$\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴的夹角为 β，则 $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\alpha-\beta$. 于是，

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\sin\alpha.$$

代入高斯积分，得

$$u(x,y)=\oint_C\left(\frac{\eta-y}{r^2}\sin\alpha+\frac{\xi-x}{r^2}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s=\oint_C\frac{\xi-x}{r^2}\mathrm{d}\eta-\frac{\eta-y}{r^2}\mathrm{d}\xi.$$

令 $P=-\frac{\eta-y}{r^2}$，$Q=\frac{\xi-x}{r^2}$，则有

$$\frac{\partial P}{\partial\eta}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},\quad \frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{-(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{r^4},$$

因而 P、Q 的偏导数除去点 A（此处 $r=0$）外，在全平面上是连续的，并且 $\frac{\partial Q}{\partial\xi}=\frac{\partial P}{\partial\eta}$. 于是，利用格林公式知：当点 A 在曲线 C 之外时，有

$$u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时，则在曲线 C 内以 A 为圆心，R 为半径作一圆 l，即得

$$u(x,y)=\oint_l\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\oint_l\frac{1}{R}\mathrm{d}s=2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时，不妨利用关系式 $\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\mathrm{d}\varphi$ *)，其中 $\mathrm{d}\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 $\mathrm{d}s$ 所张的角度. 今以 A 为圆心，r_1 为半径作一小圆，交 C 于 B_1 及 B_2 两点，将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\widehat{B_1B_2}$，则有

$$\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\int_{\widehat{B_1B_2}}\mathrm{d}\varphi=\angle B_1AB_2.$$

于是，我们有 $u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim\limits_{r_1\to+0}\int_{\widehat{B_1B_2}}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\lim\limits_{r_1\to+0}\angle B_1AB_2=\pi.$

综上所述，得高斯积分 $u(x,y)=\oint_C\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外},\\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上},\\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内}.\end{cases}$

*) 参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

【4331】 若 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，则称二阶可微函数 $u=u(x,y)$ 为调和函数，证明：当且仅当以下条件成立时，u 才是调和函数：

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0,$$

式中 C 为任意封闭围线，$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿此围线之外法线方向的导数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x),$$

而(参看 4323 题的推导)

$$\cos(\boldsymbol{n},x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\quad \sin(\boldsymbol{n},x)=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},$$

故利用格林公式(注意，题中应假定 $u(x,y)$具有连续的二阶偏导数)，得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint\limits_S\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 表由封闭曲线 C 围成的区域.

由此式知：$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$(对任何封闭围线 C)当且仅当$\iint\limits_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$(对任何区域 S). 但易知这又相当于 $\Delta u\equiv 0$. 事实上，若 $\Delta u\equiv 0$，则对任何 S，有$\iint\limits_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$；反之，若对任何 S，有$\iint\limits_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，则必 $\Delta u\equiv 0$. 因为，若不然，在某点(x_0,y_0)，$\Delta u\neq 0$. 例如，设在此点，$\Delta u>0$，则由连续性可知，必存在以(x_0,y_0)为中心，半径为 r_0(充分小)的圆域 S_0，使在其上每一点，都有 $\Delta u>0$. 由此可知，$\iint\limits_S(\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$. 矛盾，证毕.

【4334】 证明平面上的格林第二公式

$$\iint\limits_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s,$$

式中光滑围线 C 是有界区域 S 的边界，$\frac{\partial}{\partial n}$为沿 C 的外法线方向的导数.

证 我们有

$$\oint_C v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(\boldsymbol{n},x)\right]\mathrm{d}s=\oint_C v\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-v\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x$$

$$=\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

同理，有

$$\oint_C u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}s=\oint_C u\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-u\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=\iint\limits_S\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是，

$$\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s=\oint_C\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\iint\limits_S v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_S u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【4335】 利用格林第二公式证明：若 $u=u(x,y)$是有界闭区域 S 内的调和函数，则

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

式中 C 为区域 S 的边界，$\boldsymbol{n}$ 为围线 C 的外法向量，(x,y)为区域 S 的内点，$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}$为点$(x,y)$与围线 C 上的动点(ξ,η)之间的距离.

提示 从区域 S 中除去点(x,y)与该点的无穷小的圆形邻域，并对区域 S 的剩余部分(图 4335 中的区域 S')应用格林第二公式.

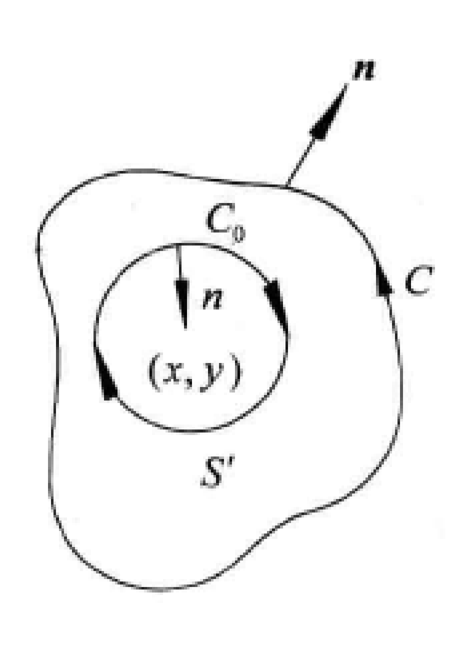


图 4335

证 先证 $v=\ln r$ 为 $(\xi,\eta)((\xi,\eta)\neq(x,y))$ 的调和函数. 事实上,我们有

$$\frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}=\frac{\eta-y}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^2},$$

因此,$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}=0$,即 $\Delta v=0$.

今以点 (x,y)(当 $(\xi,\eta)\neq(x,y)$ 时)为中心,ρ 为半径画一圆 C_0,使此圆包含在围线 C 内,C_0 及 C 的正向如图 4335 所示. 曲线 C 的法线向外,C_0 的法线指向点 (x,y). 因此,在 C_0 上,我们有

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=-\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=-\frac{1}{\rho}.$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所围的区域 S' 上去,即得

$$\iint\limits_{S'}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta \ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}d\xi d\eta=\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}ds,$$

由于 $\Delta \ln r=0,\Delta u=0$,故得
$$\oint_{C_0+C}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}ds=0.$$

将行列式展开,并利用曲线积分的性质,即得

$$\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds=-\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds.$$

但由于

$$\oint_{C_0}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)ds=\oint_{C_0}\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}ds-\oint_{C_0}u\left(-\frac{1}{\rho}\right)ds=0\cdot\ln\rho^{*)}+\frac{1}{\rho}\oint_{C_0}u ds$$
$$=\frac{1}{\rho}u(\xi',\eta')\oint_{C_0}ds^{**)}=2\pi u(\xi',\eta'),$$

其中 $u(\xi',\eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值,故得

$$u(\xi',\eta')=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

两端令 $\rho\to+0$ 取极限,并注意到函数 u 在点 (x,y) 的连续性,即得

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds.$$

*) 利用 4331 题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理,其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

【4336】*) 证明对于调和函数 $u(M)=u(x,y)$ 的中值定理:

$$u(M)=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)ds,$$

式中 C_ρ 是以点 M 为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果(取 C 为 C_ρ),得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds;$$

但在 C_ρ 上,有 $r=\rho$,

$$\left.\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{\partial \ln r}{\partial r}\right|_{r=\rho}=\left.\frac{1}{r}\right|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho},$$

由此,再注意到 $\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$(这是利用 4331 题的结果),得

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\oint_{C_\rho}\left(\frac{u}{\rho}-\ln\rho\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u\,\mathrm{d}s-\frac{\ln\rho}{2\pi}\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi\rho}\oint_{C_\rho}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s.$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ，即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

【4337】 证明:有界闭区域内的非常数调和函数 $u(x,y)$ 在此区域内的点不能达到其最大值或最小值(极大值原理).

证 设有界闭区域为 $\bar{\Omega}$，它是由有界开区域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成.我们要证明:如果 $u(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 内的某点 $P_0(x_0,y_0)$ 达到其最大值或最小值(例如，设达到最大值)，则 $u(x,y)$，在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数.下分三步证明.

(1) 先证:若圆域 $S_\rho=\left\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2\right\}$ 完全属于 Ω，则 $u(x,y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何的 $0<r\leqslant\rho$，用 C_r 表圆周 $\left\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2\right\}$.由 4336 题的结果可知

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}u(\xi,\eta)\mathrm{d}s,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s=0. \tag{1'}$$

但因 $u(x_0,y_0)$ 为最大值，故在 C_r 上恒有

$$u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant 0.$$

由此，根据(1′)，即易知在 C_r 上 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$.因为，若有某点 $(\xi_0,\eta_0)\in C_r$ 使 $u(x_0,y_0)-u(\xi_0,\eta_0)=\tau>0$，则由 $u(x,y)$ 的连续性可知，必有以 (ξ_0,η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在，使当 $(\xi,\eta)\in\sigma$ 时，恒有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\geqslant\frac{\tau}{2}$.用 C'_r 表 C_r 含于 σ 内的部分，则

$$\oint_{C_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\int_{C'_r}[u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)]\mathrm{d}s\geqslant\oint_{C'_r}\frac{\tau}{2}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\tau l'_r>0,$$

其中 l'_r 表圆弧 C'_r 之长，此显然与(1′)式矛盾.

于是，在 C_r 上有 $u(x_0,y_0)-u(\xi,\eta)\equiv 0$.再根据 r 的任意性 $(0<r\leqslant\rho)$，即知对任何 $(\xi,\eta)\in S_\rho$，都有 $u(\xi,\eta)=u(x_0,y_0)$.换句话说，$u(x,y)$ 在 S_ρ 上是常数.

(2) 次证:设 $P^*(x^*,y^*)$ 为 $\bar{\Omega}$ 的任一内点(即 $P^*\in\Omega$)，则必有 $u(x^*,y^*)=u(x_0,y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0,y_0)$ 与点 $P^*(x^*,y^*)$ 连接起来(图 4337).用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离，即

$$\delta=\min\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2},$$

其中 min 的是对一切 $(x,y)\in\partial\Omega$，$(x,y)\in l$ 来取的(由于 $\partial\Omega$，l 是互不相交的有界闭集，可证 min 一定能达到，从而 $\delta>0$).取 $0<\delta'<\delta$.以点 P_0 为中心，δ' 为半径作一圆，得圆域 $S_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta'^2\}$，此圆域完全含于 Ω 内，由(1)段已证的结论知，$u(x,y)$ 在 S_0 中为常数.特别 $u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0)$，这里点 $P_1(x_1,y_1)$ 代表圆周 $C_0=\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\delta'^2\}$ 与 l 折线的交点.又以点 P_1 为中心，δ' 半径作一圆，得圆域 $S_1=\left\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2\leqslant\delta'^2\right\}$.由于 $u(x,y)$ 在点 $P_1(x_1,y_1)$ 也达到最大值，而 S_1 完全含于 Ω 内，故将(1)段结果用于 S_1 可知 $u(x,y)$ 在 S_1 上为常数，特别 $u(x_2,y_2)=u(x_1,y_1)$，这里点 $P_2(x_2,y_2)$ 表圆周 $C_1=\{(x,y)\mid(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=\delta'^2\}$ 与 l 的交点(除 P_0 外的另一交点).再以点 P_2 为中心，δ' 为半径作一圆域 S_2，…，这样继续作下去，显然，至多经过 n 次(n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数，s 表 l 的长)，点 $P^*(x^*,y^*)$ 必属于 S_{n-1}，从而，

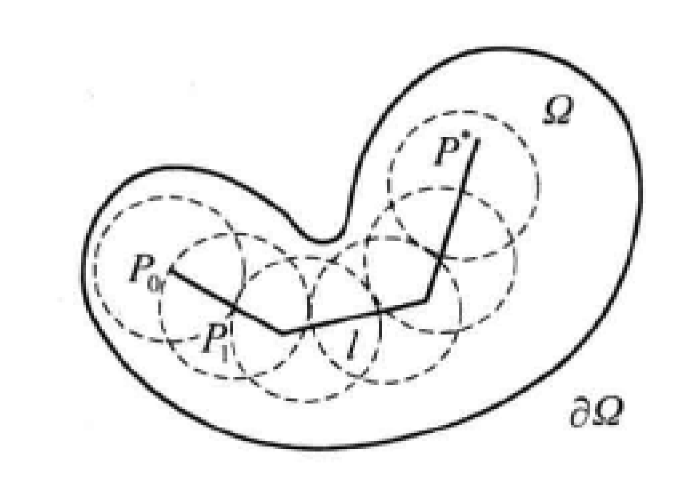


图 4337

$$u(x^*y^*)=u(x_{n-1},y_{n-1})=\cdots=u(x_1,y_1)=u(x_0,y_0).$$

(3)由(2)段的结果可知,$u(x,y)$在Ω上是常数;根据$u(x,y)$在$\bar{\Omega}$上的连续性,通过由Ω的点趋向$\partial\Omega$的点取极限,即知$u(x,y)$在$\bar{\Omega}$上是常数.证毕.

注 从证明过程中看出,需假定区域Ω(从而$\bar{\Omega}$)是连通的.事实上,若Ω不连通,则结论不一定成立.例如,设$\bar{\Omega}=S_1+S_2$,其中S_1与S_2是两个互无公共点的闭圆域,而令

$$u(x,y)=\begin{cases}c_1, & (x,y)\in S_1,\\ c_2, & (x,y)\in S_2,\end{cases}$$

其中$c_1\neq c_2$是两个常数,则$u(x,y)$显然是$\bar{\Omega}$上的调和函数且在$\bar{\Omega}$上不是常数,但它却在其内点达到最大值与最小值.

【4339】 设$u=u(x,y)$和$v=v(x,y)$为定常流的速度分量,C为区域S的边界,求区域S内流体质量的变化率.若流体是不可压缩的,且在区域S内没有源和汇,则函数u和v满足怎样的方程?

解 设流体的速度为$\boldsymbol{w}$,则$\boldsymbol{w}=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$,又$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$.于是,流体量为

$$Q=\oint_C \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\oint_C[u\cos(\boldsymbol{n},x)+v\sin(\boldsymbol{n},x)]\mathrm{d}s=\oint_C u\mathrm{d}y-v\mathrm{d}x^{*)}=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中$\boldsymbol{n}$表示曲线C的外法线上的单位矢量,并且此处已假定流体的面密度等于1.若流体是不可压缩的,且在区域S内没有源和汇,则流体的流出量与流入量的差Q应等于零,即

$$\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

又显然,对于任意的围线C,上述结果均正确.于是,连续函数u,v应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

*) 参看4323题的题解.

§14. 曲面积分

1° **第一型曲面积分** 若S为分片光滑的双侧曲面

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v)\ ((u,v)\in\Omega) \tag{1}$$

而$f(x,y,z)$为在曲面S的各点上有定义并且连续的函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2}$$

式中

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,\qquad G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

在特别情形下,若曲面的方程具有以下形式:

$$z=z(x,y)\quad((x,y)\in\sigma),$$

其中$z(x,y)$为单值连续可微函数,则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_\sigma f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

此积分与曲面S的正反面的选择无关.

若把函数$f(x,y,z)$当作曲面S在点(x,y,z)的面密度,则积分(2)是此曲面的质量.

2° **第二型曲面积分** 若S为光滑的双侧曲面:S^+为它的正面,即由法向量$\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$确定的一面,$P=P(x,y,z)$,$Q=Q(x,y,z)$,$R=R(x,y,z)$为在曲面$S$上有定义而且连续的三个函数,则

$$\iint_{S^+}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S. \tag{3}$$

若曲面 S 以参数方程(1)的形式给出，则法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦由下列公式来确定：

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且根式前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^- 时，积分(3)的符号相反.

计算下列第一型曲面积分：

【4348】 $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，式中 S 为螺旋面的一部分：$x=u\cos v,y=u\sin v,z=v$ $(0<u<a;0<v<2\pi)$.

解 由于 $$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=\cos^2 v+\sin^2 v=1,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+1=1+u^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}=-u\sin v\cos v+u\cos v\sin v=0,$$

故得 $\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+u^2}$. 于是，

$$\iint\limits_S z\mathrm{d}S=\int_0^a\mathrm{d}u\int_0^{2\pi}v\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}v=2\pi^2\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u=2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\frac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})].$$

【4350】 $\iint\limits_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，式中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分.

解 由于 $$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}.$$

又曲面 S 在平面 Oxy 上的投影域为 $x^2+y^2\leqslant 2ax$. 于是，利用极坐标，即得

$$\iint\limits_S(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}[r^2\cos\varphi\sin\varphi+r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)]r\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2a\cos\varphi)^4\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

【4355】 求均质曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被曲面 $x^2+y^2=ax$ 所割下部分的质心坐标.

解 质量为 $$M=\iint\limits_S\rho_0\mathrm{d}S=\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\rho_0\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi=\frac{\sqrt{2}\pi a^2\rho_0}{4}.$$

从而，质心坐标为

$$x_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^a x\sqrt{ax-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{8}{\pi a^2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}+t\right)\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,\mathrm{d}t^{*)}=\frac{8}{\pi a^2}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{2},$$

$$y_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}y\mathrm{d}y=0,$$

$$z_0=\frac{1}{M}\cdot\sqrt{2}\rho_0\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant ax}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{\pi a^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\cos\varphi}r^2\mathrm{d}r=\frac{8a}{3\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{16a}{9\pi},$$

即质心为 $\left(\frac{a}{2},0,\frac{16a}{9\pi}\right)$.

*) 作变换 $t=x-\frac{a}{2}$.

计算下列第二型曲面积分：

【4363】 $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 $f(x),g(y),h(z)$ 为连续函数，S 为平行六面体 $0\leqslant x\leqslant a;0\leqslant y\leqslant b;0\leqslant z\leqslant c$ 的外表面.

解 只要计算任何一个积分，其他两个可类似地写出结果. 例如，下面计算 $\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 由于六面体有四个面垂直于 Oxy 平面，故曲面积分应为零. 从而，

$$\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc\,\frac{h(c)-h(0)}{c}.$$

类似地，可得到 $\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 及 $\iint\limits_S g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 的值. 于是，所求的积分为

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right].$$

【4366】 $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2=R^2$ 的外侧.

解 根据轮换对称知，只要计算 $\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 注意到 $z-c=\pm\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}$，并利用极坐标，即得

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=4c\iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r\\
&=8\pi c\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_0^R=\frac{8}{3}\pi R^3c.\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

§15. 斯托克斯公式

若 $P=P(x,y,z),Q=Q(x,y,z),R=R(x,y,z)$ 为连续可微函数，S 为分片光滑的有界双侧曲面，其边界 C 为分段光滑的简单封闭围线，则成立斯托克斯公式：

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦，并且从此法线所指方向来看，积分时围线 C 的环绕方向是逆时针的(对于右手坐标系).

【4368】 计算积分 $$\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z,$$

此积分是从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 沿着螺旋线 $x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi$ 进行的.

提示 将直线段 AB 与曲线 AmB 组成封闭围线，并依正方向进行，应用斯托克斯公式即易获解.

解 连接 A,B 两点得线段 AB，它与 AmB 组成封闭围线并依正向进行，则由斯托克斯公式知：

$$\oint_{AmBA}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-zx)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\iint_S 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

于是，
$$\int_{AmB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{AB}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z^{*)}=\frac{h^3}{3}.$$

*) 在线段 AB 上，$x=a$，$y=0$，$\mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0$，而 $0\leqslant z\leqslant h$.

【4369】 设 C 为平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$（$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦）上的封闭围线，所围面积为 S，求

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

积分沿围线 C 的正方向进行.

解 若记

$$P=\begin{vmatrix}\cos\beta & \cos\gamma\\ y & z\end{vmatrix}=z\cos\beta-y\cos\gamma,\qquad Q=\begin{vmatrix}\cos\gamma & \cos\alpha\\ z & x\end{vmatrix}=x\cos\gamma-z\cos\alpha,$$
$$R=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta\\ x & y\end{vmatrix}=y\cos\alpha-x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$
$$=2\iint_S(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=2\iint_S\mathrm{d}S=2S.$$

应用斯托克斯公式，计算积分：

【4372】 $\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，式中 C 是曲线 $x^2+y^2+z^2=2Rx$，$x^2+y^2=2rx$（$0<r<R,z>0$），并且在沿此曲线进行积分时，球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 外侧被该曲线所围的最小区域始终位于左边.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R},$$

即得

$$\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\iint_S[(y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$
$$=2\iint_S\left[(y-z)\left(\frac{x}{R}-1\right)+(z-x)\frac{y}{R}+(x-y)\frac{z}{R}\right]\mathrm{d}S=2\iint_S(z-y)\mathrm{d}S.$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称，故 $\iint_S y\mathrm{d}S=0$. 又 $\iint_S z\mathrm{d}S=\iint_S R\cos\gamma\mathrm{d}S=R\cdot\pi r^2$，

于是，

$$\oint_C(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=2\pi Rr^2.$$

§16. 奥斯特罗格拉茨基公式

若空间区域 V 的边界 S 为分片光滑曲面，$P=P(x,y,z)$，$Q=Q(x,y,z)$，$R=R(x,y,z)$ 和它们的一阶偏导数均为区域 $V+S$ 内的连续函数，则成立奥斯特罗格拉茨基公式

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特罗格拉茨基公式变换下列曲面积分，设光滑曲面 S 是有界区域 V 的边界，$\cos\alpha$，$cso\beta$，$\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦：

【4382】 证明：以曲面 S 为界的物体的体积等于

$$V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

式中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证明思路 利用 $\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 及奥氏公式，命题易获证.

证 由奥氏公式，有

$$\iint_C(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V,$$

由此可知 $V=\frac{1}{3}\iint_S(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$. 证毕.

利用奥斯特罗格拉茨基公式计算下列曲面积分：

【4389】 $\iint_S(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，式中 S 为曲面

$$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$$

的外侧.

解 $\iint_S(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 V 为由曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 围成的区域. 作变换 $u=x-y+z$，$v=y-z+x$，$w=z-x+y$，则 $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=4$，且由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$ *).

于是，所求的积分为

$$\iint_S(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1}3\cdot\frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1.$$

*) 由 $|u|+|v|+|w|=1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积，其大小等于由平面 $u+v+w=1$，$u=0$，$v=0$，$w=0$ 所围成的四面体体积的 8 倍，即为 $8\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{4}{3}$.

【4391】 证明公式：

$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中封闭曲面 S 为区域 V 的表面，$\boldsymbol{n}$ 为封闭曲面 S 上的点 (ξ,η,ζ) 处的外法向量，而

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\boldsymbol{r}$ 为从点 (x,y,z) 到点 (ξ,η,ζ) 的径向量.

提示 研究两种情形:(1)由面 S 不包围点(x,y,z);(2) 曲面 S 包围点(x,y,z).

证 先设曲面 S 不包围点(x,y,z)(即点(x,y,z)在 V 之外),我们有

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\cos(\boldsymbol{r},x)\cos\alpha+\cos(\boldsymbol{r},y)\cos\beta+\cos(\boldsymbol{r},z)\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.由于

$$\cos(\boldsymbol{r},x)=\frac{\xi-x}{r},\ \cos(\boldsymbol{r},y)=\frac{\eta-y}{r},\cos(\boldsymbol{r},z)=\frac{\zeta-z}{r},$$

故

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma.$$

于是,利用奥氏公式,即得

$$\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\iiint\limits_V\frac{2}{r}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta,$$

故

$$\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

次设曲面 S 包围点(x,y,z).这时,不能对 V 应用奥氏公式,必须用一小区域将点(x,y,z)挖掉,即以点(x,y,z)为中心,ε 为半径作一开球域 V_ε(ε 充分小),其边界(球面)以 S_ε 表示.对闭区域 $V-V_\varepsilon$,应用奥氏公式,仿上可得

$$\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S+\iint\limits_{S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi-x}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta-y}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta-z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=2\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}.$$

但在 S_ε 上,$\boldsymbol{n}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}$ 的方向相反,故 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=-1$.于是,

$$\iint\limits_{S_\varepsilon}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=-4\pi\varepsilon^2.$$

由此可知,在前式中令 $\varepsilon\to+0$ 取极限,即得

$$\iiint\limits_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\lim_{\varepsilon\to+0}\iiint\limits_{V-V_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S.$$

证毕.

【4393】 证明:若 $\Delta u\equiv\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$,有界区域 V 的边界 S 为光滑曲面,则成立下列公式:

(1) $\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$; (2) $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

式中 u 及其二阶偏导数是在区域 $V+S$ 内连续的函数,$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿曲面 S 的外法线的导数.

证明思路 只要注意

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

利用奥式公式,(1)及(2)的公式均获证.

证 (1)由于 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$,因此,利用奥氏公式即得

$$\iint\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(2) $$\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+u\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+u\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iiint\limits_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4394】 证明三维情形的格林第二公式：

$$\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

式中区域 V 以曲面 S 为界，$\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向量，而函数 $u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$ 在区域 $V+S$ 内二阶可微.

证 $$\iint_S\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_S\left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\beta+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V\left[v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

【4396】 证明：若函数 $u=u(x,y,z)$ 是以光滑曲面 S 为界的有界闭区域 V 内的调和函数，则

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]\mathrm{d}S,$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从区域 V 的内点(x,y,z)引至曲面上的点(ξ,η,ζ)的径向量，

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2},$$

$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上在点(ξ,η,ζ)的外法向量.

证 在 4394 题中令 $v=\frac{1}{r}$，则当$(\xi,\eta,\zeta)\neq(x,y,z)$时，有 $\Delta v=0$. 现以点 $P(x,y,z)$为中心，ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内，再将 4394 题应用到由曲面 $S+S_\rho$ 所包围的区域 V 内，即得

$$\iint_{S+S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=0,$$

或 $$\iint_{S_\rho}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=-\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

显然，S 上的法线是向外的，而 S_ρ 上的法线是指向球心的，即指向半径减少的一方. 因此，

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=\rho}=\frac{1}{\rho^2}.$$

于是，我们有 $$\iint_{S_\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{u}{\rho^2}\right)\mathrm{d}S=-\iint_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)\mathrm{d}S.$$

但 $\iint_{S_\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho}\iint_{S_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$，又利用中值定理，得

$$\iint_{S_\rho}\frac{u}{\rho^2}\mathrm{d}S=\frac{1}{\rho^2}u(x',y',z')4\pi\rho^2=4\pi u(x',y',z'),$$

其中 $u(x',y',z')$为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而，

$$u(x',y',z')=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim\limits_{\rho\to+0}u(x',y',z')=u(x,y,z)$. 因而,令 $\rho\to+0$. 即得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)dS.$$

又由于

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\xi}\cos\alpha+\frac{\partial r}{\partial\eta}\cos\beta+\frac{\partial r}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)$$

$$=-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r}\cos\alpha+\frac{\eta-y}{r}\cos\beta+\frac{\zeta-z}{r}\cos\gamma\right)=-\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2},$$

故最后得

$$u(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[u\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS.$$

§17. 场论初步

1° **梯度** 若 $u(\boldsymbol{r})=u(x,y,z)$(其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$)是连续可微标量场,则称向量

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为它的梯度,简记为 $\mathrm{grad}u=\nabla u$,其中 $\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$. 场 u 在已知点 (x,y,z) 的梯度的方向与过此点的等值面 $u(x,y,z)=C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点,此向量给出函数 u 变化率最大的方向和大小,

$$|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

场 u 在某方向 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 上的导数等于:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

2° **场的散度与旋度** 若

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=a_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+a_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+a_z(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是连续可微向量场,则称标量

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}$$

称为场的旋度.

3° **向量通过曲面的通量** 若 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 给出区域 Ω 内的向量场,S 是此区域内的曲面,$\boldsymbol{n}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是曲面 S 的单位法向量,则称积分

$$\iint\limits_S a_n dS=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)dS$$

(式中 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}$ 为向量的法向分量)为向量 $\boldsymbol{a}$ 在单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 所指的方向上通过所给曲面 S 的通量. 以向量形式表述的奥斯特罗格拉茨基公式为

$$\iint_S a_n\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

式中曲面 S 为区域 V 的边界,$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位外法向量.

4° **向量的环量** 数 $\int_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_C a_x\mathrm{d}x+a_y\mathrm{d}y+a_z\mathrm{d}z$

称为向量 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 沿某曲线 C 的曲线积分(场的功).

若 C 是封闭围线,则称曲线积分为向量 $\boldsymbol{a}$ 沿围线 C 的环量.

以向量形式表述的斯托克斯公式为 $\oint_C \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S(\mathrm{rot}\boldsymbol{a})_n\mathrm{d}S$,

式中封闭围线 C 为曲面 S 的边界,并且曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}$ 之方向应当这样来选择:使得立于曲面 S 上的观察者从法线所指方向来看,围线 C 的环绕是逆时针的(对于右手坐标系).

5° **有势场** 若向量场 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 是某标量 u 的梯度,即 $\mathrm{grad}u=\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a}$ 称为有势场,而标量 u 称为场的势.

若势 u 为单值函数,则 $\int_{AB}\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=u(B)-u(A)$.

特别地,这时向量 $\boldsymbol{a}$ 的环量等于零.

在单连通区域内给定的场 $\boldsymbol{a}$ 为有势场的充要条件是

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即这样的场应当是无旋场.

【4412】 求 $\mathrm{grad}\{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2\}$($\boldsymbol{c}$ 为常向量).

解 $|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2=(c_yz-c_zy)^2+(c_zx-c_xz)^2+(c_xy-c_yx)^2$. 于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2\}&=[2c_z(c_zx-c_xz)-2c_y(c_xy-c_yx)]\boldsymbol{i}+[-2c_z(c_yz-c_zy)+2c_x(c_xy-c_yx)]\boldsymbol{j}\\&\quad+[2c_y(c_yz-c_zy)-2c_x(c_zx-c_xz)]\boldsymbol{k}\\&=2[x(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_x(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{i}+2[y(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_y(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{j}\\&\quad+2[z(c_x^2+c_y^2+c_z^2)-c_z(c_xx+c_yy+c_zz)]\boldsymbol{k}\\&=2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})-2\boldsymbol{c}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

【4415】 证明:若函数 $u=u(x,y,z)$ 在凸区域 Ω 内可微,且 $|\mathrm{grad}u|\leqslant M$,其中 M 为常数,则对于 Ω 中任意两点 A,B 有:

$$|u(A)-u(B)|\leqslant M\rho(A,B),$$

式中 $\rho(A,B)$ 为 A 与 B 两点之间的距离.

证 由于 Ω 为凸区域,故线段 $\overline{AB}$ 整个属于 Ω. 设 B 的坐标为 (x_0,y_0,z_0),A 的坐标为 (x_1,y_1,z_1),且令 $x_1-x_0=\Delta x$,$y_1-y_0=\Delta y$,$z_1-z_0=\Delta z$,并考虑一元函数 $f(t)=u(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$,显然 $f(0)=u(B)$,$f(1)=u(A)$,且 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上可微,并且

$$\begin{aligned}f'(t)&=u'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta x+u'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta y\\&\quad+u'_z(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y,z_0+t\Delta z)\Delta z.\end{aligned}$$

于是,由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}u(A)-u(B)&=f(1)-f(0)=f'(\xi)\\&=u'_x(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta x+u'_y(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta y+\\&\quad u'_z(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)\Delta z\\&=[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA},\end{aligned}$$

由此可知

$$|u(A)-u(B)|=|[\mathrm{grad}u(x_0+\xi\Delta x,y_0+\xi\Delta y,z_0+\xi\Delta z)]\cdot\overrightarrow{BA}|$$

$$\leqslant |\mathrm{grad}\boldsymbol{u}(x_0+\xi\Delta x, y_0+\xi\Delta y, z_0+\xi\Delta z)| \cdot |\overrightarrow{BA}| \leqslant M\rho(A,B).$$

【4421】 用直接计算的方法证明:向量 $\boldsymbol{a}$ 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$(坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$)外,另有直角坐标系 $O'x'y'z'$(坐标轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$). 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'},$$

设

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}'=\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}'=\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}'=\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}.\end{cases}$$

又设 $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{OO'}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$. 于是,空间一点 P 在两个坐标系中的坐标(x,y,z)与(x',y',z')之间的关系为(令 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP},\boldsymbol{r}'=\overrightarrow{O'P}$):

$$x'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{i}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{i}'=(x-a)\cos\alpha_1+(y-b)\cos\beta_1+(z-c)\cos\gamma_1,$$
$$y'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{j}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{j}'=(x-a)\cos\alpha_2+(y-b)\cos\beta_2+(z-c)\cos\gamma_2,$$
$$z'=\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{k}'=(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{k}'=(x-a)\cos\alpha_3+(y-b)\cos\beta_3+(z-c)\cos\gamma_3,$$

我们有

$$\begin{aligned}\vec{a}&=a_{x'}\boldsymbol{i}'+a_{y'}\boldsymbol{j}'+a_{z'}\boldsymbol{k}'\\ &=a_{x'}(\cos\alpha_1\boldsymbol{i}+\cos\beta_1\boldsymbol{j}+\cos\gamma_1\boldsymbol{k})+a_{y'}(\cos\alpha_2\boldsymbol{i}+\cos\beta_2\boldsymbol{j}+\cos\gamma_2\boldsymbol{k})+a_{z'}(\cos\alpha_3\boldsymbol{i}+\cos\beta_3\boldsymbol{j}+\cos\gamma_3\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

由此可知

$$a_x=a_{x'}\cos\alpha_1+a_{y'}\cos\alpha_2+a_{z'}\cos\alpha_3\quad a_y=a_{x'}\cos\beta_1+a_{y'}\cos\beta_2+a_{z'}\cos\beta_3\quad a_z=a_{x'}\cos\gamma_1+a_{y'}\cos\gamma_2+a_{z'}\cos\gamma_3.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x}&=\frac{\partial a_x}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial a_x}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}=\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\alpha_1\\ &\quad+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\alpha_2+\left(\cos\alpha_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\alpha_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\alpha_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\alpha_3.\end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_y}{\partial y}&=\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\beta_1+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\beta_2\\ &\quad+\left(\cos\beta_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\beta_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\beta_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\beta_3,\\ \frac{\partial a_z}{\partial z}&=\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}\right)\cos\gamma_1+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\right)\cos\gamma_2\\ &\quad+\left(\cos\gamma_1\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+\cos\gamma_2\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+\cos\gamma_3\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\right)\cos\gamma_3.\end{aligned}$$

将这三式相加,得

$$\begin{aligned}\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}&=(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{i}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial x'}+(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial y'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{j}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial y'}\\ &\quad+(\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{x'}}{\partial z'}+(\boldsymbol{j}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{y'}}{\partial z'}+(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{k}')\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}\\ &=\frac{\partial a_{x'}}{\partial x'}+\frac{\partial a_{y'}}{\partial y'}+\frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.\end{aligned}$$

证毕.

【4422】 证明:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint_S \boldsymbol{a}_n\,\mathrm{d}S,$$

其中 S 表示围绕着点 M 的封闭曲面,V 是该曲面所围区域的体积,$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法向量,$d(S)$为曲面 S

的直径.

证明思路 注意 $a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma$，并应用奥氏公式及积分中值定理，命题即可获证.

证 由于
$$a_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}=a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma,$$
其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.应用奥氏公式以及积分中值定理，得
$$\iint\limits_S \boldsymbol{a}_n\mathrm{d}S=\iint\limits_S(a_x\cos\alpha+a_y\cos\beta+a_z\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V(\mathrm{div}\boldsymbol{a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M_1)\cdot V,$$
其中 M_1 是 V 中某点，即
$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M_1)=\frac{1}{V}\iint\limits_S\boldsymbol{a}_n\mathrm{d}S.$$
令 $d(S)\to 0$，这时 V 缩向点 M，从而点 $M_1\to M$，取极限，即得
$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}(M)=\lim_{d(S)\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_S\boldsymbol{a}_n\mathrm{d}S.$$
证毕.

【4423】 求
$$\mathrm{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}.$$

提示 利用散度的定义，易得结果为零.

解
$$\mathrm{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\mathrm{div}\left[\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=0.$$

【4437】 求：(1) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}f(r)]$；(2) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]$（$\boldsymbol{c}$ 为常向量）.

解 (1) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}f(r)]=f(r)\mathrm{rot}\boldsymbol{c}+\mathrm{grad}f(r)\times\boldsymbol{c}=\dfrac{f'(r)}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{c}).$

(2) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\mathrm{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})+\mathrm{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}).$

但是，
$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ c_yz-c_zy & c_zx-c_xz & c_xy-c_yx\end{vmatrix}=2\boldsymbol{c},$$
$$\mathrm{grad}f(r)\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\frac{f'(r)}{r}\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r})=\frac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}],$$
故最后得
$$\mathrm{rot}[\boldsymbol{c}\times f(r)\boldsymbol{r}]=2f(r)\boldsymbol{c}+\frac{f'(r)}{r}[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}].$$

【4440】 设流体充满空间并以恒定的角速度 w 围绕轴 $\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 旋转.求速度向量 $\boldsymbol{v}$ 在已知时刻在空间点 $M(x,y,z)$ 处的旋度.

解 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$. 从而有
$$v_x=v_{0x}+w_yz-w_zy,\quad v_y=v_{0y}+w_zx-w_xz,\quad v_z=v_{0z}+w_xy-w_yx,$$
由于 $\mathrm{rot}_x\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial v_z}{\partial y}-\dfrac{\partial v_y}{\partial z}=2w_x$，$\mathrm{rot}_y\boldsymbol{v}=2w_y$ 及 $\mathrm{rot}_z\boldsymbol{v}=2w_z$，故 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{w}$.

【4444】 求向量 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 通过正八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 的通量.

解 设 S 为所给的曲面，S_1,S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分，则有

$$\iint_S a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_1} a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_2} a_n \mathrm{d}S + \iint_{S_3} a_n \mathrm{d}S = \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0}} \mathrm{div}\boldsymbol{a} \mathrm{d}V = 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0}} (x+y+z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\psi \int_0^1 r^2\cos\psi \cdot r(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\cos\psi + \sin\psi)\mathrm{d}r$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos\psi\sin\psi + \cos^2\psi(\cos\varphi + \sin\varphi)]\mathrm{d}\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\pi.$$

但在 $S_i(i=1,2,3)$上，显然有 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{n}$，故 $a_n=0$. 从而，

$$\iint_{S_i} a_n \mathrm{d}S = 0 \quad (i=1,2,3).$$

于是，所求的通量为 $\iint_S a_n \mathrm{d}S = \frac{3}{8}\pi.$

【4450】 在温度场 u 内，在单位时间内通过面微元 $\mathrm{d}S$ 的热量等于：

$$\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}u\mathrm{d}S,$$

其中 k 为热导率，$\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量. 求在单位时间内物体 V 所吸收的热量. 研究温度上升的速度，从而推出物体温度所满足的方程(热传导方程).

解 由于 $\mathrm{d}Q = -k\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{grad}u\mathrm{d}S = -k\mathrm{grad}_n u\mathrm{d}S,$

故由奥式公式，即得 $Q = -\iint_S k\,\mathrm{grad}_n u\,\mathrm{d}S = \iiint_V k\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)\mathrm{d}V.$

因此，每单位时间内向物体内部流入的热量为

$$\iiint_V \mathrm{div}(k\mathrm{grad}u)\mathrm{d}V. \tag{1}$$

这一热量引起物体内部温度的增加，现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 $\mathrm{d}t$ 内温度 u 增加

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

需要对体积元素 $\mathrm{d}V$ 输入热量 $c\,\mathrm{d}u\rho\mathrm{d}V = c\frac{\partial u}{\partial t}\rho\mathrm{d}t\mathrm{d}V,$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是，在时间 $\mathrm{d}t$ 内整个物体就要吸收热量

$$\mathrm{d}t\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V. \tag{2}$$

比较(1)式及(2)式，即得等式 $\iiint_V \left\{c\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(k\mathrm{grad}u)\right\}\mathrm{d}V = 0.$

由于上式对取在所考察境域内的任何物体 V 都适合，且被积函数显见连续，故根据 4097 题的结果，当点属于所考察的境域时，恒有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(k\mathrm{grad}u),$$

此即所求的热传导方程.

【4455】 求向量 $\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$沿着围线 C 的环量 Γ：

(1)C 不围绕 Oz 轴；(2)C 围绕 Oz 轴.

解 我们有 $\boldsymbol{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}.$

于是，易知 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$(除 $x=y=0$，即 Oz 轴上的点).

(1)若 C 不围绕 Oz 轴，则可于 C 上张一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交，于是，根据斯托克斯公式，得

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}S=0.$$

(2)若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周，取常数 $\tau>0$ 充分小，使 C 位于平面 $z=\tau$ 的上方. 在平面 $z=\tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $C_r(x^2+y^2=r^2,\ z=\tau)$ 充分小，使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S，使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式，得

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\oint_{-C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{rot}\boldsymbol{a}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是，

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=\tau$ 后，得

$$\oint_{C_r} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{r\sin\theta}{r^2}\right)(-r\sin\theta)+\left(\frac{r\cos\theta}{r^2}\right)(r\cos\theta)\right]\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

从而，$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}r=2\pi$.

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见，假定 $n=2$. 在平面 Ozx 上引辅助线(直线段)AB，将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线

$$C_1=ABMA \quad 与 \quad C_2=ANBA$$

(图 4455). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi,\quad \oint_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi.$$

于是，注意到 $\overline{AB}$ 的曲线积分(第二型)与 $\overline{BA}$ 上的曲线积分相消，即得

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_{C_1} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}+\oint_{C_2} \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=4\pi.$$

完全类似地，可得一般情况(C 围绕 Oz 轴旋转 n 圈)时，有

$$\Gamma=\oint_C \boldsymbol{a}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=2\pi n.$$

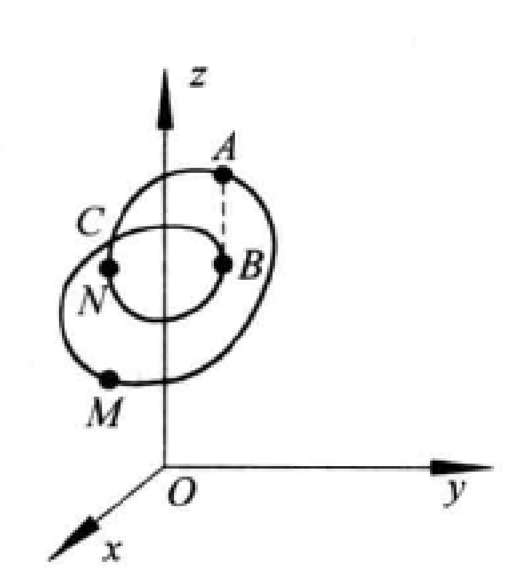


图 4455

【4457】 证明：场 $\boldsymbol{a}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 是有势场，并求这个场的势.

提示 只要证明 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 又由势 u 满足 $\mathrm{d}u=\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，可得 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数.

解 由于对空间任一点 (x,y,z) 均有

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\boldsymbol{a}&=\left\{\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y+2z)]-\frac{\partial}{\partial z}[xz(x+2y+z)]\right\}\boldsymbol{i}+\left\{\frac{\partial}{\partial z}[yz(2x+y+z)]-\frac{\partial}{\partial x}[xy(x+y+2z)]\right\}\boldsymbol{j}\\&\quad+\left\{\frac{\partial}{\partial x}[xz(x+2y+z)]-\frac{\partial}{\partial y}[yz(2x+y+z)]\right\}\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{0},\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{a}$ 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=yz(2x+y+z)\mathrm{d}x+xz(x+2y+z)\mathrm{d}y+xy(x+y+2z)\mathrm{d}z\\&=xyz(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+(x+y+z)(yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=xyz\mathrm{d}(x+y+z)+(x+y+z)\mathrm{d}(xyz)\\&=\mathrm{d}[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

故势 $u=xyz(x+y+z)+C$，其中 C 为任意常数.